18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Siebenter Band,

in 4 Heften.

Mit 3 Kupfertafeln.

Berlin, 1831.
Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs

des siebenten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung		Heft	Seite
2.	Auflösung einiger arithmetischen und geometrischen Aufgaben. Vom Herrn *Th. Clausen* zu München.	I.	30
4.	Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algèbre. Par Mr. *C. G. J. Jacobi*, prof. de math. à Königsberg.	I.	41
5.	Additamenta ad conatum, casum irreducibilem solvendi. Auct. Dr. *C. J. D. Hill*, Londini Goth.	I.	44
7.	Mémoire sur quelques formules générales d'analyse. Par Mr. *G. Libri* de Florence.	I.	57
9.	Potenzial- oder cyklisch-hyperbolische Functionen. Vom Herrn Prof. *Gudermann* zu Cleve. (Tafeln zu der Abhandlung No. 1., 16. und 28. im vorigen Bande.)	I.	72
21.	Fortsetzung dieser Tafeln	II.	176
14.	Über den Werth der Reihen $R_n = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - \text{etc. in infin. und}$ $S_n = 1^n - 3^n + 5^n - \text{etc. in infin.}$ Vom Herrn *Th. Clausen* zu München.	II.	112
17.	Observatio pertinens ad solutionem aequationum indeterminatarum secundi gradus. Auctore *Ferd. Minding*, Dr. phil.	II.	140
22.	Note sur la manière dont se composent les valeurs de y et z dans l'équation $\frac{4(x^p-1)}{x-1} = y^2 \pm pz^2$, et celles de Y' et Z' dans l'équation $\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1} = Y'^2 \pm pZ'^2$. Par Melle *Sophie Germain* à Paris. . .	II.	201
24.	Verschiedene mathematische Aufgaben und Sätze. Von dem Herrn Conrector *Beyer* zu Neu-Stettin	III.	217
25.	Mémoire sur les fonctions discontinues. Par Mr. *G. Libri* de Florence.	III.	224
26.	Beweise der ersten Sätze der Theorie der numerischen Facultäten. Vom Herrn *Th. Clausen* zu München	III.	234
28.	Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques. Par l'éditeur.	III.	253
31.	Suite du mémoire précédent.	IV.	314
29.	Umformung einer Reihe von sehr allgemeiner Form. Vom Herrn Prof. *C. Gudermann* zu Cleve.	III.	306
30.	Demonstrationes theorematum et solutiones problematum quorumdam a celeb. Hill Vol. 7. pag. 102. hujus operis propositorum. Auct. *Th. Clausen.* Mun.	IV.	309

2. Geometrie.

1.	Mémoire sur la courbure des surfaces. Par Melle *Sophie Germain* à Paris.	I.	1
2.	Auflösung einiger arithmetischen und geometrischen Aufgaben. Vom Herrn *Th. Clausen* zu München	I.	30
3.	Beweis einiger geometrischen Sätze. Von Demselben.	I.	36

Nr. der Abhandlung		Heft	Seite
6.	Geometrische Auflösung der Aufgabe: In einen Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten verlängert durch gegebene Puncte gehen. Vom Herrn *Th. Clausen* zu München.	I.	55
8.	Neuer Beweis der Gaufsischen Formeln in der sphärischen Trigonometrie. Vom Herrn *L. Feldt*, Professor der Mathematik zu Braunsberg in Ost-Preufsen.	I.	68
16.	Einige geometrische Sätze. In Folge des Lehrsatzes 11. Band 6. Heft 2. Seite 213. Vom Herrn *L. J. Magnus* zu Berlin.	II.	132
24.	Verschiedene mathematische Aufgaben und Sätze. Von dem Herrn Conrector *Beyer* zu Neu-Stettin	III.	217

II. Angewandte Mathematik.

12.	Eine neue Art, die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen. Vom Herrn *Th. Clausen* zu München.	II.	105
13.	Über die Formirung der Bedingungs-Gleichungen zur Verbesserung einer Planeten- oder Cometenbahn. Von Demselben.	II.	108
15.	Mémoire sur la théorie de la chaleur. Par Mr. *G. Libri* de Florence.	II.	116
18.	Auflösung einer astronomischen Aufgabe. Von Herrn *Th. Clausen* zu München	II.	143
19.	Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps sololides homogènes. Par MM. *Lamé* et *Clapeyron*, Colonels du Génie au service de Russie. .	II.	145
27.	Suite du mémoire précédent.	III.	237
32.	Fin du mémoire précédent.	IV.	381
23.	Entwickelung der Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, die auf einen freien festen Körper wirken. Von dem Herrn Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.	III.	205

Aufgaben und Lehrsätze.

11.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen. .	I.	102

Anzeigen und Nachrichten von Büchern.

10.	Rapport sur un ouvrage manuscrit de Mr. Ostrograski, intitulé: „Cours de mécanique céleste."	I.	97
20.	Notice sur un ouvrage de Mr. le Baron *de Poisson*, sur l'action capillaire.	II.	170
33.	Anzeigen und Nachrichten von Büchern.	IV.	414

1.
Mémoire sur la courbure des surfaces.

(Par Mᵉˡˡᵉ *Sophie Germain* à Paris.)

Observations préliminaires.

Les surfaces ont été l'objet d'un grand nombre de travaux, et cependant, si l'on cherche à pressentir quel obstacle pourroit, à la première vue décourager le lecteur, on est moins frappé de l'espèce de satiété qui s'attache au sujet que de la trop grande nouveauté de l'aspect sous lequel on a cru devoir l'envisager.

On se propose, en effet, dans ce mémoire, de signaler et de définir un genre de quantités dont l'existence ne paroit pas avoir été soupçonnée; et, en traitant une matière qui semble épuisée, on sera forcé de recourir à des distinctions inusitées, à des notions singulières en apparence. Sans doute, il est à craindre que de telles recherches qui n'auront ni l'appui d'un nom celèbre, ni, malgré tous mes soins, le secours d'une exposition lumineuse soient faiblement accuellies; le moindre degré d'attention suffiroit cependant pour reconnoître que ces distinctions sont fondées, et que ces notions résultent du point de vue sous lequel la courbure des surfaces se présente dans de certaines questions. Ainsi lorsque la courbure entre en comparaison avec des quantités dynamiques, on ne peut se dissimuler qu'elle est tacitement traitée comme une quantité du même genre. Les surfaces ne sont donc plus considérées par rapport à elles seules, et il ne s'agit pas de leurs propriétés particulières, ni de celles qui sont communes à une classe d'entr'elles. Ce dont il s'agit alors c'est de définir la quantité dynamique née de la courbure. Or cette quantité ne dépend pas de la figure des surfaces, mais d'une condition qui est remplie par un nombre infini de surfaces différentes. De là naissent des distinctions nécessaires, mais dont l'usage n'a pas encore été consacré; des notions simples, mais qui n'ont jamais été textuellement exprimées. Si, dès le début de ce mémoire, on étoit dans l'obligation de s'expliquer et sur ces notions et sur les distinctions qu'elles rendent indispensables, la tâche seroit extrèmement difficile. Par l'ordre même des idées on se trouve placé dans une position beaucoup plus favorable.

Il convient d'examiner d'abord quelles sont les courbures linéaires dues aux intersections des plans menés par un des points de la surface; et les recherches d'Euler offrent, à cet égard, les secours qu'on peut désirer. Le premier paragraphe du présent mémoire pourra être regardé comme le développement de celui de cet illustre géometre sur la courbure des surfaces; et la simple combinaison des formules conduira à déterminer la loi à laquelle est assujéttie la repartition de la courbure linéaire. Cette loi sera ensuite présentée comme un cas particulier d'une loi générale, dont un exemple emprunté à la distribution de la chaleur offrira une seconde application.

Après avoir développé les conséquences immédiates des principes adoptés depuis longtems, on exposera quelques considérations nouvelles sur la courbure des surfaces. L'examen de la manière dont la courbure est repartie, révèlera bientôt l'existence d'une quantité moyenne dépendante de la courbure, mais commune à un nombre infini de surfaces de figures différentes.

Le lecteur verra que dans les questions dynamiques, où la courbure entre en considération, tandis que la somme des forces nées de cette courbure, est indépendante de la figure de la surface, la répartition des mêmes forces autour du point donné dépend, au contraire, de cette figure; en sorte que la loi de répartition de la courbure linéaire autour d'un point choisi sur la surface, offre la plus entière parité avec ce que l'on sait relativement à la composition des forces qui agiroient autour de ce point.

Une construction dont l'idée se présente assez naturellement servira à rendre sensible et la distribution de la courbure et l'équivalence des figures différentes auxquelles appartient une même courbure moyenne.

Ces variétés sont toutes comprises dans le cas où les rayons de courbures principales sont dirigés du même côté. Afin de ne rien laisser à désirer sur ce qui concerne la courbure moyenne, on montrera quels sont les changemens graduels qu'éprouve cette courbure dans le cas contraire.

La dernière partie de ce travail, bien qu'intimément liée à la première, en est pourtant distincte. S'il arrivoit donc, contre toute attente, qu'elle devint l'objet de quelqu'objection, l'autre partie, où, ayant eu soin d'écarter les idées qui me seroient particulières, je me suis constamment laissé guider par les travaux d'Euler, devroit au moins en être à l'abri.

Mémoire

§. 1.

Des recherches d'Euler et des conséquences qu'on en peut tirer.

1. Si, par rapport aux surfaces, on avoit besoin de connoître la mesure de la courbure, on trouveroit peu de secours dans les écrits des géomètres qui se sont occupés des diverses questions dont se compose la géométrie descriptive, et l'on seroit forcé de remonter à des travaux plus anciens.

Le mémoire d'Euler, intitulé: „Recherches sur la courbure des surfaces (M. de Berlin, 1760, p. 119.) contient, en effet, tout ce que l'on sait d'important à cet égard; et, en lisant ce beau mémoire, on apperçoit bientôt que l'illustre auteur y a déposé le germe des recherches, qui peuvent faire disparoître les difficultés qu'il a pris soin de signaler.

Dans la vue de fixer le point de départ, on reproduira ici les premiers passages de ce mémoire.

En voici le début: „Pour connoître la courbure des lignes courbes, la détermination du rayon osculateur en fournit la plus juste mesure, en nous présentant pour chaque point de la courbure un cercle, dont la courbure est précisément la même. Mais quand on demande la courbure d'une surface, la question est fort équivoque et point du tout susceptible d'une réponse absolue, comme dans le cas précédent. Il n'y a que les surfaces sphériques dont on puisse mesurer la courbure, attendu que la courbure d'une sphère est la même que celle de ses grands cercles et que son rayon en peut être regardé comme la juste mesure. Mais, pour les autres surfaces, on n'en sauroit même comparer la courbure avec celle d'une sphère, comme on peut toujours comparer la courbure d'une ligne courbe avec celle d'un cercle; la raison en est évidente, puisque, dans chaque point d'une surface, il peut y avoir une infinité de courbures différentes . . . . ."

Plus bas (p. 120.) on lit: „Mais, pour le sujet présent, il suffit de ne considérer de toutes ces infinies sections que celles qui sont perpendiculaires à la surface, dont le nombre est pourtant encore infini . . . . . .: et l'assemblage de tous ces rayons (ceux des courbes produites

par les sections normales) nous donnera la juste mesure de la courbure de la surface au point donné."

Lorsque je proposai de représenter la courbure d'une surface par la somme des raisons inverses des deux rayons de ses courbures principales, l'objection indiquée d'avance dans le premier des passages qu'on vient de lire fut reproduite; et les opposans parurent croire que, parmi le nombre infini des courbes contenues dans les différens plans menés par un des points de la surface, le choix des courbures principales étoit arbitraire.

Dans le mémoire envoyé à l'Académie, pour le concours de 1816, je pris la somme des raisons inverses des rayons des courbures qui résultent de toutes les intersections que produisent les différentes positions du plan mené par le point donné.

On sait que la formule qui exprime la courbure due aux sections obliques, renferme le cosinus de l'inclinaison. Cette formule appartient, je crois, à Meunier mort lorsqu'il étoit encore élève de l'école polytechnique. Quoiqu'il en soit, en prenant par rapport à chacune des positions du plan normal, la somme de toutes les sections inclinées, chaque valeur du cosinus est écrite avec des signes opposés; cette somme disparoit donc, et, par conséquent, il ne reste plus, dans la somme générale, que les seules valeurs dues aux sections normales. J'ai fait voir que cette dernière somme est uniquement composée des raisons inverses des rayons de principales courbures pris un nombre infini de fois, en sorte que la somme totale n'est autre chose que le résultat d'opérations équivalentes, dont une seule suffiroit pour exprimer la courbure de la surface.

Un pareil raisonnement étoit conforme à l'indication donnée par Euler; car on vient de voir que cet habile géomètre pensoit, sans qu'il ait pourtant témoigné l'avoir vérifié, qu'on pouvoit mettre à l'écart les sections obliques et que la somme des sections normales conduiroit à connoître „la juste mesure de la courbure de la surface au point donné." Il étoit d'ailleurs évident, que l'idée de l'infini, étrangère à une semblable mesure, y avoit été introduite par la multiplicité des opérations, multiplicité à laquelle avoit donné lieu la forme du raisonnement, et non la nature de la question.

Quoiqu'il en soit du mérite de cette démonstration, elle fut formellement désapprouvée; et, la légitimité de l'hypothèse ne cessant pas

d'être contestée, il parut nécessaire d'examiner de nouveau quelle est, par rapport aux surfaces, l'expression de la courbure.

2. On vient de dire qu'il est permis de mettre à l'écart les courbures dues aux sections obliques; dans la suite, de nouvelles considérations serviront à établir que ces courbures sont, en effet, étrangères à la question des surfaces. Sans qu'il soit besoin d'en avertir de nouveau, nous nous bornerons donc dès-à-présent à nous occuper des seules sections normales.

Si, conformément à la remarque d'Euler, les deux courbures principales suffisent pour déterminer la courbure de l'élément d'une surface, on ne peut cependant se faire une idée complète de cette courbure, sans recourir à l'examen des courbures linéaires qui ont une origine commune avec les courbures principales.

Soient f et g les rayons de plus grande et de moindre courbures, r et r' les rayons qui appartiennent aux plans faisant, l'un l'angle φ, l'autre l'angle $\varphi+\frac{\pi}{2}$, avec celui de plus grande courbure, les formules d'Euler donnent:

$$r = \frac{2fg}{f+g-(f-g)\cos 2\varphi},$$

$$r' = \frac{2fg}{f+g-(f-g)\cos 2\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)},$$

d'où on tire:

$$\frac{1}{r} = \frac{f+g-(f-g)\cos 2\varphi}{2fg},$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{f+g-(f-g)\cos 2\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{2fg} = \frac{f+g+(f-g)\cos 2\varphi}{2fg},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'} = \frac{1}{f}+\frac{1}{g}.$$

Par construction, les plans qui contiennent les courbures exprimées par $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$ sont perpendiculaires entr'eux et ne sont assujettis à aucune autre condition.

Quelle que soit d'ailleurs la position de deux plans normaux perpendiculaires entr'eux, la somme des courbures contenues dans ces plans est donc une quantité constante.

Dans le mémoire dont nous avons déjà parlé, on avoit fait usage de cette remarque; et on a lieu de croire qu'elle n'avoit pas encore été faite.

3. Parmi les positions des deux plans normaux perpendiculaires entr'eux, celle qui est déterminée par la valeur 45^0 de l'angle φ est très remarquable.

On a alors:

$$\frac{1}{r} = \frac{f+g-(f-g)\cos 90^\circ}{2fg} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right),$$
$$\frac{1}{r'} = \frac{f+g+(f-g)\cos 90^\circ}{2fg} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right).$$

Ainsi, les courbures contenues dans l'un et l'autre de ces plans sont égales entr'elles. Elles doivent donc être égales, comme elles le sont en effet, à la demi-somme des courbures principales.

En ayant égard à leur position seule, position qui partage en deux parties égales la distance angulaire entre les plans principaux, on est suffisamment autorisé à nommer plans moyens ceux qui contiennent les courbures égales à la demi-somme des courbures principales.

4. R et R' étant les rayons contenus dans les deux plans qui, de part et d'autre du plan de plus grande courbure, font avec lui l'angle w, on trouve:

$$\frac{1}{R} = \frac{f+g-(f-g)\cos 2w}{2fg},$$
$$\frac{1}{R'} = \frac{f+g-(f-g)\cos 2(2\pi-w)}{2fg} = \frac{f+g-(f-g)\cos 2w}{2fg}.$$

Les courbures contenues dans l'un et l'autre de ces plans sont donc égales entr'elles. Cette égalité est indépendante de la valeur de l'angle w; mais, parmi les systèmes de deux plans ainsi choisis, la valeur $w = 45^0$ est la seule qui satisfasse en même tems à cette autre condition, que la somme des deux courbures soit égale à celle des courbures principales.

5. $R_{,}$ et $R_{,,}$ étant les rayons contenus dans les deux plans qui, de part et d'autre de l'un des plans moyens, font avec lui l'angle w', on a:

$$\frac{1}{R_{,}} = \frac{f+g-(f-g)\cos 2(45^\circ+w')}{2fg} = \frac{f+g+(f-g)\sin 2w'}{2fg};$$
$$\frac{1}{R_{,,}} = \frac{f+g-(f-g)\cos 2(45^\circ-w')}{2fg} = \frac{f+g-(f-g)\sin 2w'}{2fg},$$

et par conséquent:

$$\frac{1}{R_{,}}+\frac{1}{R_{,,}} = \frac{1}{f}+\frac{1}{g}.$$

La somme des courbures qui appartiennent à l'un et à l'autre plan, est donc égale à celle des courbures principales.

Cette égalité est indépendante de la valeur de l'angle w': mais, parmi les systèmes des deux plans ainsi choisis, la valeur $w' = 45^0$ est la seule qui satisfasse à cette autre condition, que les deux courbures qui composent la somme dont il s'agit, soient égales entr'elles.

§. 2.

Distribution de la courbure linéaire autour de chacun des points de la surface.

1. Quelle que soit la diversité des surfaces, les courbures linéaires produites par l'intersection du plan normal qui prendroit successivement toutes les positions possibles autour d'un point donné, offrira toujours le même arrangement symétrique.

Cet arrangement constitue ce que nous nommerons dorénavant: loi de distribution de la courbure autour de chacun des points de la surface.

On a pu remarquer que la courbure contenue dans les plans moyens joue, par rapport à toutes les autres, le rôle d'une moyenne.

La dénomination de courbure moyenne convient donc ici à aussi juste titre que celle de courbures principales, imposée depuis longtems à la plus grande et à la moindre des courbures linéaires réparties autour d'un des points de la surface. Il est, en effet, également nécessaire, de distinguer, parmi tant de courbures diverses, celles qui, entre toutes les autres, jouissent de propriétés qui leur sont particulières.

La loi qui nous occupe se compose des propositions suivantes, dont les équations démontrées d'avance dans le paragraphe précédent, doivent être regardées comme l'expression analytique.

Première proposition. Quelle que soit d'ailleurs la position de deux plans normaux, perpendiculaires entr'eux, menés par un point donné de la surface, la somme des courbures contenues dans ces deux plans sera toujours la même; par conséquent, cette somme sera égale à celle des courbures principales.

Ainsi, l'intervalle angulaire entre les grandeurs extrêmes de la courbure donne celui qui sépare les deux courbures, d'ailleurs différentes, dont

la somme est constante: cette proposition est appuyée sur l'équation

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{1}{f}+\frac{1}{g} \quad (\S.\ 1.\ \text{No. } 2.).$$

2. La loi de distribution de la courbure sera exprimée d'une manière plus élégante, si, au lieu de considérer la moitié du contour du point donné, on embrasse ce contour entier.

Selon cette manière d'envisager les choses, la prolongation d'un même plan en deçu et au delà du point par lequel il a été mené, sera regardée comme donnant lieu à deux positions distinctes du plan normal.

L'équation $\frac{1}{r}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)$, §. 1. No. 3., suffit pour établir que la courbure contenue dans chacun des plans moyens est, en effet, moyenne entre les courbures principales de la surface.

Une proposition plus générale peut être énoncée comme il suit:

Seconde proposition. En prenant la courbure moyenne pour origine, si on mène les deux plans moyens prolongés en deça et au delà du point donné, ces plans partageront le contour du même point en quatre régions dont l'état sera pareil, mais de signe opposé. Chaque courbure linéaire comprise dans une de ces parties aura une courbure qui excèdera la courbure moyenne d'une quantité proportionnelle au sinus de l'angle doublé formé entre le plan auquel cette courbure appartient et le plan moyen.

Chaque courbure comprise dans la partie contigue aura une courbure moindre que la courbure moyenne; et la différence sera la même que l'excès dans la première partie.

Les équations

$$\frac{1}{R_{,}}=\frac{f+g+(f-g)\sin 2w'}{2fg},$$
$$\frac{1}{R_{,,}}=\frac{f+g-(f-g)\sin 2w'}{2fg},$$

démontrées (§. 1. No. 5.) contiennent cette proposition toute entière. Car tandisque le terme $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)$ représente la courbure moyenne, le terme $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\right)\sin w'$, pris avec des signes différens suivant la région à la quelle la courbure appartient, exprime soit l'excès soit la différence de cette courbure comparée à la courbure moyenne.

On peut conclure de là qu'il suffit, pour être en état de déterminer toutes les courbures linéaires reparties autour du point choisi, de connoître la courbure moyenne en même tems que la valeur et la position d'une quelconque de ces courbures.

Troisième proposition. Il existe, en général, autour du point donné, quatre directions suivant lesquelles les courbes contenues dans les plans normaux sont semblables. A l'égard des plans principaux, le nombre des courbures semblables se réduit à deux.

Les équations démontrées §. 1. No. 4. sont relatives à la plus grande courbure, mais elles auroient également lieu par rapport à la moindre.

Ces équations servent à établir la légitimité de notre dernière proposition. Car elles montrent que, de part et d'autre, et à égale distance d'une des courbures principales, se trouvent deux courbures égales entr'elles. Elles montrent, en même tems, que, quand on a $w = 0$, les deux positions se confondent en une seule, qui n'est autre que celle d'une des courbures principales.

Une conséquence immédiate de notre troisième proposition nous ramène à ce qu'on sait déjà touchant les sphères qui ont leur centre sur la normale à la surface.

Il est évident, en effet, que, chacune des courbures principales se trouvant deux fois seulement dans le contour entier du point donné, et étant par conséquent contenues dans la prolongation d'un seul et même plan, les sphères décrites de ces rayons toucheront, mais ne couperont la surface; tandis que, par une conséquence inverse, les sphères décrites des rayons compris entre ces deux limites couperont, au contraire, la même surface.

Parmi les sphères qui coupent la surface, il convient de distinguer la sphère à laquelle appartient le rayon contenu dans les plans moyens. Les quatre quadrans de cette sphère sont alternativement situés au dedans et au dehors de la surface; nous la nommerons sphère de moyenne courbure; et elle donnera lieu à des remarques qui seront exposées dans le paragraphe suivant.

3. Les propositions qui viennent d'être expliquées sont tellement liées que deux d'entr'elles ne sauroient subsister sans que la troisième s'en suive.

Ainsi, pour que la somme des courbures contenues dans deux plans perpendiculaires entr'eux soit toujours la même, quelle que soit d'ailleurs la position de ces plans (prem. prop.) et qu'indépendamment de la valeur de l'angle choisi, cette somme soit encore la même, si les courbures qui la composent sont contenues dans les deux plans qui, de part et d'autre d'un des plans de courbure moyenne, font avec lui des angles égaux (sec. prop.), il faut qu'on puisse trouver, en général, quatre positions du plan normal qui contienne une même courbure, et que le nombre de ces positions se réduise à deux s'il s'agit des courbures principales.

Et, en effet, le complément d'une courbure quelconque à la somme constante, étant, en vertu des deux premières propositions, fourni par deux positions différentes du plan normal prises l'une et l'autre dans le demi-contour du point choisi, il doit se trouver quatre positions douées de la même propriété dans le contour entier: à moins, toutefois, que les deux positions se confondent en une seule; ce qui ne peut arriver que par rapport aux courbures principales.

On verra de même que la première et la troisième propositions conduisent à la seconde, la seconde et la troisième à la première.

En examinant, tant en elles mêmes que dans leurs rapports mutuels les diverses propositions dont se compose la loi de la distribution de la courbure, on reconnoit bientôt qu'il s'agit ici d'une loi d'ordre et d'arrangement, dont le caractère, étranger à l'idée de la courbure, dépend uniquement de l'existence de quantités extrèmes et de la considération de l'espace circulaire dans lequel doivent se ranger les quantités intermédiaires.

L'existence des quantités extrèmes entraine, en effet, celle d'une quantité moyenne. Si on connoit la position des quantités extrèmes, on connoîtra aussi la position de la quantité moyenne; car il est évident que celle-ci occupe le milieu de la distance angulaire entre les premières.

Les quantités extrèmes partagent la circonférence en un nombre de parties qui dépend de cette distance; les quantités moyennes, en même nombre que ces parties, partagent donc aussi la circonférence en autant de parties. π représentant, comme à l'ordinaire, la demi-circonférence, si l'intervalle angulaire entre les quantités extrèmes est exprimé par $\frac{\pi}{n}$, $2n$ sera le nombre de ces parties.

Par la nature des quantités moyennes, de part et d'autre de chacune d'elles, on doit trouver deux quantités dont la somme soit égale à celle des quantités extrèmes.

Cette remarque nous ramène à la seconde proposition, et rien ne seroit plus facile que de déduire également des rapports généraux qui viennent d'être indiqués des deux autres propositions. Sans nous arrêter au développement des raisonnemens qui pourroient servir à établir chacune des propositions générales, nous nous contenterons de les exprimer comme il suit:

Première proposition. Quelle que soit d'ailleurs leur position, la somme des valeurs distantes de l'angle $\frac{\pi}{n}$ sera toujours la même; par conséquent, cette somme sera égale à celle des valeurs extrèmes.

Seconde proposition. Si on mène les diamètres qui joignent deux à deux les points qui sont en possession des valeurs moyennes, la circonférence sera partagée en $2n$ régions, dont l'état comparé à l'état moyen sera pareil, mais de signe opposé. Chaque valeur comprise dans une de ces parties excèdera la valeur moyenne. Chaque valeur comprise dans la partie contigue sera moindre que la valeur moyenne; et la différence sera la même que l'excès dans la première partie.

Troisième proposition. Il existe, en général, autour du centre $2n$ positions où les valeurs sont semblables entr'elles. A l'égard des valeurs extrèmes le nombre de ces positions se réduit à n.

La loi de distribution de la courbure offre le cas où $n = 2$. En prenant $n = 1$, on a celle qui convient à la distribution de la chaleur dans l'armille telle qu'elle a été donnée par Mr. Fourier (Théorie de la chaleur p. 277. — 282.). n étant ici l'unité, la distance entre les quantités extrèmes est la demi-circonférence. En rapprochant les passages que séparent des développemens inutiles à la comparaison que nous avons en vue, on lit:

„Si dans cet état (celui qui s'établit au bout d'un certain tems), on choisit deux points de l'anneau, situés aux deux extrémités d'un même

diamètre . . . . . ., la demi-somme des températures des points opposés sera une quantité . . . . . qui seroit encore la même, si on avoit choisi deux points situés aux extrémités d'un autre diamètre."

Tel est en effet ce que doit devenir la proposition première, lorsque l'intervalle est de la moitié, au lieu du quart de la circonférence.

„Si on cherche d'abord le point de l'anneau pour lequel on a la condition (celle qui est remplie par le point qui sépare en deux parties égales l'arc de 180° compris entre les points auxquels appartiennent les températures extrèmes), on voit que la température de ce point est à chaque instant la température moyenne de l'anneau: et il en est de même du point diamétralement opposé . . . . . Ces deux points divisent la circonférence de l'anneau en deux parties dont l'état est pareil, mais de signe opposé: chaque point de l'une de ces parties a une température qui excède la température moyenne . . . . . Chaque point de l'autre partie a une température moindre que la température moyenne, et la différence est la même que l'excès dans le point opposé.

Cette proposition est, comme on le voit, entièrement semblable à notre seconde proposition.

A l'égard de la troisième, elle peut être exprimée comme il suit:

Le diamètre qui joint les points doués des températures extrèmes divise la circonférence en deux parties dont l'état est pareil et de même signe; en sorte que toute temperature comprise entre les températures extrèmes appartient à la fois à deux points différens de l'armille; tandis que celles-ci appartiennent à un seul point.

Cette proposition ne peut, à la vérité, être comme les précédentes, extraite textuellement du livre cité; mais elle résulte des formules qui y sont données.

5. Non seulement la loi d'ordre et de symmétrie dont nous avons montré la généralité établit des rapports nécessaires entre les arrangemens qui conviennent aux faits, d'ailleurs les plus différens, quand ils remplissent la double condition de nous offrir des valeurs extrèmes et de se développer dans un espace circulaire; mais on peut encore remarquer qu'il existe une correspondance frappante entre le cas relatif à la distribution de la courbure et ce qu'on sait touchant la composition des forces.

Ainsi, quelle que soit leur nature, les forces qui agiront sur un plan donné pourront être décomposées suivant la direction de deux plans perpendiculaires entr'eux dont la direction est assujettie à la seule condition de passer par le point donné. Parmi les systèmes des deux plans perpendiculaires entr'eux, se trouvera nécessairement le système, où les deux portions de forces qui agissent selon chacun des deux plans sont plus différentes que dans tout autre système; et, si on connoit la position d'un tel système, on sera conduit à trouver celle du système où les forces qui agissent selon chacun des deux plans sont égales entr'elles.

Si nous supposions présentement qu'il y ait des cas où la courbure d'une surface puisse donner naissance à de certaines forces, ces forces devant être susceptibles des décompositions qui viennent d'être mentionnées, nous nous trouverions conduits à admettre, à la vérité par pure induction, que, quelle que soit d'aîlleurs la diversité des positions, la somme des courbures contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux est toujours la même, et que, parmi ces positions, il doit s'en trouver une où les courbures qui appartiennent à chacun des deux plans seront égales entr'elles.

De quelque côté qu'on envisage les choses, on est donc ramené vers cette même loi qui, déduite d'abord des formules d'Euler, se présente également comme une nécessité d'ordre et d'arrangement et comme une représentation, tracée d'avance, des quantités dynamiques qui pourroient naître, dans certains cas, de la courbure des surfaces.

La considération de la courbure moyenne répandra, comme on le verra bientôt, un jour nouveau sur les questions de ce genre; aussi, après nous être borné dans ce qui précède à développer les conséquences de vérités généralement admises, ne craindrons-nous plus de recourir aux distinctions et aux notions nouvelles dont nous avons déjà fait préssentir la nécessité.

§. 3.

De la courbure moyenne des surfaces.

1. Avant d'entrer en matière, nous commencerons par présenter quelques considérations générales sur la courbure des surfaces.

Ayant tracé sur le plan un cercle et les rayons qui aboutissent aux différens points de la circonférence et ayant mené par chacun de cès ra-

yons autant de plans perpendiculaires au plan du cercle, supposons qu'on fasse contracter à ce plan une courbure cylindrique.

Le centre du cercle n'aura pas été déplacé, et, après la courbure, les plans menés par les rayons, seront encore perpendiculaires à la surface, dans ce point.

Les diverses courbures contractées par les rayons seront donc les courbures linéaires contenues dans les différens plans normaux: et, par conséquent, l'inflexion du plan n'aura fait contracter, à aucun des mêmes rayons, des courbures continues dans les plans obliques. Ainsi, non seulement, et par les raisons apportées (§. 1. No. 1.), ces courbures peuvent être mises à l'écart, mais encore elles doivent être regardées comme entièrement étrangeres à la question des surfaces.

Il en seroit encore de même, si l'élément plan avoit été courbé à la fois dans deux sens différens; pourvu toute fois qu'on admêt que cet élément fût infiniment petit. Et cette supposition convient parfaitement ici, puisqu'il s'agit seulement de déterminer la courbure dans chacun des points de la surface considérés isolément.

Sous cette condition, la différence entre la circonférence du petit cercle tracé sur le plan et le contour de la courbe à laquelle cette circonférence a été ployée par l'effet de la double courbure seroit en effet négligeable. On s'en assurera en imaginant que le petit cercle décrit du rayon u soit devenu celui qui termine une petite calotte sphérique. u sera l'arc dont la courbure fort petite, est comprise entre le centre, actuellement le point le plus élevé de la calotte, et le plan du cercle qui termine la même calotte.

Le rayon de ce dernier cercle sera $\sin u$; et par ce que l'angle u est infiniment petit, on aura $\sin u = u$.

La difficulté de courber à la fois dans deux sens différens la superficie du cercle tracé sur le plan, sans qu'il en résulte aucune duplicature, aura donc disparu; et les considérations qui, dans le cas d'une courbure cylindrique, ont servi à écarter les sections obliques seront applicables au cas général où l'on ne suppose plus que l'une des courbures principales de la surface soit nulle.

Si nous avions uniquement en vue d'examiner les relations diverses qui intéressent la courbure des surfaces, envisagée en elle-même et

sans aucun égard à l'influence qu'exerce cette courbure dans certaines questions dynamiques, notre tâche seroit déjà remplie.

Le but principal que nous nous sommes proposé étant, au contraire, de déterminer cette influence, ce qui précède devra être regardé comme une sorte d'introduction, dans laquelle, à l'abri de l'autorité qui nous a servi de guide dans cette première partie de notre travail, nous chercherons un appui en faveur des idées nouvelles qui vont être exposées.

2. En nous occupant de la loi de distribution de la courbure, nous avons reconnu l'existence d'une courbure moyenne, mais cette courbure se présentoit alors comme purement linéaire, et plus loin (§. 3. No. 4.) nous nous sommes bornés à faire observer que la sphère décrite du rayon de moyenne courbure coupe la surface en quatres parties égales, situées alternativement en dedans et en dehors de la sphère.

Il est tems d'examiner les propriétés de cette sphère.

Ce n'est donc plus d'une courbure, moyenne entre les diverses courbures linéaires reparties autour d'un des points de la surface, qu'il s'agit présentement; et, par rapport à la sphère qui coupe la surface en quatre parties égales, cette égalité n'est pas le seul caractère qu'il importe de remarquer.

Nous irons plus loin; nous dirons que la sphère dont les grands cercles possèdent la courbure moyenne linéaire donne véritablement la courbure moyenne de la surface elle même; et, par cette raison, nous la nommerons sphère de courbure moyenne de la surface.

L'utilité de cette proposition que nous restreindrons d'abord au cas où les deux rayons de courbures principales sont dirigés du même côté, est de montrer qu'il existe, sous le rapport dynamique, une quantité de courbure indépendante de la figure des surfaces; en sorte que, quelles que soient les différences entre les courbures linéaires contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux, menés par le point donné, tant que la somme de ces courbures, somme qui détermine, seule, la courbure moyenne, demeure la même, les forces nées de la courbure de la surface demeureront aussi les mêmes.

Non seulement la distinction entre la figure et la quantité de courbure qui appartiennent à la surface s'offre à l'esprit lorsqu'on veut se rendre compte du rôle que joue la courbure dans les questions dynamiques; mais encore, comme on le verra tout à l'heure, un examen attentif

de la courbure, considérée en elle même, conduit également à cette distinction.

3. Nous nous proposons d'obtenir une représentation géométrique de la courbure moyenne et de montrer, à l'aide d'une construction fort simple, que la quantité de la courbure est indépendante de la manière dont elle est repartie autour d'un point donné de la surface. Pour y parvenir, il nous a paru nécessaire de remonter jusqu'aux notions les plus communes touchant la courbure.

D'abord, à l'égard des courbes linéaires.

L'idée qui se présente la première est de comparer la courbe à sa tangente: ainsi, après avoir fait choix de deux lignes droites d'égale longueur, si on en forme les arcs de deux cercles différens, et qu'on mêne leurs tangentes à un des points d'extrémité de ces arcs, on jugera que celui des deux, dont la seconde extrémité s'éloigne le plus de la tangente, est aussi celui qui a le plus de courbure. La distance entre l'extrémité d'un arc et la tangente menée à l'autre extrémité du même arc est mesurée par une perpendiculaire à la tangente.

Nous nommerons dorénavant cette perpendiculaire ligne de distance.

Il est évident que la ligne de distance est égal au sinus-verse de l'angle correspondant; car cette ligne est parallèle au rayon mené au point de tangence, et elle est comprise entre la tangente et le sinus. De plus, la même ligne est proportionnelle à la raison inverse du rayon de courbure; en sorte qu'on peut dire également de la courbure qu'elle est en raison inverse du rayon, ou en raison directe de la ligne de distance. On verra tout à l'heure que cette dernière manière de s'exprimer, présente de grands avantages quand on cherche à se former une idée complète de la courbure des surfaces.

4. Si nous jugeons qu'une ligne est courbe lorsque nous la voyons s'écarter de la direction d'une droite qui la touche, l'idée de la courbure, par rapport aux surfaces, nous est également suggérée par l'observation de la distance qui sépare le plan tangent des points de la surface voisins du point de tangence.

Pour toute autre surface que celle de la sphère, cette distance n'est pas uniforme.

La question des courbures moyennes peut être énoncée en ces termes: Trouver l'expression de la distance moyenne entre le plan tangent et les points de la surface qui environnent le point de tangence.

Occupons nous d'abord des seules surfaces dont les rayons de principales courbures sont dirigés du même côté.

On a vu que la courbure d'une simple courbe est proportionnelle à une ligne droite, la ligne de distance. Nous allons montrer que la courbure des surfaces est proportionnelle à une surface engendrée par une ligne de distance qui change à chaque instant de grandeur et de position.

Il s'agit présentement de décrire la courbe qui doit diriger le mouvement de la génératrice.

Après avoir mené par le point choisi le plan normal à la surface, on donnera successivement à ce plan toutes les positions dont il est susceptible. Sur chacune des courbes produites par les diverses intersections du plan normal et de la surface on prendra des arcs infiniment petits, assujettis à cette condition que, s'ils étoient étendus en lignes droites, ils donneroient tous des longueurs égales. La courbe qui joint les extrémités de ces arcs sera la directrice que nous avons cherchée.

Cette courbe est à double courbure.

Si on concoit le plan tangent à la surface dans le point donné et la perpendiculaire à ce plan qui tombe sur un des points de la directrice, il est clair que cette ligne ne sera autre que la ligne de distance contenue dans celui des plans normaux auquel appartient la courbe que termine le point choisi sur la directrice. La ligne de distance, en changeant à chaque instant de grandeur, et en parcourant successivement tous les points de la courbe qui dirige son mouvement, sans cesser d'être perpendiculaire au plan tangent, engendrera une surface que les plans de moyennes courbures diviseront en quatre parties.

Il est clair que la surface dont nous nous occupons est composée des lignes de distances, en nombre infini, qui appartiennent aux courbes, également en nombre infini, formées par l'intersection des différens plans normaux qui passent par le point donné de la surface, point par rapport auquel on veut connoître l'expression de la courbure. La surface

composée des lignes de distances sera nommée par cette raison, surface des distances.

On a vu que la courbure d'une simple ligne courbe est proportionnelle à la ligne de distance. En nous laissant conduire ici par l'analogie, nous dirons que, dans le point donné, la courbure de la surface est proportionnelle à la surface des distances décrite autour de ce point. La surface des distances est le segment d'une surface cylindrique ayant pour base la courbe rentrante que les positions successives de la génératrice tracent sur le plan tangent: ce segment est terminé à l'autre extrémité par la directrice. Cette courbe dépend de la figure de la surface à laquelle appartient la surfaces de distances.

Avant d'aller plus loin, il est bon de faire remarquer que la petite courbe rentrante qui sert de base à la surface des distances peut toujours être regardée comme un cercle parfait. En effet, il est évident que la plus grande différence qui puisse exister entre les deux diamètres de cette courbe correspond au cas des surfaces cylindriques. Mais, alors, en adoptant les suppositions et les dénominations No. 1., l'un de ces diamètres étant u, l'autre sera $\sin u$, et on aura $\sin u = u$.

Les plans de courbures moyennes contiennent évidemment les lignes de distances moyennes; ils coupent à la fois la surface des distances, qu'ils partagent en quatre parties symmétriques, la surface donnée, et la sphère de moyenne courbure définie No. 2.

5. Lorsque la surface est sphérique, la courbure autour de chacun de ses points est uniforme; et, par conséquent, dans un rayon donné, les points environnans le point de tangence sont tous également distans de ce point.

Si, du point de tangence, pris pour centre, on décrit, sur la sphère de moyenne courbure, un cercle dont le rayon soît le sinus de l'arc, ou, à cause de la petitesse, l'arc même à l'extrémité duquel appartient la ligne de distance, ce cercle sera la directrice du mouvement de la même ligne de distance, qui, sans changer de grandeur et sans cesser d'être perpendiculaire au plan tangent, engendrera la surface à laquelle la courbure de la sphère est proportionnelle.

Cette surface sera celle des distances moyennes.

La surface des distances moyennes est cylindrique: elle a pour base le cercle que les positions successives de la génératrice tra-

cent sur le plan tangent: elle est terminée, à l'autre extrémité, par la directrice.

Si, pour deux surfaces données, de figures différentes, la somme des courbures principales, et, par conséquent aussi, le rayon de la sphère de moyenne courbure sont les mêmes, la surface des distances moyennes sera aussi la même.

Ainsi, tandis que la surface des distances dépend à la fois et de la courbure moyenne et de la figure de la surface donnée, la considération de la surface des distances moyennes, isolant l'idée de la figure de celle de la distance au plan tangent, offre une représentation separée de l'une des deux affections qui ont toujours été confondus, savoir la figure et la quantité de courbure qu'une surface possède dans chacun de ses points.

La justesse de ce raisonnement exige que les deux surfaces des distances, quoique différentes par leur forme, ayent pourtant la même étendue, puisque de cette étendue dépend évidemment la quantité de courbure, ou, en d'autres termes, la somme des distances entre le plan tangent et les points de la surface qui environnent le point de tangence.

Pour établir l'égalité d'étendue entre les deux surfaces des distances, il suffiroit peut-être de faire remarquer qu'il existe entre les lignes de distances les mêmes relations qu'entre les courbures auxquelles ces lignes sont proportionnelles.

On dira donc, en vertu de la loi de distribution de la courbure, exposée (§. 1. No. 2. et 3.), que la somme des lignes de distances contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux est indépendante du choix de ces plans, et que la ligne de distance moyenne, c'est-à-dire la génératrice de la surface des distances moyennes est elle-même moyenne entre les deux premières lignes des distances.

Cela posé, quand on prend, sur l'une et l'autre des surfaces des distances, un nombre de positions, convenablement choisies, des génératrices, la somme de ces lignes est égale de part et d'autre. Si le nombre des positions de la génératrice est infini, ces positions épuiseront l'étendue de la surface. On en peut conclure que l'étendue elle même est égale de part et d'autre.

L'égalité d'étendue entre les deux surfaces des distances étant, ici, d'une grande importance, nous allons essayer de la rendre sensible; et,

pour cela, nous aurons recours à la considération du développement de ces surfaces.

On a vu, No. 4., que les plans de courbures moyennes coupent, à la fois, la surface donnée, la surface des distances, qu'ils partagent en quatre parties symmétriques, et la sphère de courbure moyenne. Les mêmes plans coupent dont aussi la surface des distances moyennes, qu'ils partagent en quatre parties égales; et, par conséquent il y a intersection, en même tems, entre les deux surfaces des distances.

Nous avons dit, plus haut, que la courbe rentrante qui sert de base à la surface des distances peut être regardée comme un cercle parfait. Cela posé, soit $ABDC$ (Pl. I. Fig. 1.) le développement de la surface des distances moyennes, AC sera le développement du cercle qui sert de base à l'une et à l'autre des surfaces des distances.

Le parallèlogramme $ABDC$ (Fig. 1.) sera divisé en quatre parties égales au moyen des trois lignes mn, $m'n'$ et $m''n''$ parallèles aux côtés AB et CD. On divisera encore en deux parties égales les intervalles Am, mm', $m'm''$ et $m''c$; des points de division on portera, toujours parallèlement aux côtés AB et CD, les lignes pq, $p'q'$ de moindres, et gh, $g'h'$ de plus grandes distances, disposées alternativement; enfin on joindra par des droites les points B et q, q et h, h' et q'. Nous établirons d'abord que la figure $ACDh'q'hqB$ est le développement de la surface des distances.

On sait déjà que AC est le développement de la base de cette surface, et que les plans de distances moyennes coupent à la fois les deux surfaces des distances, qu'ils partagent en quatre parties, symmétriques par rapport à l'une, égales par rapport à l'autre. Par construction, les lignes mn, $m'n'$, $m''n''$ et AB, CD partagent le développement $ABDC$ de la surface des distances moyennes en quatre parties égales: ces lignes sont donc le développement des quatre intersections des deux surfaces des distances.

Si l'on conçoit que l'une des lignes d'intersection devenue mobile, AB par exemple, parcoure tous les points de AC sans cesser de lui être perpendiculaire, et acquiert en même tems les différentes valeurs comprises entre celles des lignes de moyennes et de moindres distances AB et pq, puis, entre les lignes de moindres et de plus grandes distances pq et gh etc., la seconde des extrémités de la ligne mobile tracera sur le plan la ligne brisée $Bqhq'hD$.

Il s'agit de démontrer que les valeurs successives de la ligne mobile qui trace sur le plan la figure $ACDh'q'hqB$, et celles de la génératrice de la surface des distances sont égales, et se succèdent dans le même ordre.

Ces valeurs sont égales, puisque, de part et d'autre, elles reçoivent successivement toutes celles qui sont comprises entre les mêmes limites, savoir les lignes de moindre et de plus grande distance. Elles se succèdent de part et d'autre dans le même ordre; car les parties aliquotes du développement AC, de la base de la surface des distances, correspondent évidemment aux mêmes parties aliquotes de cette base; en sorte que, par exemple, les deux positions de la ligne mobile, que séparoit un intervalle égal au quart de AC, seroient les développemens des lignes de distances, contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux.

La ligne brisée $Bqhq'h'D$, qui sert de limite aux diverses grandeurs de la ligne mobile parallèle à AB, est donc le développement de la directrice de la surface des distances; et, par conséquent, la figure $ACDh'q'hqB$ est en effet celui de cette surface elle même.

Il reste à prouver qu'il y a égalité d'étendue entre le parallèlogramme $ABCD$ et la figure $ACDh'q'hqB$; c'est-à-dire entre les développemens des deux surfaces des distances. Cette égalité résulte de celle qui existe entre les triangles semblables Bqn, $nh'n'$ etc.; et celle-ci est tellement évidente qu'il seroit inutile de nous arrêter à la demontrer.

6. La considération du développement des surfaces des distances nous offre, en même tems qu'un point de vue nouveau des trois propositions établies (§. 2. No. 1. et 2.), une manière également nouvelle d'en prouver la légitimité.

Ces propositions peuvent maintenant être exprimées comme il suit:

Première proposition. Quelle que soit d'ailleurs la position de deux *lignes de distances*, si, dans le développement de la surface des distances, l'intervalle qui sépare ces lignes est égal à celui qui sépare les lignes de principales distances, leur somme sera la même; et, par conséquent, cette somme sera égale à celle des lignes de principales distances. Cette proposition est de toute évidence; car si on conçoit que

le système des lignes de principales distances se meut en parcourant tous les points de AC et, par conséquent aussi, tous ceux $Bqnh$ etc., il est visible que dans une quelconque des positions de ce système, l'accroissement obtenu par une des lignes qui le composent sera égal à la diminution que l'autre aura éprouvée.

Seconde proposition. Les lignes de distances moyennes partagent le développement de la surface des distances en quatre parties.

Chaque ligne de distance comprise dans une de ces parties excède la ligne de distance moyenne.

Chaque ligne de distance comprise dans la partie contigue sera moindre que la distance moyenne; et la différence sera la même que l'excès dans la première partie.

L'inspection de la figure 1. suffit à la démonstration de cette proposition.

Troisième proposition. Il existe, en général, quatre lignes de distances égales entr'elles; mais les lignes de distances principales sont au nombre de deux.

Il est clair, en effet, que les deux parallèles à pq, terminées, d'une part à AC, de l'autre à la ligne brisée Bq etc., et les deux parallèles à $p'q'$ comprises entre les mêmes limites, si elles sont menées à égale distance de pq, pour les unes, de $p'q'$ pour les autres, seront égales; il y a donc quatre pareilles lignes, mais, si la distance entre pq et ses parallèles, et de même entre $p'q'$ et ses parallèles, est nulle, elles se confondront avec pq pour les unes, avec $p'q'$ pour les autres; le lignes de distances principales seront donc au nombre de deux seulement.

Le développement des surfaces des distances montre encore comment il arrive que l'idée de la quantité de courbure qui, dans le cas linéaire, est inséparable de celle de la figure, en est distincte à l'égard des surfaces; car la ligne de distance étant déterminée de grandeur et de position, elle doit rester la même tant que la courbure ne change pas, et elle ne peut convenir par conséquent, qu'à une seule courbe. Mais l'étendue de la surface des distances peut être déterminée sans que la forme de cette surface soit fixée; en sorte que des figures différentes de la surface donnée accompagneront pourtant la même surface des distances moyennes.

7. Si la considération des courbures moyennes mérite quelqu'attention, c'est surtout à cause du jour qu'elle doit répandre sur les questions où la courbure des surfaces joue le rôle d'une quantité dynamique. Peut-être même seroit il impossible de se rendre un compte satisfaisant d'une question de ce genre, embrassée dans toute sa généralité, si on ne connoissoit ni la loi de la repartition de la courbure autour d'un point donné, ni l'existence des courbures moyennes, qui se lie à celle de cette loi.

Déjà (§. 2. No. 5.) nous avons eu occasion de faire remarquer un accord frappant entre la composition des forces et la manière dont la courbure est répartie; ce qu'on vient de dire touchant la courbure moyenne rend cet accord plus frappant encore.

Ainsi, si les forces qui agissent sur un des points de la surface sont proportionnelles à sa courbure, elles sont reparties dans tout le contour de ce point; car la courbure elle même est distribuée dans le contour entier. Le nombre de ces forces est infini, chacune d'elles est infiniment petite, et elle est proportionnelle à la ligne de distance contenue dans le plan de sa direction.

Quand on cherche à se représenter l'action des forces dues à la courbure, la considération des surfaces des distances convient parfaitement. Et, en effet, les surfaces des distances sont terminées, d'une part au plan tangent et de l'autre à la surface donnée, sur laquelle elles s'appuyent dans tous les points de leurs directrices. Si on conçoit que ces surfaces, devenues solides, continuent à être interposées entre la surface donnée et son plan tangent, elles pourront être regardées comme l'obstacle qui empèche les points des directrices, c'est-à-dire, les points qui environnent celui de tangence, de s'approcher de ce plan. Les différens points dont se composent les surfaces des distances, ainsi interposées, étant doués de forces égales, l'étendue de ces surfaces représentera fidèlement les forces dues à la distance entre les directrices et le plan tangent, c'est-à-dire qu'elle représentera l'action des forces nées de la courbure de la surface donnée. Et par ce que la surface des distances moyennes a la même étendue que la surface des distances qui dépend de la figure de la surface donnée, on en conclura que l'action des forces nées de la courbure seroit encore la même, si la figure étoit sphérique.

Lorsque, au lieu de considérer à la fois le nombre infini des forces qui agissent autour d'un des points de la surface, on se borne à cher-

cher les résultantes de ces forces, on trouve qu'elles sont proportionnelles aux lignes des distances contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux.

L'action exercée devant être indépendante de la manière dont les forces qui l'exercent sont reparties autour du point donné, quelles que soient les différences entre les lignes de distances qui représentent les résultantes de ces forces, l'action sera toujours égale à celle qui seroit due à une repartition uniforme des mêmes forces.

Dans cette manière d'envisager les choses, nous nous trouvons ramenés à ce que nous savons déjà sur l'accord entre le principe de la composition des forces et la loi de répartition de la courbure autour d'un point donné. Il est clair que les lignes de distances auxquelles les composantes des forces sont proportionnelles représentent maintenant, non plus des quantités infiniment petites, comme lorsqu'on considéroit à la fois chacune des forces qui agissent autour du point donné, mais des quantités finies résultantes de la somme de celles-ci, qui sont en nombre infini.

Dans la démonstration rapportée (§. 1. No. 1.), faute d'avoir encore suffisamment refléchi sur cette matière, les deux points de vue qu'on vient d'expliquer avoient été confondus; ainsi, en prenant l'ensemble de toutes les courbures contenues dans les plans normaux, on embrassoit la totalité des forces infiniment petites reparties autour du point donné, tandis que la somme des courbures principales représentoit celle des composantes des mêmes forces. Au reste, quelle que soit la manière dont on veut envisager ces forcs, il est également nécessaire de distinguer l'idée de la figure de celle de la quantité de courbure qui appartient à la surface.

Ainsi, en embrassant l'ensemble des forces, on trouve que la courbure uniforme de la sphère de courbure moyenne équivaut à toute autre disposition dans laquelle la condition de l'uniformité ne seroit plus observée.

Si, conformément au principe de la composition des forces, on prend pour mesure de celles qui agissent sur un des points de la surface la somme des lignes de distances contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux, et qu'on veuille cependant ne pas distinguer la figure de la quantité de courbure, repartie autour du point choisi sur la surface: alors, en admettant qu'il y ait des forces proportionnelles à la courbure, on est conduit à dire, chose absurde, que la figure d'une sur-

face se réduit à deux courbes linéaires et que ces courbes peuvent être remplacées par une infinité d'autres courbes de figures différentes.

Il est évident que la considération des surfaces des distances et celle de leurs développemens dérivent de la comparaison entre la courbure de la surface donnée et celle d'une certaine sphère. Nous dirons donc que, s'il est certain, dans le sens du passage d'Euler rapporté §. 1. No. 1., qu'„on ne sauroit même comparer la courbure des surfaces avec celle d'une sphère," il ne l'est pas moins, dans le sens qui a été expliqué, que l'idée complète de la manière dont la courbure est distribuée autour du point donné, aussi bien que la connoissance de la distance moyenne entre les points de la surface qui environnent le point de tangence et le plan tangent, résulte de la comparaison de la courbure de la surface à celle de la sphère de moyenne courbure.

Je m'étonnois qu'on n'eût pas encore cherché à tirer parti de la comparaison entre la courbure uniforme de la sphère et celle qui présente toute autre figure de la surface, lorsque j'ai eu connoissance d'un mémoire publié récemment par Mr. Gaufs, dans lequel, embrassant cette comparaison sous un point de vue purement géométrique, l'illustre auteur compare les courbes tracées sur les superficies courbes à celles qui seroient menées sur la surface de la sphère. Je n'ai pu faire qu'une lecture rapide de ce travail. Je le regrette d'autant plus que, malgré l'extrême différence entre l'idée première de Mr. Gaufs et celle qui a amené les recherches qu'on vient de lire, il m'a paru, que des résultats semblables à ceux que j'ai obtenu pouvoient, dans certains cas, être tirés des formules de l'auteur, et qu'assurement un pareil accord, si j'étois à même d'en établir la réalité, seroit une puissante recommendation en faveur de mes propres recherches.

8. La considération des courbures moyennes est nécessairement applicable à toutes les questions où la courbure des surfaces joue le rôle d'une puissance; mais le but, que nous nous sommes proposé n'est pas de traiter ces questions; nous nous bornerons donc, à l'égard des applications, à un petit nombre de remarques.

L'équation des surfaces élastiques ayant été l'occasion de nos recherches, il est à propos de faire observer d'abord que, pour justifier l'hypothèse qui a servi à trouver, la première fois, l'équation de ces surfaces,

il suffiroit de répéter les diverses propositions qui ont été démontrées, en y joignant la désignation de ce genre de surfaces.

La simplicité de description et le petit nombre des figures différentes de la surface qui peuvent convenir à la construction des voûtes ont sans doute masqué aux yeux des géomètres, qui se sont occupés de cette matière, la nécessité de savoir exprimer d'une manière générale les résistences nées de la courbure des surfaces. La notion des courbures moyennes ne sauroit cependant demeurer étrangère à de telles recherches. Supposons, par exemple, qu'on veuille comparer les voûtes en dômes aux voûtes en berceaux: ne sera-til pas de la plus grande utilité de savoir aussi comparer les deux genres de courbures employées?

Nous terminerons ces reflexions en présentant l'exemple de deux surfaces de figures différentes qui possédent, en même tems qu'une étendue égale, la même courbure moyenne dans tous leurs points.

Les deux surfaces dont nous voulons parler sont celle du cylindre circonscrit et la quatrième partie de la surface sphérique décrite du rayon double de celui de la sphère inscrite. Ces deux surfaces sont d'une étendue égale; puisque le cylindre et la sphère inscrite sont égaux en surface, et que celle des sphères est en raison du quarré de leurs rayons. De plus, ces mêmes surfaces ont dans tous leurs points la même courbure moyenne: car, d'après ce qui précède, la sphère dont le rayon est double de celui de la base de la surface cylindrique n'est autre chose que la sphère de moyenne courbure de cette surface.

§. 4.

Examen du cas où les deux rayons de courbures principales ne sont pas dirigés du même côté.

1. La surface sphérique, d'une part, et, de l'autre, la surface dont les rayons de principales courbures sont égaux mais de signes opposés, comprennent entr'elles toutes les figures possibles de la surface courbe.

Dans ce qui prècède, on s'est uniquement occupé du cas où les deux rayons de courbures principales sont dirigés du même coté; et, pour plus de simplicité, on a supposé que, quel que soit le changement des figures, la somme des courbures principales, représentée ici par celle des lignes de principales distances, est toujours la même.

Après avoir également supposé, à l'égard des surfaces dont les rayons de principales courbures sont dirigés dans des sens opposés, que, abstraction faite du signe, la somme des lignes de principales distances demeure toujours la même, nous examinerons ce qui deviennent alors et la surface des distances moyennes et la loi de répartition de la courbure autour d'un point choisi sur la surface.

Il faut d'abord se rappeler qu'AC est le développement des bases des deux surfaces des distances; que ces bases sont contenus dans le plan tangent; et que, par conséquent, AC représente la position de ce plan.

Cela posé, on verra aisément que, pour toutes les figures de la surface comprises entre la forme cylindrique et celle de la surface dont les rayons de courbures principales, et, par conséquent, aussi les lignes de distances principales sont égaux et de signes contraires, les angles en q et q', h et h' demeurent les mêmes (Fig. 2. 3. et 4.).

La valeur de ces angles dépend, en effet, uniquement et de l'intervalle pq, invariable, puisque, par construction, il est, dans tous les cas possibles, la quatrième partie de AC, et de la somme des deux lignes pq, gh, qui, ainsi qu'on vient de le dire, est également invariable.

Lorsque les deux rayons de courbures principales sont dirigés en sens opposé, la ligne brisée $Bqha$, et dès-lors aussi la directrice de la surface des distances, dont cette ligne est le développement, est donc indépendante du rapport entre les deux rayons de courbures, et, par conséquent, elle est, dans tous les cas, celle qui convient à la surface cylindrique (Fig. 2.), limite commune entre ce genre de surfaces et celles dont les rayons de courbures sont dirigés du même côté. Les différences entre ces diverses surfaces consistent seulement en ce que des parties plus ou moins grandes de la directrice se trouvent placées au dessus du plan tangent.

On se représentera les conséquences de la transformation par laquelle la surface passeroit de la forme cylindrique à celle où les rayons de principales courbures sont égaux mais de signes contraires, si on conçoit que la ligne AC (Fig. 2.) se meuve parallèlement à elle même, en se rapprochant graduellement de BD (Fig. 3.), jusqu'à ce que ces deux lignes se confondent (Fig. 4.). En effet, durant ce mouvement, la ligne pq de principale distance située au dessus du plan tangent, ligne qui étoit nulle à l'égard de la surface cylindrique, augmentera par degrés, en

même tems que gh diminuera de quantités égales, jusqu'à ce qu'enfin ces deux lignes, terminées aux côtés opposés de AC, deviennent égales.

En passant de la surface sphérique à la surface cylindrique par le nombre infini des configurations qui les séparent, la ligne brisée Bqh etc., et, par conséquent, aussi la directrice de la surface des distances, dont cette ligne est le développement, change de forme autant de fois; mais au milieu de tous ces changemens, la surface des moyennes distances n'en subit aucun.

Ces changemens, d'une part, et cette invariabilité, de l'autre, résultent de ce que nous avons dit touchant le nombre infini des figures de la surface auxquelles appartient une même courbure moyenne, ou, en d'autres termes, une même quantité dynamique de courbure.

Le contraire arrive quand on passe de la surface cylindrique à celle dont les rayons de courbures principales sont égaux, mais de signes contraires. La directrice de la surface des distances conserve la même forme; mais une partie de cette courbe passe de l'autre côté du plan tangent, et, par conséquent, la surface des distances moyennes diminue graduellement, jusqu'à ce qu'elle l'anéantisse, lorsque les lignes de distances terminées à une des faces du plan tangent sont égales aux lignes de distances terminées à l'autre face du même plan.

On conçoit, en effet, que, ne pouvant attribuer à une force deux directions contraires, celle qui résulte de la courbure ne peut présentément dépendre que de la différence entre les courbures principales, et que, par conséquent, la surface des distances moyennes, qui ne cesse pas de représenter la quantité dynamique de la courbure, doit s'anéantir lorsque les deux courbures dirigées en sens contraires sont égales. Il nous reste à montrer que, malgré les différences qu'entraîne le changement de direction d'un des rayons de courbures principales, la loi de distribution de la courbure autour d'un des points de la surface ne souffre aucune altération: qu'ainsi il est encore vrai que la somme des lignes de distances contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux est indépendante du choix de ces plans: que la ligne de distance contenue dans les plans moyens est moyenne entre les lignes de distances principales: enfin que, en embrassant le contour entier du point donné, il y a, en général, quatre directions du plan normal pour lesquelles les

lignes de distances sont égales, et que le nombre de ces directions se réduit à deux à l'égard des lignes de principales distances.

Il suffit, en effet, pour étendre ces diverses propositions au cas présent, d'observer que, l'augmentation des lignes de distances situées au dessus de AC étant considérée, à raison du signe, comme une diminution, les diverses lignes de distances dont la comparaison sert à établir, dans le cas des surfaces cylindriques, les propositions dont il s'agit, éprouvent à la fois des diminutions proportionnelles; en sorte que, leur grandeur relative ne changeant pas, les mêmes raisonnemens subsistent. A l'égard de la surface cylindrique, on peut remarquer (Fig. 2.) que deux points seulement du développement de la directrice de la surface de distances, savoir q et q', tombant sur AC, une des courbures principales est nulle. Quand les deux rayons de courbures principales sont de signes opposées (Fig. 3.), quatre points du développement de la directrice, savoir v et t, v' et t', tombant sur AC, ni l'une ni l'autre des courbures principales ne sont nulles; mais, de même qu'à l'égard des surfaces cylindriques, la sphère dont le rayon est infini est au nombre de celles qui ont leur centre sur la normale au point donné.

Dans le cas où les deux rayons de courbures principales sont égaux et de signes contraires, (Fig. 4.) les points en v et u, v' et u' se confondent avec ceux en B, n, et n', n'', lesquels partagent BD en quatre parties égales. La sphère dont le rayon est infini est donc alors celle de moyenne courbure, et cette sphère se confond avec le plan tangent.

2.

Auflösung einiger arithmetischen und geometrischen Aufgaben.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Über eine arithmetische Aufgabe.

In den Annalen der Mathematik von Gergonne findet man folgende Aufgabe: Die möglichst kleinste Anzahl Gewichte und ihre Gröfse anzugeben, wodurch man alle Einheiten bis zu einer gegebenen Grenze wägen könne; vorausgesetzt, dafs man sie auf beiden Seiten der Wage setzen dürfe, und also nicht allein durch ihre Summe, sondern auch durch ihre Unterschiede wägen könne. Die dort von Mehrern gegebene Auflösung hat den Herausgeber nicht ganz befriedigt, indem über die Form der Reihe, die die Gröfsen der Gewichte bildet, eine willkürliche Voraussetzung gemacht ist. Ich gebe daher die nachstehende Auflösung, die allgemein sein dürfte.

Es sei i die kleinste Anzahl Gewichte, womit man bis n alle Einheiten wägen könne, und hinwiederum n die gröfste Zahl der continuirlichen Reihe, die mit i Gewichten gewogen werden kann. Es ist leicht zu sehen, dafs n nicht gröfser sein kann, als die Hälfte aller möglichen Combinationen, die man mit den Gewichten auf beiden Schalen machen kann, indem alle Fälle, worin die gröfste Summe der Gewichte in der Schale des zu wägenden Gegenstandes kommen (nemlich eben so viele als der Fälle der umgekehrten Art sind), wegfallen.

Um diese Anzahl zu bestimmen, nenne ich die beiden Schalen A und B. Die Anzahl der Combinationen in B, wenn in A kein Gewicht ist, ist die Summe der Anzahl der Gewichte, der Anzahl der Amben, der Anzahl der Ternen u. s. w. derselben

$$= 1 + i + \frac{i.i-1}{1.2} + \frac{i.i-1.i-2}{1.2.3} + \ldots = 2^i,$$

wenn man den Fall, wenn in B kein Gewicht ist, einschliefst. Die Anzahl der Combinationen der $i-1$ Gewichte in B, wenn in A eines der-

selben ist, ist auf dieselbe Art 2^{i-1}, welches mit der Anzahl der Combinationen eines Gewichts in $A = i$ multiplicirt

$$i \cdot 2^{i-1} \text{ giebt.}$$

Die Anzahl der Combinationen der $i-2$ Gewichte in B, wenn in A zwei sind, ist 2^{i-2}, welches mit der Anzahl der Combinationen zu zwei und zwei in A, $= \frac{i \cdot i-1}{1 \cdot 2}$ multiplicirt

$$\frac{i \cdot i-1}{1 \cdot 2} 2^{i-2} \text{ giebt,}$$

u. s. w.

Die sämmtliche Anzahl aller Combinationen ist demnach:

$$2^i + i\,2^{i-1} + \frac{i \cdot i-1}{1 \cdot 2} 2^{i-2} + \frac{i \cdot i-1 \cdot i-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{i-3} + \ldots = 3^i,$$

worin das Gewicht 0 mitbegriffen ist. Die Hälfte der übrigen $3^i - 1$ ist also die gröfste mögliche Anzahl verschiedener Gewichts-Einheiten, die mit i Gewichten gewogen werden können.

Sind demnach die Gröfsen der einzelnen Gewichte so bestimmt, dafs die Combinationen derselben alle Einheiten bis $\frac{3^i-1}{2}$ enthalten, so ist, da sie nicht mehr Combinationen enthalten können, die Aufgabe gelöst.

Hat man aber eine Anzahl $= i$ Gewichte, die die genannte Bedingung erfüllen, so ist das $i+1$te Gewicht, wodurch man die darauf folgende Einheit wägen kann (indem man es so grofs als möglich nimmt) 3^i, und zwar kann man, wenn man alle Combinationen der i Gewichte in den Schalen verwechselt, und dieses hinzufügt, alle Einheiten bis 3^i; und wenn man es ferner den einzelnen Einheiten gradezu hinzufügt, bis $3^i + \frac{3^i-1}{2} = \frac{3^{i+1}-1}{2}$ alle Einheiten wägen. Oder, wenn die genannte Bedingung für die Zahl i, so ist sie auch durch Hinzufügung des $i+1$ten Gewichts $= 3^i$ für $i+1$ erfüllt. Sie ist es aber für $i = 1$ und $i = 2$, folglich allgemein für jede Anzahl; und die Gewichte sind 1, 3, 9, 27, ... etc.

Beweis des verallgemeinerten Lehrsatzes des Hrn. Steiner im zweiten Bande dieses Journals p. 290. Nr. 61.

Die Substitution, die zur Auflösung der vierten Aufgabe p. 96. im 2ten Bande dient *), läfst sich sogleich zum Beweise dieses Lehrsatzes an-

*) Siehe Band 6. Heft 1. Seite 88.

wenden. Es drehe sich nemlich der Kegelschnitt und der aus dem Brennpuncte desselben beschriebene Kreis um die Absidenlinie, und man nehme an, dafs der Mittelpunct aller Kugeln, die sich gegenseitig, und die durch die Umdrehung des genannten Kreises entstehende Kugel berühren, ihre Mittelpuncte in der krummen Oberfläche haben. Es seien die Winkel der vom Brennpuncte bis an die Mittelpuncte zweier sich gegenseitig und die erstgenannte Kugel berührende Kugeln gezogene Linien r und r' mit der Absidenlinie φ und φ', und es bilden die durch jede dieser Linien und die Absidenlinie gelegten Ebenen mit einer ähnlichen festen Ebene die Winkel ψ und ψ', so ist der Cosinus des Winkels zwischen r und r' .... $\cos(\psi'-\psi)\sin\varphi\sin\varphi'+\cos\varphi\cos\varphi'$, und $r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$, $r'=\frac{p}{1+e\cos\varphi'}$, und die Halbmesser der beiden Kugeln $\frac{p}{1+e\cos\varphi}-\varrho$, $\frac{p}{1+e\cos\varphi'}-\varrho$, mithin die dritte Seite des Dreiecks $\frac{p}{1+e\cos\varphi}+\frac{p}{1+e\cos\varphi'}-2\varrho$. Man erhält also statt der am angeführten Orte gefundenen Gleichung in diesem Falle

$$0=(pp-4\varrho p+2\varrho\varrho)+2e\varrho(\varrho-p)(\cos\varphi'+\cos\varphi)+(pp+2ee\varrho\varrho)\cos\varphi\cos\varphi' + pp\cos(\psi'-\psi)\sin\varphi\sin\varphi',$$

und nach Substitution der Relationen zwischen φ und θ:

$$\cos(\psi'-\psi)\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'=\frac{2ee\varrho\varrho-2\varrho\varrho+4\varrho p-pp}{pp}.$$

Dieser Ausdruck entspricht dem Cosinus eines Bogens auf der Sphäre zwischen zweien Puncten, deren Entfernungen von einem Pol θ und θ', wo der Winkel zwischen den nach dem Pole gezogenen Bogen $\psi'-\psi$ ist. Man sieht nun leicht: dafs wenn dieser Winkel dem Winkel zwischen den Ecken eines regulairen Körpers, aus dem Mittelpunct der umschriebenen Kugel gemessen, gleich ist, dafs dann um die obenerwähnte Kugel eben so viele andere Kugeln, die sich gegenseitig berühren, und deren Mittelpuncte auf der krummen Fläche liegen, als dieser Körper Ecken hat, gelegt werden können; und zweitens, dafs der Ort der erst zu legenden Kugel willkürlich ist.

Der von Herrn Steiner angeführte specielle Fall ist der eines Octaëders, wo also der Winkel zwischen 2 Ecken ein rechter ist, mithin der obige Ausdruck $=0$; woraus sehr leicht die von Hrn. Steiner gegebene Gleichung folgt, wenn statt e und p die von ihm zum Grunde gelegten Gröfsen substituirt werden.

Beweis des von Herrn Steiner im zweiten Bande dieses Journals p. 291. gegebenen Lehrsatzes Nr. 63.

Es seien im Raume die Schwerpuncte von n Massen (deren jede $=1$) $P_{(1)}$, $P_{(2)}$, $P_{(3)}$, ... $P_{(n)}$. Bestimmt man nun den Schwerpunct $M_{(2)}$ der ersten zwei, ferner den Schwerpunct $M_{(3)}$ von diesen und $P_{(3)}$ u. s. w., so ist $M_{(n)}$ der Schwerpunct des ganzen Systems, mithin von der Ordnung, in der man die Puncte genommen hat, gänzlich unabhängig.

Es sei nun (Taf. II. Fig. 1.) $a_{(i)}$ die Entfernung des Puncts $P_{(i)}$ von G, einem beliebigen Puncte im Raume; $x_{(i)}$ die Entfernung des Puncts $M_{(i)}$ von G, und die Linie $M_{(i-1)}P_{(i)} = A_{(i)}$, so ist

$$M_{(i-1)}M_{(i)} = \frac{1}{i} A_{(i)},$$

$$M_{(i)} P_{(i)} = \frac{i-1}{i} A_{(i)};$$

und wenn man den Winkel $GM_{(i)}M_{(i-1)} = \theta$ setzt:

$$x^2_{(i-1)} = x^2_{(i)} + \frac{1}{ii} A^2_{(i)} - \frac{2}{i} x_{(i)} A_{(i)} \cos\theta,$$

$$a^2_{(i)} = x^2_{(i)} + \frac{(i-1)^2}{ii} A^2_{(i)} + \frac{2(i-1)}{i} x_{(i)} A_{(i)} \cos\theta,$$

woraus nach Elimination von θ folgt:

$$(i-1)\, x^2_{(i-1)} = i\, x^2_{(i)} - a^2_{(i)} + \frac{i-1}{i} A^2_{(i)}.$$

Man hat also, wenn man bemerkt, dafs $x_{(1)} = a_{(1)}$:

$$\begin{aligned}
a^2_{(1)} &= 2\, x^2_{(2)} - a^2_{(2)} + \tfrac{1}{2} A^2_{(2)}, \\
2\, x^2_{(2)} &= 3\, x^2_{(3)} - a^2_{(3)} + \tfrac{2}{3} A^2_{(3)}, \\
3\, x^2_{(3)} &= 4\, x^2_{(4)} - a^2_{(4)} + \tfrac{3}{4} A^2_{(4)}, \\
&\vdots \\
(n-1)\, x^2_{(n-1)} &= n\, x^2_{(n)} - a^2_{(n)} + \frac{n-1}{n} A^2_{(n)},
\end{aligned}$$

durch deren Addition man erhält:

$$a^2_{(1)} + a^2_{(2)} + a^2_{(3)} + \ldots + a^2_{(n)} = n\, x^2_{(n)} + \tfrac{1}{2} A^2_{(2)} + \tfrac{2}{3} A^2_{(3)} + \ldots + \frac{n-1}{n} A^2_{(n)}.$$

Nach Lagrange *Mecanique anal. T. I. p.* 64. ist aber, wenn man R die Summe der Quadrate der gegenseitigen Entfernung je zweier der Puncte $P_{(1)}$, $P_{(2)}$, ... $P_{(n)}$ nennt:

$$\frac{a^2_{(1)} + a^2_{(2)} + a^2_{(3)} + \ldots + a^2_{(n)}}{n} - \frac{R}{nn} = x^2_{(n)},$$

folglich:

$$\frac{R}{n} = \tfrac{1}{2} A_{(2)}^2 + \tfrac{2}{3} A_{(3)}^2 + \ldots + \frac{n-1}{n} A_{(n)}^2,$$

und da das erste Glied dieser Gleichung von der Ordnung, in der man die Puncte nimmt, unabhängig ist, so ist es gleichfalls das zweite.

Beweis des Lehrsatzes des Herrn Steiner Nr. 62. im zweiten Bande dieses Journals p. 291.

Es seien (1), (2), (3) drei Puncte auf der Kugelfläche, die gegenseitig 90^0 von einander entfernt sind, so ist:

$\cos AP = \cos(1)A.\cos(1)P + \cos(2)A.\cos(2)P + \cos(3)A.\cos(3)P,$

$\cos BP = \cos(1)B.\cos(1)P + \cos(2)B.\cos(2)P + \cos(3)B.\cos(3)P,$ etc.

(siehe Gaufs *Disquisitiones gen. circa superficies curvas*), folglich, wenn man

$$a.\cos(1)A + b.\cos(1)B + c.\cos(1)C + \ldots = \alpha,$$
$$a.\cos(2)A + b.\cos(2)B + c.\cos(2)C + \ldots = \beta,$$
$$a.\cos(3)A + b.\cos(3)B + c.\cos(3)C + \ldots = \gamma$$

setzt:

$$a\cos AP + b\cos BP + c\cos CP + \ldots$$
$$= k = \alpha\cos(1)P + b\cos(2)P + \gamma\cos(3)P;$$

und wenn man ferner einen Punct so bestimmt, dafs

$$\alpha = \varkappa.\cos(1)P',$$
$$\beta = \varkappa.\cos(2)P',$$
$$\gamma = \varkappa.\cos(3)P',$$

wodurch $\varkappa\varkappa = aa + bb + \gamma\gamma$ wird, so folgt:

$$\frac{K}{\varkappa} = \cos PP',$$

mithin die Entfernung des Puncts P von P' constant, und P' von K unabhängig.

Beweis des veralligemeinerten Lehrsatzes von Herrn Steiner Nr. 59. im zweiten Bande dieses Journals p. 289.

Statt des oben (siehe Seite 31.) bei dem Beweise des 61sten Lehrsatzes betrachteten Falles kann man die Frage stellen, welche Relationen zwischen den Dimensionen des Kegelschnitts und des Kreises Statt finden müssen, wenn eine Kugel, deren Mittelpunct auf der krummen Oberfläche

liegt, die aus dem Brennpuncte des Kegelschnitts beschriebene Kugel berühren, und eine Reihe n Kugeln, deren Mittelpuncte ebenfalls auf der krummen Oberfläche liegen, jede die ebengenannten zwei Kugeln, und die vorhergehende und nachfolgende der Reihe berührt.

Aus der a. a. O. angestellten Betrachtung folgt, dafs dieses dann möglich ist, wenn der dort durch den Cosinus gegebene Bogen der Seite eines regulairen sphärischen n Ecks gleich ist, dessen Mittelpunct von den Ecken so weit entfernt ist als die Gröfse der Seiten. Nennt man die Seiten und die aus dem Mittelpuncte nach den Ecken gezogenen Bogen x, so ist, weil die Winkel am Mittelpuncte $\frac{2\pi}{n}$ sind:

$$\cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin x^2 + \cos x^2,$$

und also

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\cos x}{1+\cos x};$$

und wenn man den a. a. O. gegebenen Werth von $\cos x$ substituirt,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2ee\varrho\varrho - 2\varrho\varrho + 4\varrho p - pp}{2ee\varrho\varrho - 2\varrho\varrho + 4\varrho p}.$$

Es erhellet von selbst, dafs der Punct, wo die erste Kugel gelegt wird, willkürlich ist.

In dem von Herrn **Steiner** angeführten speciellen Fall ist $e = 1$, und folglich:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{4\varrho - p}{4\varrho}.$$

Die von Herrn **Steiner** genannte Gröfse h ist $= p - \varrho$, folglich:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{3\varrho - h}{4\varrho},$$

welches sogleich die Relationen des Herrn **Steiner** giebt.

3.

Beweis einiger geometrischen Sätze.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

---

1. Es seien die Coordinaten dreier Puncte M_0, M_1, M_2, in einer Ebene $x, y;\ x', y';\ x'', y''$; bestimmt man nun 6 andere Puncte A_0, A_1, A_2 und J_0, J_1, J_2, deren Coordinaten resp. ξ_0, ξ_1, ξ_2, ${}_0\xi$, ${}_1\xi$, ${}_2\xi$, und υ_0, υ_1, υ_2, ${}_0\upsilon$, ${}_1\upsilon$, ${}_2\upsilon$, sind, wo

$$\xi_0 = \frac{\alpha' x' - \alpha'' x''}{\alpha' - \alpha''}; \qquad \upsilon_0 = \frac{\alpha' y' - \alpha'' y''}{\alpha' - \alpha''};$$

$$\xi_1 = \frac{\alpha'' x'' - \alpha x}{\alpha'' - \alpha}; \qquad \upsilon_1 = \frac{\alpha'' y'' - \alpha y}{\alpha'' - \alpha};$$

$$\xi_2 = \frac{\alpha x - \alpha' x'}{\alpha - \alpha'}; \qquad \upsilon_2 = \frac{\alpha y - \alpha' y'}{\alpha - \alpha'};$$

$${}_0\xi = \frac{\alpha' x' + \alpha'' x''}{\alpha' + \alpha''}; \qquad {}_0\upsilon = \frac{\alpha' y' + \alpha'' y''}{\alpha' + \alpha''};$$

$${}_1\xi = \frac{\alpha'' x'' + \alpha x}{\alpha'' + \alpha}; \qquad {}_1\upsilon = \frac{\alpha'' y'' + \alpha y}{\alpha'' + \alpha};$$

$${}_2\xi = \frac{\alpha x + \alpha' x'}{\alpha + \alpha'}; \qquad {}_2\upsilon = \frac{\alpha y + \alpha' y'}{\alpha + \alpha'};$$

so finden zwischen diesen 9 Puncten folgende Relationen Statt.

2. Je drei derselben liegen folgendermafsen in einer Geraden:

$$A_0,\ A_1,\ A_2;$$
$$A_0,\ J_1,\ J_2;$$
$$J_0,\ A_1,\ J_2;$$
$$J_0,\ J_1,\ A_2;$$

denn es seien die Coordinaten dreier in einer Geraden liegenden Puncte ξ, ξ', ξ'' und $\upsilon, \upsilon', \upsilon''$, und die allgemeine Gleichung für dieselbe

$$a x + b y + c = 0;$$

so hat man:

$$a\xi + b\upsilon + c = 0,$$
$$a\xi' + b\upsilon' + c = 0,$$
$$a\xi'' + b\upsilon'' + c = 0.$$

Eliminirt man hieraus die die Lage der Linie bestimmenden Constanten, indem man sie resp. mit den Factoren m, m', m'' multiplicirt und die Producte addirt, so findet man folgende Bedingungen für die Coordinaten

dreier in einer Geraden liegenden Puncte:

$$m\xi + m'\xi' + m''\xi'' = 0,$$
$$m\upsilon + m'\upsilon' + m''\upsilon'' = 0,$$
$$m + m' + m'' = 0,$$

Diese Bedingungen sind offenbar hinsichtlich der drei Puncte A_0, A_1, A_2 erfüllt, wenn man m, m', m'' resp. $\alpha' - \alpha''$, $\alpha'' - \alpha$, $\alpha - \alpha''$ setzt; und eben so für die drei übrigen mal drei Puncte, indem blos $-\alpha$ statt $+\alpha$ für die ersten drei folgenden, denn $-\alpha'$ statt $+\alpha'$, und $-\alpha''$ statt $+\alpha''$ für die letzten gesetzt wird.

3. Nachstehende zu drei und drei nebeneinanderstehende Linien schneiden sich in einem Puncte:

$$M_0 J_0, \quad M_1 J_1, \quad M_2 J_2;$$
$$M_0 J_0, \quad M_1 A_1, \quad M_2 A_2;$$
$$M_0 A_0, \quad M_1 J_1, \quad M_2 A_2;$$
$$M_0 A_0, \quad M_1 A_1, \quad M_2 J_2;$$

denn es seien von irgend einer Linie zwei Puncte gegeben, deren Coordinaten resp. ξ, ξ' und υ, υ' sind, so kann man die Coordinaten jedes Punctes derselben durch

$$p\xi + (1-p)\xi'; \quad p\upsilon + (1-p)\upsilon'$$

darstellen, wo p veränderlich ist. Die Coordinaten der Linien $M_0 J_0$, $M_1 J_1$, $M_2 J_2$ können also so dargestellt werden:

$$p_0 x + (1-p_0)\,{}_0\xi; \quad p_0 y + (1-p_0)\,{}_0\upsilon;$$
$$p_1 x' + (1-p_1)\,{}_1\xi; \quad p_1 y' + (1-p_1)\,{}_1\upsilon;$$
$$p_2 x'' + (1-p_2)\,{}_2\xi; \quad p_2 y'' + (1-p_2)\,{}_2\upsilon;$$

giebt es nun für p_0, p_1, p_2 solche Werthe, dafs die resp. Coordinaten für alle drei Puncte gleich sind, so schneiden sie sich offenbar in diesem Puncte. Setzt man aber:

$$p_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\alpha'+\alpha''}; \quad p_1 = \frac{\alpha'}{\alpha+\alpha'+\alpha''}; \quad p_2 = \frac{\alpha''}{\alpha+\alpha'+\alpha''};$$

und substituirt in obige Coordinaten statt ${}_0\xi$, ${}_1\xi$, ${}_2\xi$ ihre Werthe, so folgen für alle drei Puncte die gleichen Coordinaten:

$$\frac{\alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x''}{\alpha+\alpha'+\alpha''} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha y + \alpha' y' + \alpha'' y''}{\alpha+\alpha'+\alpha''},$$

was zu beweisen war. Setzt man nun statt α, $-\alpha$, so ergiebt sich der Beweis, dafs die Linien $M_0 J_0$, $M_1 A_1$, $M_2 A_2$ sich ebenfalls in einem Puncte schneiden, und durch Verwechselung von $+\alpha'$ und $-\alpha'$, und $+\alpha''$ und $-\alpha''$ für die zwei übrigen mal drei Linien.

4. Nimmt man an, dafs auf die drei Puncte der wagerechten Ebene M_0, M_1, M_2 die resp. Kräfte $+\alpha$ und $-\alpha$; $+\alpha'$ und $-\alpha'$; $+\alpha''$ und $-\alpha''$ senkrecht wirken, so ist die Ebene offenbar im Gleichgewicht. Sieht man nun jede verlängerte Seite des Dreiecks M_0, M_1, M_2 als einen Hebel an, auf den in jedem der zwei sie bestimmenden Puncte eine der in denselben angebrachten Kräfte wirkt, dann sind die 6 oben bestimmten Puncte offenbar alle Stützpuncte dieser verschiedenen Hebel. Diese Betrachtung giebt ein Mittel die obigen Sätze aus den Grundsätzen der Statik abzuleiten.

Verbindet man nemlich $+\alpha'$ und $-\alpha''$; $+\alpha''$ und $-\alpha$; $+\alpha$ und $-\alpha'$, so sind die drei Stützpuncte auf die man die resp. Summen der Kräfte als wirkend ansehen kann A_0, A_1, A_2. Da aber die Ebene durch diese 6 Kräfte im Gleichgewicht ist, so mufs jede dieser drei Puncte zu den zwei übrigen der Stützpunct sein, und also mit ihnen in gerader Linie liegen. Man sieht leicht, wie man die Kräfte vertheilen mufs, um den Beweis für die drei übrigen mal drei Puncte zu führen.

5. Es wirken auf die drei Puncte die resp. Kräfte $+\alpha$, $+\alpha'$, $+\alpha''$. Man kann nun die beiden Kräfte α' und α'' als in ihrem Stützpuncte J_0 angebracht ansehen. Der Stützpunct für alle drei Kräfte liegt also in der Linie M_0J_0. Eben so findet man, dafs er in den Linien M_1J_1 und M_2J_2 liege. Diese drei Linien müssen sich also in einem Puncte schneiden. Ist in dem Punct M_0 statt $+\alpha$ die Kraft $-\alpha$ angebracht, so findet man, dafs der Stützpunct der drei Kräfte auf den Linien M_0J_0, M_1A_1, M_2A_2 liege, die sich also auch in einem Puncte schneiden. Eben so ergiebt sich der Beweis für die beiden übrigen mal drei Linien.

6. Beschreibt man aus den Puncten M_0, M_1, M_2 mit den resp. Halbmessern $\frac{k}{\alpha}$, $\frac{k}{\alpha'}$, $\frac{k}{\alpha''}$ drei Kreise, wo k eine willkürliche Gröfse bedeutet, so sind die benannten 6 Puncte die Durchschnitte der durch die Endpuncte paralleler Radien je zweier dieser Kreise gezogenen Geraden; oder nach Hrn. Steiner's Benennung (Gegenw. Journal Bd. I. p. 172.) die Ähnlichkeitspuncte derselben. Diese haben also die in 2. und 3. bewiesenen Relationen, von denen Hr. Steiner jene aus seinen sinnreichen geometrischen Betrachtungen abgeleitet hat.

7. Setzt man $\alpha = \alpha' = \alpha''$, so sind die Puncte J_0, J_1, J_2 die Mitten der Seiten des Dreiecks. Zieht man also von diesen Puncten aus

nach den gegenüberstehenden Spitzen Geraden, so schneiden sich diese nach 3 in einem Puncte.

8. Sind die Winkel des Dreiecks $M_0M_1M_2$, φ, φ', φ'' und setzt man:

$$\alpha = \sin\varphi, \quad \alpha' = \sin\varphi', \quad \alpha'' = \sin\varphi'',$$

so sind die 6 Puncte, wie leicht zu sehen ist, die Durchschnitte der die innern und äufsern Winkel des Dreiecks halbirenden Geraden mit den gegenüberstehenden Seiten. Für diese gelten also auch die in 2. und 3. bewiesenen Relationen. (S. Gegenw. Journal Bd. II. p. 191. Lehrsatz 33. No. 2.)

9. Setzt man:

$$\alpha = \operatorname{tang}\varphi, \quad \alpha' = \operatorname{tang}\varphi', \quad \alpha'' = \operatorname{tang}\varphi'',$$

dann sind J_0, J_1, J_2 die Fufspuncte der auf die Seiten des Dreiecks aus den gegenüberstehenden Spitzen gefällten Perpendikel. Diese schneiden sich also nach 3. in einem Puncte.

10. Es ist:

$$\begin{aligned} \alpha\, M_0J_2 &= \alpha'\, M_1J_2; \\ \alpha'\, M_1J_0 &= \alpha''\, M_2J_0; \\ \alpha''\, M_2J_1 &= \alpha\, M_0J_1; \end{aligned}$$

folglich:

$$M_0J_2 \cdot M_1J_0 \cdot M_2J_1 = M_1J_2 \cdot M_2J_0 \cdot M_0J_1,$$

welchen Satz ich irgendwo gesehen zu haben mich erinnere.

11. Der Inhalt der Dreiecke $J_0M_1J_2$, $J_1M_2J_0$, $J_2M_0J_1$, $J_0J_1J_2$ sei resp. i_1, i_2, i_0, g und das Dreieck $M_0M_1M_2 = \triangle$, so ist, wie leicht zu übersehen,

$$i_1 = \frac{\alpha''\alpha}{(\alpha+\alpha')(\alpha'+\alpha'')}\cdot\triangle; \quad i_2 = \frac{\alpha\alpha'}{(\alpha'+\alpha'')(\alpha''+\alpha)}\cdot\triangle; \quad i = \frac{\alpha'\alpha''}{(\alpha''+\alpha)(\alpha+\alpha')}\cdot\triangle;$$

$$i_0 + i_1 + i_2 + g = \triangle.$$

Es wird demnach:

$$(\alpha+\alpha')(\alpha'+\alpha'')(\alpha''+\alpha)(i_0+i_1+i_2) = (\alpha\alpha'^2+\alpha'\alpha''^2+\alpha''\alpha^2+\alpha^2\alpha'+\alpha'^2\alpha''+\alpha''^2\alpha')\triangle,$$

$$(\alpha+\alpha')(\alpha'+\alpha'')(\alpha''+\alpha)\sqrt{\left(\frac{i_0\,i_1\,i_2}{\triangle}\right)} = \alpha\,\alpha'\,\alpha''\triangle.$$

Daraus ergiebt sich:

$$i_0 + i_1 + i_2 + 2\sqrt{\left(\frac{i_0\,i_1\,i_2}{\triangle}\right)} = \triangle,$$

oder

$$4\,i_0\,i_1\,i_2 = g\,g\,\triangle,$$

oder endlich:

$$g^2 + (i_0 + i_1 + i_2)\,g\,g - 4\,i_0\,i_1\,i_2 = 0.$$

Man kann also aus dem Inhalte der drei kleinen Dreiecke den Inhalt des grofsen finden.

12. Halbirt man die Linien A_0J_0, A_1J_1, A_2J_2 in den Puncten B_0, B_1, B_2, so sind die Coordinaten dieser Puncte:

$$(B_0) \quad \xi^{(0)} = \frac{\alpha'\alpha' x' - \alpha''\alpha'' x''}{\alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''}, \qquad \upsilon^{(0)} = \frac{\alpha'\alpha' y' - \alpha''\alpha'' y''}{\alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''},$$

$$(B_1) \quad \xi^{(1)} = \frac{\alpha''\alpha'' x'' - \alpha\alpha x}{\alpha''\alpha'' - \alpha\alpha}, \qquad \upsilon^{(1)} = \frac{\alpha''\alpha'' y'' - \alpha\alpha y}{\alpha''\alpha'' - \alpha\alpha},$$

$$(B_2) \quad \xi^{(2)} = \frac{\alpha\alpha x - \alpha'\alpha' x'}{\alpha\alpha - \alpha'\alpha'}, \qquad \upsilon^{(2)} = \frac{\alpha\alpha x - \alpha'\alpha' y'}{\alpha\alpha - \alpha'\alpha'},$$

diese drei Puncte liegen demnach auch in einer Geraden.

13. Die halben Entfernungen zwischen den Puncten $A_0 J_0$, $A_1 J_1$, $A_2 J_2$ seien R_0, R_1, R_2, so hat man für rechtwinklige Coordinaten

$$R_0 R_0 = \left(\frac{\alpha'\alpha''}{\alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''}\right)^2 \{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2\};$$

$$R_1 R_1 = \left(\frac{\alpha''\alpha}{\alpha''\alpha'' - \alpha\alpha}\right)^2 \{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2\};$$

$$R_2 R_2 = \left(\frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha - \alpha'\alpha'}\right)^2 \{(x - x')^2 + (y - y')^2\}.$$

14. Beschreibt man nun aus dem Puncte B_0 mit dem Halbmesser R_0 einen Kreis, und sind die Coordinaten irgend eines Puncts Q desselben X, Y, so ist: $$(\xi^{(0)} - X)^2 + (\upsilon^{(0)} - Y)^2 = R_0 R_0,$$

oder:

$$\{\alpha'\alpha'(x' - X) - \alpha''\alpha''(x'' - X)\}^2 + \{\alpha'\alpha'(y' - Y) - \alpha''\alpha''(y'' - Y)\}^2$$
$$= \{\alpha'\alpha''(x' - X) - \alpha'\alpha''(x'' - X)\}^2 + \{\alpha'\alpha''(y' - Y) - \alpha'\alpha''(y'' - Y)\}^2,$$

oder, nach einer kurzen Reduction und Division mit $\alpha'\alpha' - \alpha''\alpha''$:

$$\alpha'\alpha'\{(x' - X)^2 + (y - Y)^2\} = \alpha''\alpha''\{(x'' - X)^2 + (y - Y)^2\},$$

oder endlich: $$\alpha' M_1 Q = \alpha'' M_2 Q.$$

Die Entfernungen eines beliebigen Punctes dieses Kreises von den zwei Spitzen M_0 und M_1 des Dreiecks stehen also in einem beständigen Verhältnifs. Beschreibt man nun eben so aus den Puncten B_1 und B_2 mit den Radien R_1 und R_2 zwei andere Kreise, so schneiden die beiden ersten sich in einem Puncte Q', so dafs

$$\alpha' M_1 Q' = \alpha'' M_2 Q' = \alpha M_0 Q';$$

eben so die zwei letzten, dafs sie sich also alle drei in einem Puncte schneiden.

15. Für den Fall, dafs $\alpha = \alpha' = \alpha''$, liegen die Puncte J_0, J_1, J_2 auf der Mitte der Seiten, die Puncte A_0, A_1, A_2 aber in unendlicher Entfernung. Die drei Kreise verwandeln sich also in diesem Falle in drei auf den Seiten aus den Puncten J_0, J_1, J_2 errichtete Perpendikel, welche sich demnach in einem Puncte schneiden.

München, den 12. Mai 1830.

4.

Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algèbre.

(Par M. *C. G. J. Jacobi*, prof. en math. à Königsberg.)

Dans une des notes sur les fonctions elliptiques insérées dans les tomes précédens de ce journal j'ai avancé que les fonctions elliptiques doivent entrer dans toutes les parties de l'analyse mathématique et contribuer essentiellement à leur progrès. Je veux présenter dans ce qui suit un exemple assez rémarquable d'une application de la théorie des fonctions elliptiques aux fractions continues.

Tout le monde connait les algorithmes qui servent à réduire la racine quarrée d'un nombre en fraction continue. On sait aussi que par des procédés analogues on peut réduire en fraction continue la racine quarrée d'une expression algébrique et rationelle, et qu'il est possible de donner dans chaque moment le quotient complet qui rend la fraction exacte et qui aura la forme $\frac{\sqrt{R}+J}{N}$, $\sqrt{R}$ étant la racine à réduire en fraction continue, et J et N des expressions rationelles de la variable. Supposons que R soit une fonction entière et qui ne surpasse pas le quatrième degré. On prouve aisément que J et N sont aussi des fonctions entières, l'une du second degré, l'autre seulement du premier. On donne facilement les règles générales pour passer d'un quotient complet au suivant. Mais en voulant effectuer les calculs algébriques qu'exige la recherche des quotiens complets et par suite celle des dénominateurs de la fraction continue cherchée, on se trouve arrêté dès premiers pas par la longueur rebutante du calcul. En effet les expressions algèbriques que l'on rencontre en opérant sur la racine proposée deviennent tellement embrouillées qu'il parait être impossible d'y trouver une espèce d'ordre et de régularité. Et comme il est extrêmement difficile de passer même au second ou troisième dénominateur, l'on ne pourra éspérer d'autant moins de trouver par induction une loi générale. Toutefois en approfondissant les relations qui lient entr'elles les quotiens complets successifs, et en exa-

minant en même tems la formation des expressions algébriques qui donnent la multiplication des fonctions elliptiques, on parvient à exprimer généralement au moyen de ces dernières par des formules simples et élégantes un quelconque des quotiens complets. C'est ce qu'on verra dans la solution du problème suivant.

Problème.

Supposons

$$R = z(z-1)\left(z-\frac{1}{\cos\alpha^2}\right)\left(z-\frac{1}{\triangle\alpha^2}\right)$$
$$= z^4 - az^3 + bz^2 - cz,$$

où l'on a:

$$a = \frac{3-2(1+\varkappa^2)\sin^2\alpha+\varkappa^2\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha\triangle^2\alpha},$$
$$b = \frac{3-(1+\varkappa^2)\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\triangle^2\alpha},$$
$$c = \frac{1}{\cos^2\alpha\triangle^2\alpha},$$

$\triangle\alpha$ étant, comme à l'ordinaire, $=\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\alpha)}$: la racine $\sqrt{R}$ réduite en fraction continue prendra la forme: $\sqrt{R} =$

$$zz-\frac{a}{2}z+i_1+\cfrac{1}{M_1z+m_1+\cfrac{1}{M_2z+m_2+\ddots+\cfrac{1}{M_{n-1}z+m_{n-1}+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{R}+zz-\frac{a}{2}z+i_n}{q_n(r_nz-1)}}}}}},$$

$\dfrac{\sqrt{R}+zz-\frac{a}{z}z+i_n}{q_n(r_nz-1)}$ étant le $n^{\text{tième}}$ quotient complet: il s'agit de donner l'expression générale de i_n, r_n, q_n.

Solution.

Soit $\alpha = \mathrm{am}(u)$, $\alpha_n = \mathrm{am}(nu)$, **on aura:**

$$i_n = \frac{1}{2\cos^2\alpha\triangle^2\alpha}\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n}}\right),$$
$$r_n = 1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n+1}},$$

et de plus, n **étant un nombre impair:**

$$q_n = \frac{1}{4\cos^4\alpha \triangle^4\alpha}\left(\frac{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_6}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n}}\right)}{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_4}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_8}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n-2}}\right)}\right)^2,$$

n étant pair:

$$q_n = -\left(\frac{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_4}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_8}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n}}\right)}{\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_6}\right)\ldots\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_{2n-2}}\right)}\right)^2.$$

Entre deux q_n successifs, on aura l'équation:

$$q_n q_{n-1} = -i_n^2.$$

On peut aussi donner à ces formules la forme suivante:

$$i_n = \frac{1}{2\cos^2\alpha \triangle^2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha_{2n+1}\sin\alpha_{2n-1}}{\sin^2\alpha_{2n}}(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n}),$$

$$r_n = \frac{\sin\alpha_{2n+2}\sin\alpha_{2n}}{\sin^2\alpha_{2n+1}}(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n+1}),$$

et n étant impair:

$$q_n = \frac{\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha\triangle^2\alpha}\sin^2\alpha_{2n+1}\left(\frac{\sin\alpha_4\sin\alpha_8\ldots\sin\alpha_{2n-2}}{\sin\alpha_2\sin\alpha_6\ldots\sin\alpha_{2n}}\right)^4\times$$
$$\left(\frac{(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_2)(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_6)\ldots(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n})}{(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_4)(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_8)\ldots(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n-2})}\right)^2,$$

n étant pair:

$$q_n = \frac{\sin^2\alpha_{2n+1}}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\sin\alpha_2\sin\alpha_6\ldots\sin\alpha_{2n-2}}{\sin\alpha_4\sin\alpha_8\ldots\sin\alpha_{2n}}\right)^4\times$$
$$\left(\frac{(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_4)(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_8)\ldots(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n})}{(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_2)(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_6)\ldots(1-\varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha_{2n-2})}\right)^2,$$

Lorsque R surpasse le quatrième degré, la fraction continue dans laquelle on convertit $\sqrt{R}$, dépend des formules de multiplication des transcendantes plus élevés que les transcendantes elliptiques.

5.

Additamenta ad conatum, casum irreducibilem solvendi.

(Auct. Dr. *C. J. D. Hill*, Londini Goth.)

I.

Ex solutione in tractatu (Tom. II. pag. 304. seq.) exposita, corollarium haud spernendi momenti ducitur:

„Solutionem cujuscunque aequationis cubicae, casu irreducibili affectae, ad alias duas ejusmodi aequationes, quarum altera omnino arbitraria est, ordinate atque regulariter reduci posse."

Ut jam ab initio casum simplicissimum exponamus, supponamus aequationem datam:

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0,$$

et accipiamus ad arbitrium aliam:

$$y^3 - 3by^2 - 3y + b = 0,$$

cujus solutio, $y = \sqrt[3]{b}$ habetur *); pendebitque certe, ut ex jam demonstratis patet, prioris solutio ab hac juste solvenda:

$$z^3 - 3cz^2 - 3z + c = 0,$$

siquidem $c = \frac{a+b}{1-ab}$ acceptum fuerit; hacque soluta: $z = \sqrt[3]{c}$, habebitur:

$$x = \frac{\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{b}}{1 + \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{c}}, \quad \text{seu} \quad x = \frac{z-y}{1+yz}.$$

Haec vero solutio multum sublevatur, si $c = \frac{a-b}{1+ab}$, atque b ad a quam proximum accipitur, quo c minimum sit; tum enim vel juxta artem approximandi antea expositam vel juxta hanc formulam:

$$\sqrt[3]{x} = \frac{x}{3}\left(1 + \tfrac{2}{2}\tfrac{2}{7}\, x^2\right)^{-\frac{4}{11}},$$

---

*) Solutiones notae innumerae directe computari possunt juxta regulam:

$$a = t \cdot \frac{3 - t^2}{1 - 3t^2}.$$

Sic ex. gr. pro

$t = \sqrt{\tfrac{1}{3}},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{7},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{10}$

habetur

$a = \infty,\ \tfrac{11}{2},\ \tfrac{142}{65},\ \tfrac{13}{9},\ \tfrac{47}{55},\ \tfrac{37}{55},\ \tfrac{107}{198},\ \tfrac{73}{161},\ \tfrac{191}{488},\ \tfrac{121}{351},\ \tfrac{299}{970}.$

quae circiter per $-0{,}001 . x^7$ corrigenda est, statim habebitur $z = \underset{3}{\Lambda} c$, tumque

$$x = \underset{3}{\Lambda} a = \underset{3}{\Lambda} \frac{b+c}{1-bc} = \frac{\underset{3}{\Lambda} b + \underset{3}{\Lambda} c}{1 - \underset{3}{\Lambda} b . \underset{3}{\Lambda} c}, \quad \text{i. e.} \quad x = \frac{z+y}{1-zy}.$$

Ex gr. data $x^3 - 4x^2 - 3x + \frac{4}{3} = 0$, id est: $a = \frac{4}{3}$, sumatur $b = \frac{13}{9}$, eritque $c = \frac{\frac{4}{3} - \frac{13}{9}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{13}{9}} = -\frac{3}{79}$, ideoque $x = \frac{\underset{3}{\Lambda} \frac{13}{9} - \underset{3}{\Lambda} \frac{3}{79}}{1 + \underset{3}{\Lambda} \frac{13}{9} \cdot \underset{3}{\Lambda} \frac{3}{79}}$; est vero $\underset{3}{\Lambda} \frac{13}{9} = \frac{1}{3}$ et $\underset{3}{\Lambda} \frac{3}{79}$ juxta formulam approximantem modo exhibitam statim ultra partem billionesimam accurata habebitur; juxta vero modum approximandi generalem antea traditum triplicata ratione ad accurantiam, qualemcunque velis, facillime tibi computabitur.

De aliis quibuscunque aequationis cubicae formis corollarium nostrum aeque valet. Sic ex. gr. haec:

$$y^3 - 3\alpha y^2 - 2\beta y + \alpha\beta = 0,$$

cum $y = \sqrt{\beta} . \underset{3}{\Lambda} \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ det, per radices duarum similium itidem resolvitur. Idem etiam de generalissima aequatione:

$$z^3 + 3ez^2 + 3(e^2 - \alpha)z + e(e^2 - 3\alpha) + 2\beta = 0,$$

cum $z = \frac{\beta}{\alpha} - e + \sqrt{\beta} . \underset{3}{\Lambda} \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ det, affirmandum est. In praesenti vero circa formam usitatissimam

$$y^3 = 3\alpha y - 2\beta$$

aliquantum diutius morari sufficiat. Haec quidem ad formam

$$x^3 - 3ax^2 - 3bx + ab = 0$$

transformatur, ponendo $y = x + \frac{\beta}{\alpha}$, quo facto itidem habetur

$$y = \frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{b} . \underset{3}{\Lambda} \frac{a}{\sqrt{b}}.$$

Ut vero id, quod in praesenti agitatur, sublata irrationalitate, facilius attingatur, ponamus, aequationem jam hanc induisse formam:

$$x^3 = (3x + 2n).(n^2 + r^2),$$

cujus solutio est haec:

$$x = r \underset{3}{\Lambda} \frac{n}{r} - n;$$

capiamusque duas alias ejusmodi aequationes:

$$x_,^3 = (3x_, + 2n_,).(n_,^2 + r_,^2),$$

atque

$$x_{,,}^3 = (3x_{,,} + 2n_{,,}).(n_{,,}^2 + r_{,,}^2).$$

Est vero $\Lambda_3 \frac{n}{r} = \frac{x+n}{r}$, similiterque

$$\Lambda_3 \frac{n_,}{r_,} = \frac{x_,+n_,}{r_,} \quad \text{ac} \quad \Lambda_3 \frac{n_{,,}}{r_{,,}} = \frac{x_{,,}+n_{,,}}{r_{,,}};$$

sit igitur $\frac{n}{r} = \frac{n_, r_{,,} - r_, n_{,,}}{r_, r_{,,} + n_, n_{,,}}$, eritque

$$\Lambda_3 \frac{n}{r} = \frac{\Lambda_3 \frac{n_,}{r_,} - \Lambda_3 \frac{n_{,,}}{r_{,,}}}{1 + \Lambda_3 \frac{n_,}{r_,} \cdot \Lambda_3 \frac{n_{,,}}{r_{,,}}};$$

ideoque, debita facta substitutione, habebitur:

$$x = \frac{(r r_{,,} - n n_{,,}) x_, - (r r_, + n n_,) x_{,,} - n x_, x_{,,}}{r_, r_{,,} + n_{,,} + n_, x_{,,} + n_{,,} x_, + x_, x_{,,}}.$$

Radix igitur primae aequationis per radices utriusque posterioris exprimitur; tametsi harum coëfficientes, tantummodo vinculo $\frac{n}{r} = \frac{n_, r_{,,} - r_, n_{,,}}{r_, r_{,,} + n_, n_{,,}}$ juncti, arbitrarii fere sint *).

Ex. gr. Sint aequationes

$$x_,^3 = 8(3x_, - 4),$$
$$x_{,,}^3 = 125(3x_{,,} + 4)$$

pro quibus resp. $n = -2$ et $+2$, $r = 2$ et 11, $x = 4$ et 20; ex eisque componebitur aequatio

$$x^3 = 250(3x + 26),$$

ubi $n = 13$, $r = -9$, cujus ex praecedentibus radix habebitur:

$$x = \frac{-x_,(9.11 + 2.13) + x_{,,}(2.9 + 2.13) - 13 x_, x_{,,}}{2.11 - 2.2 + 2.x_, - 2.x_{,,} + x_, x_{,,}} = -10.$$

Innumera exhinc duci possunt corollaria, quorum sufficiat aliqua, praxi magis accommodata, attulisse.

Ponatur igitur $r_{,,} = 0$, $n_{,,} = 1$; quo $x_{,,}^3 = 3x_{,,} + 2$ atque $\frac{n}{r} = -\frac{r_,}{n_,}$, i. e. $n_, = kr$, $r_, = -kn$, exsistente k quanto arbitrario, fit. Haec vero aequatio juste soluta dat $x_{,,} = -1$ vel $= +2$. Valoribus igitur his rite substitutis, habetur

$$x = \frac{-n x_, - n x_, x_{,,}}{kr + kr x_{,,} + x_, + x_, x_{,,}}, \quad \text{i. e.} \quad x = -n \cdot \frac{x_,(1 + x_{,,})}{kr(1 + x_{,,}) + x_,(1 + x_{,,})},$$

*) Haud tamen infitias iverim, innumeros alios dari modos, aequationem propositam in aliam numeris arbitrariis praeditam transformare: sic ex. gr. cubica substituendo $x = \frac{\alpha + \alpha, y}{\beta + \beta, y}$ migrat in aliam pro y, cujus coëfficientes 3 arbitrariis conflantur; hae vero transformationes, utut minus regulares, potius arti Cossicae inserviunt, cum illarum ope innumerae pateant viae solutiones inveniendi.

seu

$$x = \frac{-n x_,}{k r + x_,}.$$

Accepto igitur arbitrario $k = 1$, aequatio $x^3 = (3x + 2n)(n^2 + r^2)$, substituendo $x = \frac{-n x_,}{r + x_,}$, in hanc $x_,^3 = (3x_, + 2r)(n^2 + r^2)$ transfunditur, i. e. n et r facillimo negotio permutari possunt, ideoque $r < n$ simplici substitutione efficitur: (id est, pro aequatione $x_,^3 = 3\alpha x_, + 2\beta$, $\frac{\beta^2}{\alpha^3} < \frac{1}{2}$ statim, et quidem realiter, efficitur; id quod vulgo non nisi transformationis imaginariae ope obtinent. Vid. Ekelund de express. rad. aeq. cub. p. 14.)

Concinna haec transformatio ansam mihi praebuit, alteram excogitandi methodum, casum irreducibilem expedita approximatione solvendi, eamque praxi magis accommodatam.

Sit nempe aequatio data:

$$x^3 = ax - b,$$

eritque quam proxime

$$x = \frac{b}{a}\left(1 - 5 . \frac{b^2}{a^3}\right)^{-\frac{1}{5}},$$

cum correctione circiter $+ \frac{b^7}{a^{10}}$ efficiente, sicut evolutione et comparatione cum serie celeb. Lagrange patet; vel etiam, si major accurantia desideratur, hac uti licebit formula:

$$x = \frac{b}{a} + \frac{b^3}{a^4}\left(1 - \frac{5b^2}{a^3}\right)^{-\frac{3}{5}},$$

quae circiter cum $2.3 . \frac{b^9}{a^{13}}$ ab serie celeb. Lambert differt. Sit ex. gr. $x^3 = 3x - 1$, eritque statim

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} . \left(\frac{27}{22}\right)^{0,6} = 0{,}34729314,$$

quod a vero valore

$$x = 2S10^0 = 0{,}3472964$$

tantum modo distat differentia $= 0{,}0000033$.

1) Quando igitur $a^3 > 27b^2$ (ut in exemplo allato), ejusmodi approximandi formula utendo, accurantia praxi vulgari sufficiens immediate habebitur; in casibus vero contrariis transformatio efficienda est: nempe

2) Quando $27b^2$ inter a^3 et $3a^3$ cadit (i. e. quando $a^3 < 27b^2 < 3a^3$), ponatur $x = \frac{3b}{a+u}$, habebiturque $u^3 - 3a^2u + 27b^2 - 2a^3 = 0$, quae modo nuper tradito resolvi potest.

3) Quando tandem $27b^2$ ad $4a^3$ magis accedit, seu $3a^3 < 27b^2 < 4a^3$, vel etiam, ita mutata coëfficientium forma, ut aequatio data sit: $x^3 = 3\alpha x + 2\beta$, pro qua hoc casu $\frac{3}{4}\alpha^3 < \beta^2 < \alpha^3$; quaeratur, ut jam ab initio docuimus, (in 1.) z ex aequatione:

$$z^3 = 3\alpha z + 2\sqrt{(\alpha^3 - \beta^2)},$$

eritque

$$x = \frac{\beta z}{\alpha z + \sqrt{(\alpha^3 - \beta^2)}}.$$

Sit ex. gr. $x^3 = ax - \left(\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, eritque $a^3 = 27b^2$, ideoque puri jure aequatio juxta secundum ac juxta primum casum resolvi potest. Formula vero prima dat $x = \sqrt{a}.0{,}200496$, cum errore $= +\sqrt{a}.0{,}000015$; secundus vero modus, capto ex primo $u = a.0{,}3472697$, dat $x = \sqrt{a}.0{,}884517$, cum errore $+\sqrt{a}.0{,}000035$. Hujusmodi igitur formulae in casu irreducibili solvendo primam approximationem nullo fere negotio suppeditabunt; quae si non sufficiat, initium ab hac ducendo, convergentissima nostra methodus ante tradita statim prima operatione triplum largietur decimalium numerum.

II.

Hactenus, quae solum casum irreducibilem spectant, allata sufficiant. Priusquam tamen reducibilem aggrediamur, aliquas fractiones continuas, utrumque attingentes, afferamus; quas quidem nuper usitatae transformationes nobis suppeditant.

1) Posito $x = \frac{b}{1+x}$, atque in aequationem $x^3 - 3x + b = 0$ substituto, iterum habebitur similis $x_,^3 - 3x_, + b_, = 0$, eritque $b_, = b^2 - 2$. Similiter igitur ponendo $x = \frac{b_,}{1+x_,}$ et $b_{,,} = b_,^2 - 2$, erit $x_{,,}^3 - 3x_{,,} + b_{,,} = 0$; et sic in reliquis. Ex hinc igitur exoritur:

$$x = \cfrac{b}{1 + \cfrac{b_,}{1 + \cfrac{b_{,,}}{1 + b_{,,,}}}} \text{ etc.}$$

Numeratores vero universi hac lege recurrente $b_{n+1} = b_n^2 - 2$, a se dependent. Unusquisque vero independenter ita exprimitur $b_n = a^{2^n} + a^{-2^n}$. Est enim $b_n^2 = a^{2^n \cdot 2} + a^{-2^n \cdot 2} + 2 = a^{2^{n+1}} + a^{-2^{n+1}} + 2 = b^{n+1} + 2$, legi priori convenienter. Ut vero a prima aequatione origo ducatur, sit, pro $n = 0$,

$b = a' + a^{-1}$, ideoque $a = \frac{b \pm \sqrt{(b^2-4)}}{2}$, cujus igitur realitas postulat ut $b > 2$ sit; id quod casui reducibili convenit. In casu vero irreducibili optime ponitur $b = 2\cos\varphi$, eritque aequationis

$$x^3 - 3x + 2\cos\varphi = 0$$

radix

$$x = \cfrac{2\cos\varphi}{1+\cfrac{2\cos 2\varphi}{1+\cfrac{2\cos 2^2\varphi}{1+\cfrac{2\cos 2^3\varphi}{1+\text{ etc.}}}}}$$

indeque casus solubiles notissimi facile eruuntur (nempe cum $2^n\varphi = \frac{1}{2}\pi$).

2) Substitutione vero, quae praecedenti inversa est, hac:

$$u = \sqrt{\alpha} + \frac{2\beta_,}{u_,}$$

in aequationem $u^3 - 3\alpha u - 2\beta = 0$ facta, obtinetur iterum similis

$$u_,^3 - 3\sqrt{\alpha}\,.\,u_, - 2\beta_, = 0,$$

posito $\beta_, = \sqrt{\left(\frac{\beta+\alpha^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}$; iterumque positis

$$u_, = \sqrt{\sqrt{\alpha}} + \frac{2\beta_{,,}}{u_{,,}} \quad \text{et} \quad \beta_{,,} = \sqrt{\left(\frac{\beta_, + \alpha^{\frac{3}{4}}}{2}\right)},$$

habebitur:

$$u_{,,}^3 - 3\sqrt{\sqrt{\alpha}}\,.\,u_{,,} - 2\beta_{,,} = 0,$$

etc.; ideoque

$$u = \sqrt{\alpha} + \cfrac{2\beta_,}{\sqrt[4]{\alpha} + \cfrac{2\beta_{,,}}{\sqrt[8]{\alpha} + \cfrac{2\beta_{,,,}}{\sqrt[16]{\alpha} + \text{ etc.}}}}$$

Facto vero $\alpha = 1$, simplicior obtinetur solutio:

$$u = 1 + \cfrac{2\beta_,}{1+\cfrac{2\beta_{,,}}{1+\cfrac{2\beta_{,,,}}{1+\text{ etc.}}}},$$

numeratorumque generatio $\beta_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{1+\beta_n}{2}\right)}$, unde calculi summatorii ope haec deducitur expressio independens:

$$\beta_n = \tfrac{1}{2}[\sqrt[2^n]{(\beta + \sqrt{(\beta^2-1)})} + \sqrt[2^n]{(\beta - \sqrt{(\beta^2-1)})}].$$

Quoniam vero functio ista in casu irreducibili cum illa, quam Dr. Sarrus in Gergonne Ann. d. Math. X. p. 189. seqq. exposuit, convenit, hanc illius transformationem trigonometricam, ex nuper allata independente forma oborientem, protulisse sufficiat; est scilicet aequationis

$$x^3 - 3x = 2\cos\alpha$$

radix

$$x = 1 + \cfrac{2\cos\frac{1}{2}\alpha}{1 + \cfrac{2\cos\frac{1}{2^2}\alpha}{1 + \cfrac{2\cos\frac{1}{2^3}\alpha}{1 + \text{etc.}}}}$$

Haec vero functio in infinitum extensa, tandem casum $\alpha = 0$ repraesentat, quo quidem aperte radix

$$x = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \text{etc.}}}} \qquad = 1 + \frac{2}{x},$$

i. e. aequatione quadratica $x^2 = x + 2$ soluta, x vel $= -1$ vel $= +2$; qui igitur valores in finem fractionis loco $1 + 2\cos\frac{1}{2^n}\alpha$ etc. substitui possunt, cum fractio eousque continuata fuerit, donec perventum sit ad angulum tam parvum $\frac{\alpha}{2^n}$, ut ejus cosinus ab unitate differat quantitate errorem admittendum haud superante, ex. gr. ad angulum $2^0\,33'\,45''$ pro errore $< 0{,}001$. Melius tamen hoc casu transformatio nostra tertia in usum veniet.

III.

Applicationes ad casum reducibilem.

Primum obiter observasse sufficiat, transformationes irreducibili adornatas mutatis mutandis huic applicari posse.

1. Formulae, quae tres terminos formulae Cardani dictae evolutos reddunt, sunt:

a) pro aequatione $x^3 - 3\alpha x - 2\beta = 0$

$$x = +2\sqrt[3]{\beta}\left(1 + \frac{23}{27}\cdot\frac{\alpha^3 - \beta^2}{\beta^2}\right)^{\frac{3}{23}},$$

quae praecipue in usum venit, cum $\alpha^3 - \beta^2$ minimum fuerit.

b) pro aequatione $x^3 + 3\alpha x - 2\beta = 0$

$$x = \frac{2}{3}\cdot\frac{\beta}{(\alpha^3 + \beta^2)^{\frac{1}{3}}}\cdot\left(1 - \frac{107}{135}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^3 + \beta^2}\right)^{-\frac{25}{107}},$$

quae semper convergit, idque tanto magis, quanto major quantitas $\frac{\alpha^3}{\beta^2}$ fuerit.

Hae formulae, computo, aptiores sunt, cum formula Cardani laboriosior fit.

2. Aequatio $x^3 + ax - b = 0$, subsidio hujus: $x(a-u) = 3b$, in hanc transfunditur:

$$u^3 - 3a^2u + 27b^2 + 2a^3 = 0,$$

i. e. terminus medius semper negativus effici potest. Aequationes vero

$$x^3 - ax + b = 0 \quad \text{atque} \quad x(a+u) = 3b$$

ad hanc conducunt:

$$u^3 - 3a^2u + 27b^2 - 2a^3 = 0.$$

3. Vice versa terminus medius negativus in casu irreducibili positivus efficitur

a) ponendo $u = \sqrt{\alpha} - \frac{\sqrt{(2(\beta - \alpha^{\frac{3}{2}}))}}{x}$, atque in $u^3 - 3\alpha u + 2\beta = 0$ substituendo, cum ita obtineatur:

$$x^3 + 3\sqrt{\alpha}.x - \sqrt{(2(\beta - \alpha^{\frac{3}{2}}))} = 0,$$

vel etiam

b) ponendo $x = \frac{\beta z}{\alpha z - \sqrt{(\beta^2 - \alpha^3)}}$, quo loco hujus: $x^3 - 3\alpha x - 2\beta = 0$, obtinetur $z^3 + 3\alpha.z - 2\sqrt{(\beta^2 - \alpha^3)} = 0$. Debita igitur harum transformationum electione formulae primae approximationem praeliminarem, methodis notis facillime corrigendam suppeditabunt.

Majori vero cum facilitate atque libertate hoc idem efficietur, si solutionem nostram casus irreducibilis reducibili accommodavimus, quo ipso pateat, etiam hunc in aequationes fere arbitrarias transformari posse.

Levi scilicet attentione perspicitur, aequationem $y^3 = 3\alpha y + 2\beta$ casu reducibili, ponendo $r = \sqrt{(\beta^2 - \alpha^3)}$, eodem modo ac in casu irreducibili solvi posse, scilicet hoc:

$$y = \frac{r}{\alpha}.\left(\dot{\Lambda}_3 \frac{\beta}{r} - \frac{\beta}{r}\right),$$

dummodo aequationis simplicioris

$$x^3 - 3ax^2 + 3x - a = 0$$

concedatur solutio:

$$x = \dot{\Lambda}_3 \frac{\beta}{r}),$$

quae quidem hoc signo $\dot{\Lambda}_3$, scilicet $\dot{\Lambda}_3$ cum puncto ex signo imaginarii ($i = \sqrt{-1}$) mutuato, quo ipso radices imaginarias adesse indicatur, ab ipsissimo Λ_3 casum irreducibilem attingente distinguitur. Itidem patet, naturam hujus functionis auxiliariae ita exprimi:

$$\dot{\Lambda}_3 \frac{a+b}{1+ab} = \frac{\dot{\Lambda}_3 a + \dot{\Lambda}_3 b}{1+\dot{\Lambda}_3 a . \dot{\Lambda}_3 b};$$

id quod similem in modum ac antea pro functione Λ_3 feci, demonstrari potest.

Corollaria exhinc innumera duci possunt, quorum illa, quae istis in casu irreducibili jam expositis similia sunt (ex. gr. radices imaginarias, data reali y_0, rationaliter per hanc ita exprimi:

$$\frac{r y_0 \pm \sqrt{-3(\alpha^3+\beta . y_0)}}{r \mp \sqrt{-3(\beta+\alpha . y_0)}}\Big),$$

aliis explicanda relinquo, cum nonnulla alia haud spernendi momenti in praesenti cura nostra indigent.

Formula $y = \frac{r}{\alpha}.\left(\dot{\Lambda}_4 \frac{\beta}{r} - \frac{\beta}{r}\right)$, casu $\alpha = 0$, sub forma indeterminata $\frac{0}{0}$ sese exhibet; cujus igitur ut valor huic casui respondens reperiatur (id quod juxta usitatissimum derivationis ope institutum modum aegrius perficitur), ad aequationem auxiliarem $x^3 - 3ax^2 + 3x - a = 0$ regrediendum est. Casus noster $\alpha = 0$, $r = \beta$ suppeditat, ideoque $a = \frac{\beta}{r} = 1$; sit vero ad tempus $a = 1 + \omega$, eritque auxiliaris illa $(x-1)^3 = \omega(3x^2+1)$, unde haec radicis evolutae forma perspicitur:

$$x = 1 + A\sqrt[3]{\omega} + B\sqrt[3]{\omega^2} + \text{etc.};$$

vulgarique modo reperitur

$$x = 1 + \sqrt[3]{4\omega} + \sqrt[3]{2\omega^2} + \text{etc.}$$

Est vero $\beta^2 = r^2 + \alpha^3$, ideoque $\frac{\beta}{r} = 1 + \frac{\alpha^3}{2r^2} + \text{etc.}$, indeque obtinetur

$$y = \frac{r}{\alpha}\left(1 + \sqrt[3]{\frac{\alpha^3}{2r^2}} - \left(1 + \frac{\alpha^3}{2r^2}\right)\right),$$

i. e.

$$y = r\sqrt[3]{\frac{2}{r^2}} = \sqrt[3]{2r} = \sqrt[3]{2\beta},$$

quando $\alpha = 0$; id quod apprime convenit cum notissima ipsius $y^3 = 2\beta$ solutione.

Exhinc materiam haurire licet functionem nostram $\dot{\Lambda}_3$ penitus perscrutandi.

Ponamus enim $a = \frac{b-x}{1-bx}$, eritque $\dot{\Lambda}_3 a = \frac{\dot{\Lambda}_3 b - \dot{\Lambda}_3 x}{1 - \dot{\Lambda}_3 b . \dot{\Lambda}_3 x}$; iterumque sit $x = 1 + \omega$, ideoque $\frac{a+x}{1+ax}$ seu $b = 1 + \omega . \frac{1-a}{1+ax}$, fietque ita

$$\underset{3}{\dot{\lambda}} a = \frac{\underset{3}{\dot{\lambda}}\left(1+\omega.\frac{1-a}{1+ax}\right)-\underset{3}{\dot{\lambda}}(1+\omega)}{1-\underset{3}{\dot{\lambda}}(1+\omega).\underset{3}{\dot{\lambda}}\left(1+\omega.\frac{1-a}{1+ax}\right)},$$

i. e. juxta evolutionem ipsius $\underset{3}{\dot{\lambda}}$ modo exhibitam

$$\underset{3}{\dot{\lambda}} a = \frac{\sqrt[3]{4\omega}\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1-a}{1+ax}\right)}-1\right)+B\sqrt[3]{\omega^2}}{-\sqrt[3]{4\omega}\left(1+\sqrt[3]{\left(\frac{1-a}{1+ax}\right)}\right)+C\sqrt[3]{\omega^2}},$$

ideoque divisione per $\sqrt[3]{(4\omega)}$ instituta, postmodumque $\omega = 0$ posito, quo $x = 1$ fit, erit

$$\underset{3}{\dot{\lambda}} a = \frac{\sqrt[3]{(1+a)}-\sqrt[3]{(1-a)}}{\sqrt[3]{(1+a)}+\sqrt[3]{(1-a)}}.$$

Functio igitur nostra pro casu reducibili solvendo idonea, singularis est radicum cubicarum combinatio, quae rite introducta hanc aequationis cubicae solutionem:

$$y = \frac{r}{\alpha}\left(\frac{\sqrt[3]{(r+\beta)}-\sqrt[3]{(r-\beta)}}{\sqrt[3]{(r+\beta)}+\sqrt[3]{(r-\beta)}}-\frac{\beta}{r}\right),$$

ad ipsissimam Cardani dictam $y = \sqrt[3]{(r+\beta)}+\sqrt[3]{(\beta-r)}$ reducibilem, suppeditat. Ut singularis solutionem inveniendi via hoc, quod exposuimus, aestimari quidem potest: Quod vero hac in re maximi est momenti, hoc mihi esse videtur, proprietatem illam singularem hujus radicum combinationis non solum ad cubicas sed ad quascunque quadrare.

Theorema. Est scilicet generatim

$$\underset{n}{\dot{\lambda}}\frac{a+b}{1+ab} = \frac{\underset{n}{\dot{\lambda}} a+\underset{n}{\dot{\lambda}} b}{1+\underset{n}{\dot{\lambda}} a.\underset{n}{\dot{\lambda}} b},$$

si functio

$$\dot{\lambda} x = \frac{\sqrt[n]{(1+x)}-\sqrt[n]{(1-x)}}{\sqrt[n]{(1+x)}+\sqrt[n]{(1-x)}}$$

fuerit.

Quoniam enim $1 \pm \frac{a-b}{1+ab} = \frac{(1\pm a)(1\pm b)}{1+ab}$, est ab una parte

$$\underset{n}{\dot{\lambda}}\frac{a+b}{1+ab} = \frac{\sqrt[n]{(1+a)}.\sqrt[n]{(1+b)}-\sqrt[n]{(1-a)}.\sqrt[n]{(1-b)}}{\sqrt[n]{(1+a)}.\sqrt[n]{(1+b)}+\sqrt[n]{(1-a)}.\sqrt[n]{(1-b)}},$$

ab altera vero

$$\frac{\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}a+\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}b}{1+\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}a.\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}b}=\frac{\frac{\sqrt[n]{(1+a)}-\sqrt[n]{(1-a)}}{\sqrt[n]{(1+a)}+\sqrt[n]{(1-a)}}+\frac{\sqrt[n]{(1+b)}-\sqrt[n]{(1-b)}}{\sqrt[n]{(1+b)}+\sqrt[n]{(1-b)}}}{1+\frac{\sqrt[n]{(1+a)}-\sqrt[n]{(1-a)}}{\sqrt[n]{(1+a)}+\sqrt[n]{(1-a)}}.\frac{\sqrt[n]{(1+b)}-\sqrt[n]{(1-b)}}{\sqrt[n]{(1+b)}+\sqrt[n]{(1-b)}}},$$

id quod additione fractionum facta

$$=\frac{2}{2}.\frac{\sqrt[n]{(1+a)}.\sqrt[n]{(1+b)}-\sqrt[n]{(1-a)}.\sqrt[n]{(1-b)}}{\sqrt[n]{(1+a)}.\sqrt[n]{(1+b)}+\sqrt[n]{(1-a)}.\sqrt[n]{(1-b)}}$$

fit, i. e. priori aequale.

Corollarium 1. $\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}\frac{u^n+z^n}{u^n-z^n}=\frac{u+z}{u-z}$.

Scholion. Designando functionem algebraicam fractam $\frac{1-x}{1+x}$ per $(\frac{1}{1})x$, functio nostra breviter ita indicare potest:

$$\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}x=(\tfrac{1}{1})\sqrt[n]{((\tfrac{1}{1})x)}.$$

Corollarium 2. Posito $x=(\frac{1}{1})\sqrt[n]{((\frac{1}{1})a)}$, retro habetur:

$$a=(\tfrac{1}{1})((\tfrac{1}{1})x)^n,$$

seu

$$a=\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n}=x.\frac{n+n_3x^2+n_5x^4+\ldots.}{1+n_2x^2+n_4x^4+\ldots.}.$$

Quae igitur est aequatio n^{ti} gradus solubilis.

Huic vero similis aequatio

$$a=x.\frac{n-n_3x^2+n_5x^4-\ldots.}{1-n_2x^2+n_4x^4-\ldots.}$$

aperte itidem solvi poterit ope functionis $x=\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}a$, hujusquidem indolis:

$$\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}\frac{a+b}{1-ab}=\frac{\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}a+\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}b}{1-\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}a.\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}b};$$

quae quidem algebraica habenda mihi videtur, cum et radices indicat aequationis algebraicae, ejusque omnes reales habentis, et naturae algebraicae aeque simplicis atque praestantis, ac praecedens $\overset{\cdot}{\underset{n}{\Lambda}}x$, vel etiam ac radix potentiarum $\sqrt[n]{x}$ jam diu civitate algebraica donata, aestimanda videtur. Ejusmodi vero functionem aeque simplicem beneque notam ac radix potestatum, in Algebram admittendo, casus irreducibiles exsulare licet: iniquum mihi igitur videretur, si ei, quae aequationem omnibus radicibus realibus praeditam solvit, locus in algebrae elementis diutius negetur, qui sociae, quae aequationem una alterave tantum radice reali praeditam solvit, jam ab initio concessus est.

6.

Geometrische Auflösung der Aufgabe: In einem Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten verlängert durch die gegebenen Puncte *A*, *B*, *C* gehen.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Es seien (Taf. I. Fig. 5.) die Spitzen des Dreiecks *L*, *M*, *N*, so dafs *LMA*, *MNB*, *NLC* in gerader Linie liegen. Man ziehe die Linie *AB*, und durch *L* eine mit ihr parallele *LK*, die die Curve in *K* schneidet; durch *K* und *N* die Linie *KN*, die *AB* in *D* schneidet. Da nun *LM*, *MN*, *NK*, *KL* als die vier Seiten eines in der Curve beschriebenen Vierecks angesehen werden können, und die erste, zweite und vierte dieser Linien die Gerade *AB* in bestimmten Puncten *A*, *B* und unendlich weit entfernt schneidet, wo man auch den Punct *L* annimmt, so schneidet bekanntermafsen auch die dritte dieser Linien die Gerade *AB* in einem bestimmten Puncte *D*.

Zieht man nun durch *D* und *C* eine Gerade und durch *L* eine mit ihr parallele *LI*, so gilt hier wieder in Bezug auf das Viereck *KNLIK* dasselbe, dafs nemlich *IK* die Gerade *DC* immer in dem Puncte *E* schneide.

Die Aufgabe ist also darauf zurückgebracht, in der Curve ein Dreieck zu beschreiben, wovon zwei Seiten mit gegebenen Geraden parallel sind, und die dritte durch einen gegebenen Punct geht. Beschreibt man eine Menge dieser Dreiecke, deren zwei Seiten gegebenen Geraden parallel sind, so sind alle dritte Seiten derselben Tangenten zu einer ähnlichen concentrischen Curve. Legt man aber an die Curve *LMN* eine mit dieser Tangente parallele, und zieht durch den Mittelpunct der Curve irgend eine Gerade, die diese Tangenten schneidet, so sieht man leicht, dafs die Entfernung der beiden Durchschnittspuncte vom Mittelpuncte der Curve sich wie die Durchmesser von gleicher Lage verhalten.

Diese Schlüsse zusammengenommen zeigen sogleich das Verfahren zur Lösung der Aufgabe:

Durch einen beliebigen Punct *L* ziehe man die Linie *ALM* und dann *MNB*; ferner durch *L* die mit *AB* parallele *LK* und darauf *KND*.

Hierauf ziehe man die Gerade DC, und durch L die mit ihr parallele LI, dann $LN'C$ (wo N' blofs mit N zusammentrifft, wenn L die Spitze des gesuchten Dreiecks ist), und $DN'K'$, und $IK'E$.

Man ziehe nun IK' und lege eine mit ihr parallele Tangente an die Curve, und ziehe darauf vom Mittelpuncte an den Berührungspunct eine Linie. Durch den Durchschnittspunct derselben mit der Chorde und den Punct E ziehe man eine Gerade, und durch den Berührungspunct eine mit dieser parallele. Zieht man nun vom Mittelpuncte der Curve durch E eine Gerade, und legt durch den Durchschnitt derselben mit der letztgenannten eine Tangente an die Curve, so ist diese mit der gesuchten EKI parallel.

München, den 13. April 1830.

7.

Mémoire sur quelques formules générales d'analyse *).

(Par Mr. *G. Libri* de Florence.)

Introduction.

L'algèbre présente un grand nombre de problèmes, tels que le développement du polynome, la recherche des fonctions symétriques des racines des équations algébriques, l'élimination, etc., dont la solution dépend dans chaque cas particulier des principes les plus élémentaires, mais qui offrent de grandes difficultés quand il s'agit de les résoudre en général. Cependant le défaut de formules se fait sentir chaque fois que la solution d'un problème exige, que l'on connaisse le résultat général des opérations qu'on sait effectuer seulement dans les cas particuliers; et comme cette circonstance se renouvelle souvent dans l'analyse, il en résulte une imperfection qui plane sur toute l'étendue de la science. Cette imperfection disparaîtrait si l'on savait, dans le développement d'un polynome quelconque, trouver le terme général sans qu'il fût besoin de connaître les termes précédens, comme cela parait nécessaire au premier abord; car cette question renferme toutes celles de la même espèce que nous avons énoncées ci-dessus. Les géomètres allemands, qui se sont beaucoup occupés de ces recherches, ont tâché de tirer le développement du polynome de l'analyse combinatoire, dont Leibnitz avait donné la première idée; mais leurs procédés qui reposent presqu'entièrement sur la partition des nombres, (opération qu'on ne sait par effectuer en général) ne peuvent fournir que des règles didactiques, et point de formules générales. D'autres analystes ont ramené ce problème au calcul différentiel et aux intégrales définies:

*) Ce mémoire, et plusieurs autres qui suivent, ont été déjà imprimés en 1829 à Florence à un petit nombre d'exemplaires aux frais de l'auteur, uniquement pour être distribuées à quelques amis; mais ils sont restés inconnus à la librairie et au public.

Comme cependant l'importance de ces mémoires et les recherches et idées profondes qu'ils contiennent, les rendent eminemment dignes d'être offerts publiquement à la connaissance des savants, l'éditeur de ce journal a demandé et obtenu de la complaisance de leur auteur la permission, de publier par la voie du journal ces mémoires, ainsi que ceux qu'il a bien voulu promettre encore.

C'est de cette manière que le journal commence ici à publier ces excellents morceaux. Quand on arrivera aux mémoires qui n'ont pas encore été imprimés, les lecteurs en seront avertis. Note de l'éditeur.

ces méthodes qui sont plus directes, exigent cependant que l'on connaisse les différentielles successives de certaines fonctions; et comme pour les obtenir il faut développer ces fonctions en séries, il est clair que le problème revient en dernière analyse à ce qu'il était d'abord, puisque il faut calculer les termes précédens pour avoir celui que l'on cherche. Ainsi jusqu'à présent, il n'y avait aucune formule générale, qui offrît sous une forme concise tous les termes dont le développement d'une fonction polynome se compose, sans qu'il fût nécessaire de faire aucune opération préliminaire. Cependant il semble que dans l'état actuel de l'analyse il faut renoncer à tous les moyens pratiques, comme l'on a depuis long tems abandonné les constructions graphiques pour la solution des problèmes; et que l'on doit chercher des formules générales, qui aient pour caractère spécial de résoudre la question dans sa plus grande étendue, sans qu'il soit nécessaire, pour les appliquer aux cas particuliers, d'effectuer d'autre opération que celle d'y substituer les quantités connues. Chaque fois qu'une formule ne remplit pas ces conditions, elle est incomplète; parceque la valeur d'une quantité qui en dépendrait, ne saurait être substituée dans une autre expression.

Pour résoudre les questions qui nous occupent, nous avons ramené d'abord le développement d'un polynome à une équation aux différences d'ordre indéfini, dont l'intégrale exprimée en série nous a donné le terme général du développement cherché: puis nous avons partagé cette série en autant d'autres séries partielles qu'il y a de facteurs dans les termes qui la composent; et nous avons pu de cette manière en obtenir la somme en termes finis. La formule que l'on trouve ainsi, est presqu'aussi simple que celle qui exprime l'intégrale de l'équation linéaire aux différences du premier ordre, et lui ressemble à quelques égards. On en déduit de suite une expression des nombres de Bernoulli, plus complète et moins difficile à calculer que toutes celles que l'on connaissait jusqu'à présent. Ceci nous conduit à exposer une formule assez simple, qui sert à développer par les puissances ascendantes de la variable, l'intégrale finie d'une fonction quelconque.

La méthode dont nous avons fait usage pour développer le polynome, sert encore à trouver la somme des puissances des racines d'une équation algébrique quelconque: on obtient dans ce cas deux développemens, qui en dernière analyse sont identiques, et on les somme de la

même manière que la série que l'on avait obtenue pour le polynome. Nous déduisons des formules qui représentent ces développemens, une expression générale de la somme des diviseurs d'un nombre quelconque; somme que l'on n'avait jamais pu soumettre à aucune loi régulière: et nous montrerons dans la suite comment ces mêmes formules peuvent servir à trouver directement un nombre premier plus grand qu'une limite quelconque. Lorsqu'on connait la somme des racines d'une équation, toutes les autres fonctions symétriques des mêmes racines s'en déduisent: mais nous n'avons pas cru nécessaire de nous arrêter à exposer les formules qui les représentent. Cependant nous avons pensé qu'il ne serait pas tout à fait inutile de donner la formule générale d'élimination, entre deux équations algébriques de degrés quelconques; et nous l'avons exposée en négligeant la démonstration qui est très-facile a retrouver.

Les formules que nous exposons dans ce mémoire, offrent l'avantage de pouvoir introduire dans le calcul, sous forme finie, le résultat d'opérations qui dépendent de développemens très-longs à effectuer. Nous avons cru nécessaire de les placer à la tête de ces recherches, à cause des applications fréquentes que nous en fairons dans la suite, à l'analyse numérique et à diverses questions de calcul intégral.

Analyse.

Etant proposé de développer suivant les puissances ascendantes de z, le polynome indéfini

$$(1+a_1 z+a_2 z^2 \ldots + a_x z^x + \text{etc.})^m = 1+y_1 z+y_2 z^2 \ldots + y_x z^x + \text{etc.},$$

si l'on prend la différentielle logarithmique de chacun des membres de cette équation, et que l'on égale les coëfficiens des mêmes puissances de z, on aura la suite d'équations aux différences

$$\begin{aligned} y_1 &= m a_1; \\ 2y_2 &= 2m a_2 + (m-1) a_1 y_1; \\ 3y_3 &= 3m a_3 + (2m-1) a_2 y_1 + (m-2) a_1 y_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\textbf{1.} \quad x y_x = x m a_x + ((x-1)m-1) a_{x-1} y_1 + ((x-2)m-2) a_{x-2} y_2 + \text{etc.}$$

et en substituant dans la dernière, les valeurs de y_1, y_2, y_3, etc., déduites des équations précédentes, on aura l'intégrale de l'équation (1.) exprimée en série de cette manière

2. $$y_x = \frac{xma_x}{x} + ((x-1)m-1)\frac{a_{x-1}}{x}(ma_1) + ((x-2)m-2)\frac{a_{x-2}}{x}\left(\frac{2ma_2+(m-1)a_1(ma_1)}{2}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots + ((x-t)m-t)\frac{a_{x-t}\beta_t}{x} + \text{etc.},$$

et il sera facile de saisir la loi des termes, puisque le coëfficient β_t, est égal à la somme de tous les termes précédens dans lesquels on a changé x et t.

A l'aide des substitutions successives on peut toujours exprimer en série l'intégrale d'une équation aux différences; mais les formules que l'on obtient de cette manière manquent de symétrie, et ne peuvent pas aisément se représenter à l'esprit; pour les rendre utiles il faut les réduire à une forme finie, et c'est ce que nous allons faire maintenant.

Si dans l'équation (2.) on réunit par groupes les termes composés de deux, de trois, ... de $u+1$ facteurs, (en ne considérant comme facteurs que les coëfficiens indéterminés a_1, a_2, a_3, ... a_x, etc., du polynome) et si l'on désigne ces groupes par A_2, A_3, ... A_{u+1}, etc., on aura

$$y_x = \begin{cases} \frac{xma_x}{x} \\ +((x-1)m-1)\frac{a_{x-1}}{x}(ma_1) + ((x-2)m-2)\frac{a_{x-2}}{x}(ma_2) + ((x-3)m-3)\frac{a_{x-3}}{x}(ma_3) \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + ((x-t)m-t)\frac{a_{x-t}}{x}(ma_t) + \text{etc.} \\ +((x-2)m-2)\frac{a_{x-2}}{x}\left(\frac{(m-1)a_1(ma_1)}{2}\right) + ((x-3)m-3)\frac{a_{x-3}}{x}\left(\frac{(2m-1)a_2(ma_1)+(m-2)a_1(ma_2)}{3}\right) + \text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{etc.} \end{cases}$$
$$= \frac{xma_x}{x} + A_2 + A_3 \ldots\ldots\ldots + A_{u+1} + \text{etc.}$$

Maintenant le groupe A_2 a pour terme général l'expression

$$\frac{1}{x} m a_{x_1}((x-x_1)m-x_1)a_{x-x_1}$$

dans laquelle x_1 reçoit successivement les valeurs 1, 2, 3, ... $x-1$; l'on aura donc

$$A_2 = \sum \frac{1}{x} m a_{x_1}((x-x_1)m-x_1)a_{x-x_1},$$

en intégrant entre les limites $x_1 = 1$, $x_1 = x$. Le groupe A_3 a pour terme général

$$\frac{m}{x.x_1} a_{x_2}((x-x_1)m-x_1)a_{x-x_1}((x_1-x_2)m-x_2)a_{x_1-x_2},$$

où il faut donner à x_1 toutes les valeurs 2, 3, 4, ... $x-1$; et faire successivement $x_2 = 1, 2, 3, \ldots. x_1-1$; on trouvera par conséquent

$$A_3 = \sum\sum \frac{m}{x.x_1} a_{x_2}((x-x_1)m-x_1)a_{x-x_1}((x_1-x_2)m-x_2)a_{x_1-x_2},$$

en intégrant entre les limites

$$x_1 = 2,\ x_1 = x\ ;\ x_2 = 1,\ x_2 = x_1 .$$

Et en général on aura l'équation

$$A_{u+1} =$$

$$\sum\sum\sum\ldots \frac{m}{x.x_1.x_2\ldots x_{u-1}} a_{x_u}((x-x_1)m-x_1)a_{x-x_1}((x_1-x_2)m-x_2)a_{x_1-x_2}\ldots((x_{u-1}-x_u)m-x_u)a_{x_{u-1}-x_u},$$

où il faut intégrer entre les limites

$x_1 = u,\ x_1 = x\ ;\ x_2 = u-1,\ x_2 = x_1\ ;\ x_3 = u-2,\ x_3 = x_2\ ;\ \ldots\ x_u = 1,\ x_u = x_{u-1}$.

En exprimant les intégrales définies aux différences par la notation de M. Fourier, on aura

$$A_{u+1} = \sum_{x_1=u}^{x_1=x} \sum_{x_2=u-1}^{x_2=x_1} \ldots \sum_{x_u=1}^{x_u=x_{u-1}} \frac{m}{x.x_1.x_2\ldots x_{u-1}} a_{x_u} \left\{ \begin{array}{l} ((x-x_1)m-x_1)a_{x-x_1}((x_1-x_2)m-x_2)a_{x_1-x_2}\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ((x_{u-1}-x_u)m-x_u)a_{x_{u-1}-x_u} \end{array} \right\};$$

mais comme l'on a

$$\sum_{x_1=u}^{x_1=x} \sum_{x_2=u-1}^{x_2=x_1} \ldots\ldots \sum_{x_u=1}^{x_u=x_{u-1}} = e^{\sum_{s=1}^{s=u+1} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}},$$

e étant la base des logarithmes hyperboliques, et que l'on a aussi par la notation de Vandermonde

$$\frac{1}{x.x_1\ldots x_{u-1}}((x-x_1)m-x_1)a_{x-x_1}((x_1-x_2)m-x_2)a_{x_1-x_2}\ldots((x_{u-1}-x_u)m-x_u)a_{x_{u-1}-x_u}$$

$$= \left[\frac{1}{x_{u-1}}((x_{u-1}-x_u)m-x_u)a_{x_{u-1}-x_u}\right]^u$$

(pourvu que l'on suppose $x_0 = x$) on trouvera

$$A_{u+1} = e^{\sum_{s=1}^{s=u+1} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}} m a_{x_u} \left[\frac{1}{x_{u-1}}((x_{u-1}-x_u)m-x_u)a_{x_{u-1}-x_u}\right]^u$$

et puisque

$$y_x = m a_x + \sum_{u=1}^{u=x} A_{u+1}$$

on obtiendra enfin

$$3.\quad y_x = m a_x + \sum_{u=1}^{u=x} e^{\sum_{s=1}^{s=u+1} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}} m a_{x_u} \left[\frac{1}{x_{u-1}}((x_{u-1}-x_u)m-x_u)a_{x_{u-1}-x_u}\right]^u$$

en faisant toujours $x_0 = x$ *).

*) Nous aurions pu nous épargner cette réduction, en écrivant x_0 au lieu de x dans tout ce qui précède; mais nous ne l'avons pas fait, à cause des difficultés typo-

On peut encore réduire cette expression à la forme suivante

$$y_x = m a_x + m \sum_{u=1}^{u=x} e^{\sum_{s=1}^{s=u+1} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}} a_{x_u} \; e^{\sum_{z=0}^{z=u} \log \frac{1}{x_z}((x_z - x_{z+1})m - x_{z+1})\, a_{x_z - x_{z+1}}}$$

en exprimant toujours par e la base des logarithmes hyperboliques, et faisant $x_0 = x$.

On sait qu'étant donnée la série

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{1 + \frac{z}{1.2} + \frac{z^2}{1.2.3} \ldots + \frac{z^x}{1.2.3\ldots.(x+1)} + \text{etc.}} = 1 + y_1 z + y_2 z^2 \ldots + y_x z^x + \text{etc.};$$

les nombres de Bernoulli seront exprimés par la relation

$$B_x = 1.2.3\ldots.(x+1) y_{x+1}.$$

Si à présent on fait dans la formule (3.)

$$a_{x_u} = \frac{1}{1.2.3\ldots.(x_u+1)} = \frac{1}{[x_u+1]^{x_u+1}};$$

et $m = -1$; on aura

$$B_{x-1} = [x] y_x = -[x]^x \left\{ \frac{1}{[x+1]^{x+1}} + \sum_{u=1}^{u=x} e^{\sum_{s=1}^{s=u+1} \log \sum_{x_s=u-s+1}^{x_s=x_{s-1}}} \frac{(-1)^u}{[x_u+1]^{x_u+1}} \left[\frac{1}{[x_{u-1}-x_u+1]^{x_{u-1}-x_u+1}} \right]^u \right\}$$

$$= 1.2.3\ldots.x \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{1.2.3\ldots.(x+1)} - \frac{1}{1.2.3\ldots.x}\left(-\frac{1}{1.2}\right) - \frac{1}{1.2.3\ldots.(x-1)}\left(-\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2}\left(-\frac{1}{1.2}\right)\right)\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{1.2}\left(-\frac{1}{1.2.3\ldots.x} - \frac{1}{1.2.3\ldots.(x-1)}\left(-\frac{1}{1.2}\right) - \text{etc.}\right). \end{array} \right\}$$

En faisant dans cette expression successivement $x = 1, 2, 3$, etc., on obtiendra les valeurs déjà connues

$B_0 = -\frac{1}{2}$; $B_1 = 2(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{6}$; $B_2 = 6(-\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8}) = 0$; etc.

Cette formule est assez simple, et le calcul numerique, pour chaque cas particulier, en est plus aisé que dans les expressions connues jusqu'à présent: d'ailleurs elle est générale, et fournit même la valeur de $B_0 = -\frac{1}{2}$, que d'autres formules (celle de La Place par exemple) ne donnent pas: nous l'avons rapportée comme une application très-simple du développement du polynome que nous venons de trouver.

---

graphiques, que nous aurions rencontrées dans l'impression des formules exposées dans ce mémoire; difficultés que le manque des caractères nécessaires rend plus grandes en Toscane qu'ailleurs.

Les nombres de Bernoulli ne sont au fond autre chose que les coëfficiens des diverses puissances de la variable dans le développement de Σz^n, multipliés par des nombres connus: s'il s'agissait de développer la fonction indéterminée $\Sigma\varphi(z)$ par les puissances ascendantes de z, on aurait un résultat assez simple que nous allons faire connaître.

Etant donnée l'équation

$$\varphi(z) = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 \ldots + e_x z^x + \text{etc.},$$

elle se réduit à

$$e^{uz} = 1 + uz + \frac{u^2 z^2}{1.2} \ldots + \frac{u^x z^x}{1.2.3\ldots x} + \text{etc.};$$

lorsque $\varphi(z) = e^{uz}$, et on aura dans ce cas

$$e_0 = 1;\ e_1 = u;\ e_2 = \frac{u^2}{1.2};\ \ldots\ e_x = \frac{u^x}{1.2.3\ldots x};\ \text{etc.}$$

Si l'on fait à présent

$$4.\quad \Sigma\varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 \ldots + a_x z^x + \text{etc.},$$
$$\Sigma n^{uz} = b_1 z + b_2 z^2 \ldots + b_x z^x + \text{etc.},$$

a_x sera une fonction linéaire des coëfficiens e_{x-1}, e_x, e_{x+1}, etc., et b_x sera une fonction semblable des coëfficiens

$$\frac{u^{x-1}}{1.2.3\ldots(x-1)},\ \frac{u^x}{1.2.3\ldots x},\ \frac{u^{x+1}}{1.2.3\ldots(x+1)},\ \text{etc.},$$

et les diverses puissances de u, u^2, u^3, etc., resteront indépendantes les unes des autres, de même que les coëfficiens e_0, e_1, e_2, $\ldots$ e_x; et il ne pourra pas y avoir de réduction, de telle manière que si l'on connait la valeur de b_x, on trouvera celle de a_x en substituant

$$1.2.3\ldots x\, e_x = \frac{d^x.\varphi(v)}{dv^x}$$

(où il faut faire $v = 0$ après les différentiations) au lieu de u^x.

Maintenant l'on a $\Sigma e^{uz} = \frac{e^{uz}-1}{e^u-1}$, et comme nous avons trouvé précédemment le développement de

$$\frac{1}{e^u-1} = \frac{1}{u} + y_1 + y_2 u + y_3 u^2 + \text{etc.};$$

on aura

$$\Sigma e^{uz} = \left(\frac{1}{u} + y_1 + y_2 u + y_3 u^2 \ldots + y_x u^{x-1} + \text{etc.}\right)\left(uz + \frac{u^2 z^2}{1.2} + \frac{u^3 z^3}{1.2.3} \ldots + \frac{u^x z^x}{1.2.3\ldots x} + \text{etc.}\right)$$
$$= b_1 z + b_2 z^2 \ldots + b_x z^x + \text{etc.},$$

et par suite

$$b_x = \frac{u^{x-1}}{1.2.3\ldots x} + \frac{y_1 u^x}{1.2.3\ldots x} + \frac{y_2 u^{x+1}}{1.2.3\ldots x} + \text{etc.}$$

Si l'on substitue dans cette équation $\frac{d^x.\varphi(v)}{dv^x}$ au lieu de u^x, on aura en général

$$a_x = \frac{1}{1.2.3....x}\left(\frac{d^{x-1}.\varphi(v)}{dv^{x-1}} + \gamma_1 \frac{d^x.\varphi(v)}{dv^x} + \gamma_2 \frac{d^{x+1}.\varphi(v)}{dv^{x+1}} + \text{etc.}\right).$$

Ce coëfficient peut aussi s'exprimer en termes finis de cette manière

$$a_x = \frac{1}{1.2.3....x}\left(\frac{d.\varphi(v)}{dv}\right)^x \left(e^{\frac{d.\varphi(v)}{dv}} - 1\right)^{-1};$$

pourvu qu'en développant on change $\left(\frac{d.\varphi(v)}{dv}\right)^p$ en $\frac{d^p.\varphi(v)}{dv^p}$, comme on le fait pour d'autres formules de la même espèce. Alors en substituant dans l'équation (4.) les valeurs de a_1, a_2, a_3, etc., exprimées de cette manière, on aura la formule

$$\Sigma\varphi(z) = \left(z\frac{d.\varphi(v)}{dv} + \frac{z^2}{1.2}\left(\frac{d.\varphi(v)}{dv}\right)^2 .... + \frac{z^x}{1.2.3....x}\left(\frac{d.\varphi(v)}{dv}\right)^x + \text{etc.}\right)\left(e^{\frac{d.\varphi(v)}{dv}} - 1\right)^{-1}$$

$$= \left(e^{z\frac{d.\varphi(v)}{dv}} - 1\right)\left(e^{\frac{d.\varphi(v)}{dv}} - 1\right)^{-1},$$

dans laquelle il faut changer $\left(\frac{d.\varphi(v)}{dv}\right)^p$ en $\frac{d^p.\varphi(v)}{dv^p}$, après avoir développé, et faire $v = 0$, après les différentiations. On pourra développer de la même manière $\Sigma^2\varphi(z)$; et en général $\Sigma^n\varphi(z)$, $\Delta^n\varphi(z)$, etc.

Etant donnée l'équation

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} .... - a_n = 0,$$

si l'on exprime par P_m la somme des puissances m^{mes} de ses racines, on a toujours

$$5. \quad P_m = a_1 P_{m-1} + a_2 P_{m-2} ..... + m a_m,$$

et par suite

$$P_{m-1} = a_1 P_{m-2} + a_2 P_{m-3} ..... + (m-1) a_{m-1},$$
$$P_{m-2} = a_1 P_{m-3} + a_2 P_{m-4} ..... + (m-2) a_{m-2},$$
$$\text{.....} \quad \text{etc.},$$

et si l'on substitue ces dernières valeurs dans l'équation (5.) il en résultera la formule

$$P_m = m a_m + (m-1) a_{m-1}(a_1) + (m-2) a_{m-2}(a_2 + a_1(a_1)) .....+ (m-t) a_{m-t}\beta_t + \text{etc.},$$

dans laquelle le coëfficient β_t se forme en changeant m en t dans tous les termes précédens, et négligeant tous les coëfficiens numériques externes. Si l'on avait commencé par substituer les valeurs de P_1, P_2, P_3, etc., dans l'équation (5.), on aurait obtenu l'expression

$$P_m = m a_m + a_{m-1}(a_1) + a_{m-2}(2a_2 + a_1(a_1)) + a_{m-3}\left(3a_3 + a_2(a_1) + n_1(a_2 + a_1(a_1))\right) + \text{etc.},$$

qui ne diffère de la précédente, que par la disposition des termes dont elle se compose.

On doit observer que ces formules sont exactes seulement pour des valeurs de m entières, positives, et plus grandes que zéro; et qu'il faut s'arrêter lorsqu'on trouve des coëfficiens à indices plus petits que l'unité. Lorsque $m=0$, on a $P_0=n$, et si m a une valeur négative, on divisera l'équation proposée par $a_n x^n$, et en faisant $\frac{1}{x}=y$, on cherchera la somme des puissances $-m^{\text{mes}}$ des racines de la nouvelle équation en y qui en résultera.

Si l'on décompose la série qui exprime la valeur de P_m, en autant de séries partielles qu'il peut y avoir de facteurs algébriques, on aura

$$P_m = \left\{\begin{array}{l} m\,a_m \\ +(m-1)\,a_{m-1}(a_1)+(m-2)\,a_{m-2}(a_2)+(m-3)\,a_{m-3}(a_3)+\text{etc.} \\ +(m-2)\,a_{m-2}(a_1)(a_1)+(m-3)\,a_{m-3}(a_2\,a_1+a_1\,a_2)+\text{etc.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\text{etc.} \end{array}\right\},$$

et on trouvera aisément, comme on l'a fait pour le polynome,

$$P_m = m\,a_m + \sum_{x=1}^{x=m} e^{\sum_{s=1}^{s=x+1} \log \sum_{m_s=x-s+1}^{m_s=m_{s-1}} (m-m_1)\,a_{m_x}\left[a_{m_{x-1}-m_x}\right]^x},$$

en faisant toujours $m_0=m$.

Il est clair que l'on pourra écrire aussi

$$P_m = m\,a_m + \sum_{x=1}^{x=m} e^{\sum_{s=1}^{s=x+1} \log \sum_{m_s=x-s+1}^{m_s=m_{s-1}} (m-m_1)\,a_{m_x}\; e^{\sum_{z=0}^{z=x} \log a_{m_z-m_{z+1}}}},$$

et ces deux expressions seront équivalentes. En appliquant cette formule à l'équation

$$(x-1)^{-n}(x^n-1)(x^{n-1}-1)(x^{n-2}-1)\ldots.(x^2-1)(x-1)=0,$$

et en indiquant par $\int(n)$ la somme des diviseurs de n, on aura par la notation de Vandermonde l'expression

$$\int(n)-n =$$

$$n\{-([n+n-1^{\,n\ -n}][0]-[n+n-2^{\,n-1\ 1-n}][0]-[n+n-3^{\,n-2\ 2-n}][0]\ldots\pm[n+n-\tfrac{1}{2}(3z^2\pm z)-1^{\,n-\frac{1}{2}(3z^2\pm z)\ \frac{1}{2}(3z^2\pm z)-n}][0]\ldots\text{etc.})\}$$

$$+(n-1)\{-([n+n-2^{\,n-1\ 1-n}][0]-[n+n-3^{\,n-2\ 2-n}][0]-[n+n-4^{\,n-3\ 3-n}][0]\ldots\pm[n+n-\tfrac{1}{2}(3z^2\pm z)-2^{\,n-1-\frac{1}{2}(3z^2\pm z)\ \frac{1}{2}(3z^2\pm z)+1-n}][0]\ldots\text{etc.})\}([n^{\,1\ -1}][0]-[n-1^{\,0\ -0}][0])$$

. . . . . .

$$+(n-u)\{-([n+n-u-1^{\,n-u\ u-n}][0]-[n+n-u-2^{\,n-u-1\ u-n+1}][0]\ldots\pm[n+n-u-\tfrac{1}{2}(3z^2\pm z)-1^{\,n-u-\frac{1}{2}(3z^2\pm z)\ \frac{1}{2}(3z^2\pm z)+u-n}][0]\ldots\text{etc.})\}A_u$$

. . . . . .

dans laquelle la loi des termes est manifeste, puisque le coëfficient A_u se forme en changeant en u la seconde n comprise entre les crochets des factorielles, dans tous les termes qui le précèdent, et en faisant $n=u$ dans tous les exposans de ces mêmes factorielles: pourvu que l'on égale à l'unité tous les coëfficiens numériques externes (tels que n, $n-1$, $n-2$, etc.) des termes précédens. Ainsi par exemple un terme de la forme $\pm(n-s)[n+n-s-1^{\,n-s\ s-n}][0]$, se changera en celui-ci $\pm[n+u-s-1^{\,u-s\ s-u}][0]$. Il est clair que toutes ces séries s'arrêteront lorsque dans un terme quelconque de la forme $[n+A-1^{\,A\ -A}][0]$, A sera un nombre entier négatif.

Ainsi par exemple en faisant dans cette formule successivement $n=1$, $n=2$, $n=3$, etc., on aura

$$\int(1)=1-([1^{\,1\ -1}][0]-[0^{\,0\ -0}][0])=1-1+1=1,$$

$$\int(2)=2-2([3^{\,2\ -2}][0]-[2^{\,1\ -1}][0]-[1^{\,0\ -0}][0])+([2^{\,1\ -1}][0]-[1^{\,0\ -0}][0])([2^{\,1\ -1}][0]-[1^{\,0\ -0}][0])$$

$$=2-2\left(\frac{3.2}{1.2}-2-1\right)+(2-1)(2-1)=2-0+1=3.$$

$$\int(3)=3-3([5^{\,3\ -3}][0]-[4^{\,2\ -2}][0]-[3^{\,1\ -1}][0])+2([4^{\,2\ -2}][0]-[3^{\,1\ -1}][0]-[2^{\,0\ -0}][0])([3^{\,1\ -1}][0]-[2^{\,0\ -0}][0])$$

$$+([3^{\,1\ -1}][0]-[2^{\,0\ -0}][0])([4^{\,2\ -2}][0]-[3^{\,1\ -1}][0]-[2^{\,0\ -0}][0]-([3^{\,1\ -1}][0]-[2^{\,0\ -0}][0])^2)$$

$$=3-3\left(\frac{5.4.3}{1.2.3}-\frac{4.3}{1.2}-3\right)+2\left(\frac{4.3}{1.2}-3-1\right)(3-1)+(3-1)\left(\frac{4.3}{1.2}-3-1-(3-1)^2\right)$$

$$=3-3(10-6-3)+2(6-4)2+2(6-4-4)=3-3+8-4=4$$

. . . . . etc.

S'il s'agissait de déterminer les coëfficiens de l'équation

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}\ldots\ldots+A_n=0,$$

dont les racines sont connues, en indiquant par P_{z_0} la somme des puissances z_0^{mes} de ses racines, on aurait

$$A_{z_0} = -\frac{1}{z_0} P_{z_0} - \frac{1}{z_0} \sum_{x=1}^{x=z_0} e^{\sum_{s=1}^{s=x+1} \log \sum_{z_s=x-s+1}^{z_s=z_{s-1}} P_{z_0} \left[\frac{1}{z_x} P_{z_{x-1}-z_x}\right]^x (-1)^x}.$$

Etant proposé d'éliminer y entre les deux équations

$$y^m + e_1 y^{m-1} + e_2 y^{m-2} \ldots\ldots + e_m = 0;$$
$$y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} \ldots\ldots + b_n = 0;$$

l'équation résultante après l'élimination sera celle-ci

$$6. \quad 1 + \sum_{t_0=1}^{t_0=mn+1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{t_0} P_{t_0} A_{t_0-1} \\ \quad \sum_{s=1}^{s=x+1} \log \sum_{t_s=x-s+1}^{t_s=t_{s-1}} \\ + \sum_{x=1}^{x=t_0} e \end{array} \right. \sum_{z=0}^{z=x} \log \left(\frac{1}{t_z} P_{t_z - t_{z+1}} A_{t_z - t_{z+1} - 1} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{t_x} P_{t_x} A_{t_x - 1} \end{array} \right\} e .$$

Dans cette formule A_v représente le coëfficient de z_v dans le développement de la fraction

$$\frac{b_1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 \ldots\ldots + n b_n z^{n-1}}{1 + b_1 z + b_2 z^2 \ldots\ldots + b_n z^n},$$

et P_q exprime la somme des puissances $-q^{\text{mes}}$ des racines de l'équation

$$y^m + e_1 y^{m-1} + e_2 y^{m-2} \ldots\ldots + e_m = 0;$$

et comme les valeurs de A_v et de P_q peuvent se déduire des formules que nous avons trouvées précédemment, on substituera ces valeurs dans l'équation (6.) et le problème sera résolu complètement.

Nous avons trouvé depuis long-temps les formules démontrées dans ce mémoire: elles ont été exposées dans deux mémoires que nous avons présentés en 1823, et en 1825, à l'Académie Royale des Sciences de Paris.

8.

Neuer Beweis der Gaufsischen Formeln in der sphärischen Trigonometrie.

(Von Herrn *L. Feldt*, Prof. der Math. zu Braunsberg in Ost-Preufsen.)

Wie wichtig in der sphärischen Astronomie die vom Herrn Professor Ritter Gaufs zwischen den 6 Stücken eines Raumdreiecks entdeckten Relationen sind, zeigt die ganze *Theoria motus* genugsam. Der Unterzeichnete glaubt daher nichts Unnützes zu unternehmen, wenn er zu den verschiedenen Beweisen dieser eleganten Formeln noch einen, und zwar — wie es scheint — minder bekannten hinzufügt.

Bezeichnet man die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks mit a, b, c, die diesen Seiten in derselben Ordnung gegenüberstehenden Winkel aber mit A, B, C, so ist bekanntlich

$$\alpha.\quad \begin{cases} \sin A[\sin b \pm \sin c] = \sin a[\sin B \pm \sin C], \\ \sin B[\sin a \pm \sin c] = \sin b[\sin A \pm \sin C], \\ \sin C[\sin a \pm \sin b] = \sin c[\sin A \pm \sin B]. \end{cases}$$

Setzt man nun z. B. in der ersten der vorstehenden Gleichungen

$$\sin A = 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A, \quad \sin a = 2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a;$$

verwandelt die Summen und Differenzen der Sinus in ihre Producte, so ist

$$\beta.\quad \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cdot\dfrac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(b-c)} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}\cdot\dfrac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}, \\ \dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}(b-c)}\cdot\dfrac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(b+c)} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}. \end{cases}$$

Dafs jede von den vorstehenden Gleichungen ($\beta.$) das Product zweier Gaufsischen ist, bedarf keiner Erinnerung.

Der Kaiserl. Astronom und Rector der Universität in Wilna, Herr Professor Ritter v. Sniadecki, übergab den 24sten März 1811 der Kaiserl. Academie der Wissenschaften in Petersburg eine Abhandlung, in welcher er auf eine sehr bündige Weise zeigt, dafs die von Gaufs in der *Theoria mot. corp. coelest.* aufgestellten und daselbst bei sehr wichtigen astronomischen Aufgaben angewandten Relationen, die auf den einfachsten Ausdruck zurückgeführten Cagnolischen seien. In der dritten Ausgabe seiner sphärischen Trigonometrie, worin sich zugleich eine recht schöne

Ableitung aller Parallaxen befindet, bemerkt Sniadecki ausdrücklich *), er sei, als er den Beweis der gedachten Formeln noch kürzer geben wollte, auf die Productenformeln (β.) gekommen, habe aber aus ihnen die Gaufsischen Gleichungen nicht erhalten können. Meine Absicht ist nun, in dem Folgenden zu zeigen, wie aus den obigen von Sniadecki angedeuteten Productenformeln die Gaufsischen Gleichungen dennoch erhellen.

Zuvörderst mögen noch einige Ausdrücke hier stehen, die man nur selten in unsern Lehrbüchern angedeutet findet, die aber dennoch leicht aus der Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie erhalten werden. Es sind folgende:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c};\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}B}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b};\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}B}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin b};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin a};\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin a};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin c};\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin c};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b};\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a};\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a}.$$

Dieser Ausdrücke, die hier Verwandlungsformeln genannt werden mögen, hat sich auch Puissant in seiner *Géodésie* zur Ableitung der Gaufsischen Gleichungen bedient; uns werden sie nicht minder bei der Trennung obiger von Sniadecki angedeuteten Productenformeln von Nutzen sein, wie sich's sofort zeigen wird.

Man nehme die erste von den Gleichungen (α.), und zwar zunächst mit dem obern Zeichen, so findet man, wie leicht zu sehen, die Productenformel:

$$\gamma.\qquad \sin A\sin\tfrac{1}{2}(b+c)\cos\tfrac{1}{2}(b-c)=\sin a\sin\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B-C).$$

In dieser Formel lassen sich nun mittelst der obigen Verwandlungsformeln die zwei in ihr vorkommenden Gaufsischen Gleichungen leicht absondern.

---

*) *Trigonometrya kulista analytieznie wytozona, zprzystósowaniem do rozmiarn ziemi i do zadań astronomicznych przez* Jana Sniadeckiego, *Warszawa* 1820. (In's Deutsche übersetzt von L. Feldt. Leipzig bei Schwickert. 1828. pag. 23.

Setzt man nämlich in der Productenformel (γ.)

$$\sin\tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin a}\left[\sin\tfrac{1}{2}(a+(b-c))+\sin\tfrac{1}{2}(a-(b-c))\right],$$

so verwandelt sie sich, nach gehöriger Entwickelung, Zusammenziehung und Weglassung der gleichen Factoren auf beiden Seiten, in diese:

$$\frac{\sin A\sin\frac{1}{2}(b+c)}{2\cos\frac{1}{2}A} = \sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B-C),$$

aus welcher, wenn man nun noch

$$\sin A = 2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A$$

setzt, sofort folgende Gaufsische Gleichung erhält:

$$\text{I.}\quad \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(b+c) = \sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B-C).$$

Eben so leicht wird nun auch die zweite Gaufsische Gleichung erhalten; denn wird in der Productenformel (γ.)

$$\cos\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin a}\left[\sin\tfrac{1}{2}(a+(b+c))+\sin((b+c)-a)\right]$$

gesetzt, so ist bei einer der vorangehenden ähnlichen Behandlungsweise

$$\text{II.}\quad \cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b-c) = \cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}(B+C).$$

Ferner ist leicht zu sehen, dafs wenn man in der ersten von den Gleichungen (α.) das untere Zeichen nimmt und in der sich ergebenden Productenformel

$$\sin A\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b-c) = \sin a\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\sin\tfrac{1}{2}(B-C)$$

erstens:

$$\cos\tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin a}\left[\sin\tfrac{1}{2}(a+(b+c))-\sin\tfrac{1}{2}((b+c)-a)\right];$$

dann:

$$\sin\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin a}\left[\sin\tfrac{1}{2}(a+(b-c))-\sin\tfrac{1}{2}(a-(b-c))\right]$$

setzt und auf die nun bereits bekannte Weise verfährt, folgende zwei Gleichungen erhellen werden, nämlich:

$$\text{III.}\quad \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(b-c) = \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}(B-C),$$

$$\text{IV.}\quad \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b+c) = \cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B+C).$$

Die vorstehende Entwickelung zeigt, dafs die eben angedeuteten Verwandlungsformeln oft von nicht unbedeutendem Nutzen werden können; sie verdienen daher auf jeden Fall in unsern Lehrbüchern angeführt zu werden.

Um bei dem Gaufsischen Gesetze alle Combinationen von Seiten und Winkeln zu haben, setze ich noch die übrigen acht Formeln her.

Aus der zweiten von den obigen Gleichungen (α.), nämlich aus

$$\sin B[\sin a \pm \sin c] = \sin b[\sin A \pm \sin C)$$

erhält man folgende vier:

$$\text{V.} \quad \sin\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}(a+c) = \sin\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}(A-C),$$
$$\text{VI.} \quad \cos\tfrac{1}{2}B \sin\tfrac{1}{2}(a-c) = \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}(A-C),$$
$$\text{VII.} \quad \cos\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}(a-c) = \cos\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}(A+C),$$
$$\text{VIII.} \quad \sin\tfrac{1}{2}B \cos\tfrac{1}{2}(a+c) = \cos\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}(A+C);$$

aus der Gleichung

$$\sin C[\sin a \pm \sin b] = \sin c[\sin A \pm \sin B],$$

aber diese:

$$\text{IX.} \quad \cos\tfrac{1}{2}C \sin\tfrac{1}{2}(a+b) = \sin\tfrac{1}{2}c \cos\tfrac{1}{2}(A-B),$$
$$\text{X.} \quad \cos\tfrac{1}{2}C \cos\tfrac{1}{2}(a-b) = \cos\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}(A+B),$$
$$\text{XI.} \quad \cos\tfrac{1}{2}C \sin\tfrac{1}{2}(a-b) = \sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}(A-B),$$
$$\text{XII.} \quad \sin\tfrac{1}{2}C \cos\tfrac{1}{2}(a+b) = \cos\tfrac{1}{2}c \cos\tfrac{1}{2}(A+B).$$

Auf die vorstehenden Formeln ist bekanntlich aufser Gaufs auch noch Mollweide *) und Delambre **) gekommen. Delambre leitet diese Formeln wie es scheint auf einem Umwege aus den Nepperschen Analogien ab. Aufser dem schon erwähnten Sniadeckischen und Puissantschen Beweise, führt auch noch Servoir einen ***), der aber, wenn man von den in diesem Aufsatze hier angewandten Verwandlungsformeln Gebrauch macht, noch etwas eleganter ausfallen möchte. Dafs übrigens die Gaufsischen Formeln sich noch auf verschiedene andere Arten entwickeln lassen, darf nicht erst erwähnt werden.

---

*) Monatliche Correspondenz von Zach, XVIII. Band, Seite 394. ff.
**) *Connoissance des tems.* 1809. *pag.* 45.
***) *Annales de Mathématiques, par* Gergonne. *Tom. II. pag.* 86.

9.

Potenzial- oder cyklisch-hyperbolische Functionen.

(Von Hrn. Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1., 14. und 28. im vorigen Bande.)

I.

Tabelle der Längezahlen (mit sieben Decimalziffern) aller Kreisbogen für den Radius = 1 von Minute zu Minute nach beiden Kreis-Eintheilungen, behufs der Zurückführung der hyperbolischen Functionen auf die cyklischen und umgekehrt.

N. E.			Alte Einth.		N. E.			Alte Einth.	
$k=0°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=0°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
0,00	0,000 0000	15 71	00 00 00 0	48 49	0,50	0,007 8541	15 71	00 27 00 0	48 49
0,01	0,000 1571	15 71	00 00 32 4	48 49	0,51	0,008 0112	15 70	00 27 32 4	48 46
02	00 3142	15 70	01 04 8	48 49	52	08 1682	15 71	28 04 8	48 49
03	00 4712	15 71	01 37 2	48 49	53	08 3253	15 71	28 37 2	48 49
04	00 6283	15 71	02 09 6	48 49	54	08 4824	15 71	29 09 6	48 49
05	00 7854	15 71	02 42 0	48 49	55	08 6395	15 71	29 42 0	48 49
0,06	0,000 9525	15 71	00 03 14 4	48 49	0,56	0,008 7966	15 71	00 30 14 4	48 49
07	01 0996	15 70	03 46 8	48 46	57	08 9537	15 70	30 46 8	48 46
08	01 2566	15 71	04 19 2	48 49	58	09 1107	15 71	31 19 2	48 49
09	01 4137	15 71	04 51 6	48 49	59	09 2678	15 71	31 51 6	48 49
10	01 5708	15 71	05 24 0	48 49	60	09 4249	15 71	32 24 0	48 49
0,11	0,001 7279	15 71	00 05 56 4	48 49	0,61	0,009 5820	15 71	00 32 56 4	48 49
12	01 8850	15 70	06 28 8	48 46	62	09 7391	15 71	33 28 8	48 49
13	02 0420	15 71	07 01 2	48 49	63	09 8962	15 71	34 01 2	48 49
14	02 1991	15 71	07 33 6	48 49	64	10 0533	15 71	34 33 6	48 49
15	02 3562	15 71	08 06 0	48 49	65	10 2104	15 71	35 06 0	48 49
0,16	0,002 5133	15 71	00 08 38 4	48 49	0,66	0,010 3675	15 70	00 35 38 4	48 46
17	02 6704	15 70	09 10 8	48 46	67	10 5245	15 71	36 10 8	48 49
18	02 8274	15 71	09 43 2	48 49	68	10 6816	15 71	36 43 2	48 49
19	02 9845	15 71	10 15 6	48 49	69	10 8387	15 71	37 15 6	48 49
20	03 1416	15 71	10 48 0	48 49	70	10 9958	15 71	37 48 0	48 49
0,21	0,003 2987	15 71	00 11 20 4	48 49	0,71	0,011 1529	15 71	00 38 20 4	48 49
22	03 4558	15 70	11 52 8	48 46	72	11 3100	15 71	38 52 8	48 49
23	03 6128	15 71	12 25 2	48 49	73	11 4671	15 71	39 25 2	48 49
24	03 7699	15 71	12 57 6	48 49	74	11 6242	15 71	39 57 6	48 49
25	03 9270	15 71	13 30 0	48 49	75	11 7813	15 71	40 30 0	48 49
0,26	0,004 0841	15 71	00 14 02 4	48 49	0,76	0,011 9384	15 70	00 41 02 4	48 46
27	04 2412	15 71	14 34 8	48 49	77	12 0974	15 71	41 34 8	48 49
28	04 3982	15 71	15 07 2	48 49	78	12 2525	15 71	42 07 2	48 49
29	04 5553	15 71	15 39 6	48 49	79	12 4096	15 71	42 39 6	48 49
30	04 7124	15 71	16 12 0	48 49	80	12 5667	15 71	43 12 0	48 49
0,31	0,004 8695	15 71	00 16 44 4	48 49	0,81	0,012 7238	15 71	00 43 44 4	48 49
32	05 0266	15 71	17 16 8	48 49	82	12 8809	15 71	44 16 8	48 49
33	05 1837	15 70	17 49 2	48 46	83	13 0380	15 71	44 49 2	48 49
34	05 3407	15 71	18 21 6	48 49	84	13 1951	15 71	45 21 6	48 49
35	05 4978	15 71	18 54 0	48 49	85	13 3522	15 70	45 54 0	48 46
0,36	0,005 6549	15 71	00 19 26 4	48 49	0,86	0,013 5092	15 71	00 46 26 4	48 49
37	05 8120	15 71	19 58 8	48 49	87	13 6663	15 71	46 58 8	48 49
38	05 9691	15 71	20 31 2	48 49	88	13 8234	15 71	47 31 2	48 49
39	06 1261	15 71	21 03 6	48 49	89	13 9805	15 71	48 03 6	48 49
40	06 2832	15 71	21 36 0	48 49	90	14 1376	15 71	48 36 0	48 49
0,41	0,006 4403	15 71	00 22 08 4	48 49	0,91	0,014 2947	15 71	00 49 08 4	48 49
42	06 5974	15 71	22 40 8	48 49	92	14 4518	15 71	49 40 8	48 49
43	06 7545	15 71	23 13 2	48 49	93	14 6089	15 71	50 13 2	48 49
44	06 9116	15 70	23 45 6	48 46	94	14 7660	15 71	50 45 6	48 49
45	07 0686	15 71	24 18 0	48 49	95	14 9231	15 71	51 18 0	48 49
0,46	0,007 2257	15 71	00 24 50 4	48 49	0,96	0,015 0802	15 71	00 51 50 4	48 49
47	07 3828	15 71	25 22 8	48 49	97	15 2373	15 71	52 22 8	48 49
48	07 5399	15 71	25 55 2	48 49	98	15 3944	15 71	52 55 2	48 49
49	07 6970	15 71	26 27 6	48 49	99	15 5515	15 71	53 27 6	48 49
50	07 8541		27 00 0		1,00	15 7086		54 00 0	

N. E. $k=1°$	ϱ. k.	Alte Einth. D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
1,00	0,015 7086	15 71	00 54 00 0	48 49
1,01	0,015 8657	15 71	00 54 32 4	48 49
02	16 0228	15 71	55 04 8	48 49
03	16 1799	15 71	55 37 2	48 49
04	16 3370	15 71	56 09 6	48 49
05	16 4941	15 71	56 42 0	48 49
1,06	0,016 6512	15 71	00 57 14 4	48 49
07	16 8083	15 71	57 46 8	48 49
08	16 9654	15 71	58 19 2	48 49
09	17 1225	15 71	58 51 6	48 49
10	17 2796	15 71	59 24 0	48 49
1,11	0,017 4367	15 71	00 59 56 4	48 49
12	17 5938	15 71	01 00 28 8	48 49
13	17 7509	15 71	01 01 2	48 49
14	17 9080	15 71	01 33 6	48 49
15	18 0651	15 71	02 06 0	48 49
1,16	0,018 2222	15 71	01 02 38 4	48 49
17	18 3793	15 71	03 10 8	48 49
18	18 5364	15 71	03 43 2	48 49
19	18 6935	15 71	04 15 6	48 49
20	18 8507	15 71	04 48 0	48 49
1,21	0,019 0078	15 71	01 05 20 4	48 49
22	19 1649	15 71	05 52 8	48 49
23	19 3220	15 71	06 25 2	48 49
24	19 4791	15 71	06 57 6	48 49
25	19 6362	15 71	07 30 0	48 49
1,26	0,019 7933	15 71	01 08 02 4	48 49
27	19 9504	15 71	08 34 8	48 49
28	20 1075	15 71	09 07 2	48 49
29	20 2646	15 72	09 39 6	48 52
30	20 4218	15 71	10 12 0	48 49
1,31	0,020 5789	15 71	01 10 44 4	48 49
32	20 7360	15 71	11 16 8	48 49
33	20 8931	15 71	11 49 2	48 49
34	21 0502	15 71	12 21 6	48 49
35	21 2073	15 71	12 54 0	48 49
1,36	0,021 3644	15 71	01 13 26 4	48 49
37	21 5215	15 71	13 58 8	48 49
38	21 6786	15 71	14 31 2	48 49
39	21 8357	15 72	15 03 6	48 52
40	21 9929	15 71	15 36 0	48 49
1,41	0,022 1500	15 72	01 16 08 4	48 52
42	22 3072	15 71	16 40 8	48 49
43	22 4643	15 71	17 13 2	48 49
44	22 6214	15 71	17 45 6	48 49
45	22 7785	15 71	18 18 0	48 49
1,46	0,022 9356	15 71	01 18 50 4	48 49
47	23 0927	15 72	19 22 8	48 52
48	23 2499	15 71	19 55 2	48 49
49	23 4070	15 71	20 27 6	48 49
50	23 5641		21 00 0	

N. E. $k=1°$	ϱ. k.	Alte Einth. D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
1,50	0,023 5641	15 71	01 21 00 0	48 49
1,51	0,023 7212	15 71	01 21 32 4	48 49
52	23 8783	15 72	22 04 8	48 52
53	24 0355	15 71	22 37 2	48 49
54	24 1926	15 72	23 09 6	48 52
55	24 3498	15 71	23 42 0	48 49
1,56	0,024 5069	15 71	01 24 14 4	48 49
57	24 6640	15 71	24 46 8	48 49
58	24 8211	15 71	25 19 2	48 49
59	24 9782	15 72	25 51 6	48 52
60	25 1354	15 71	26 24 0	48 49
1,61	0,025 2925	15 71	01 26 56 4	48 49
62	25 4496	15 72	27 28 8	48 52
63	25 6068	15 71	28 01 2	48 49
64	25 7639	15 71	28 33 6	48 49
65	25 9210	15 72	29 06 0	48 52
1,66	0,026 0782	15 71	01 29 38 4	48 49
67	26 2353	15 71	30 10 8	48 49
68	26 3924	15 72	30 43 2	48 52
69	26 5496	15 71	31 15 6	48 49
70	26 7067	15 71	31 48 0	48 49
1,71	0,026 8638	15 71	01 32 20 4	48 49
72	27 0209	15 72	32 52 8	48 52
73	27 1781	15 71	33 25 2	48 49
74	27 3352	15 71	33 57 6	48 49
75	27 4923	15 72	34 30 0	48 52
1,76	0,027 6495	15 72	01 35 02 4	48 52
77	27 8067	15 71	35 34 8	48 49
78	27 9638	15 71	36 07 2	48 49
79	28 1209	15 72	36 39 6	48 52
80	28 2781	15 71	37 12 0	48 49
1,81	0,028 4352	15 72	01 37 44 4	48 52
82	28 5924	15 71	38 16 8	48 49
83	28 7495	15 72	38 49 2	48 52
84	28 9067	15 71	39 21 6	48 49
85	29 0638	15 72	39 54 0	48 52
1,86	0,029 2210	15 71	01 40 26 4	48 49
87	29 3781	15 72	40 58 8	48 52
88	29 5353	15 71	41 31 2	48 49
89	29 6924	15 72	42 03 6	48 52
90	29 8496	15 71	42 36 0	48 49
1,91	0,030 0067	15 72	01 43 08 4	48 52
92	30 1639	15 71	43 40 8	48 49
93	30 3210	15 72	44 13 2	48 52
94	30 4782	15 71	44 45 6	48 49
95	30 6353	15 72	45 18 0	48 52
1,96	0,030 7925	15 71	01 45 50 4	48 49
97	30 9496	15 72	46 22 8	48 52
98	31 1068	15 71	46 55 2	48 49
99	31 2639	15 72	47 27 6	48 52
2,00	31 4211		48 00 0	

N. E.		Alte Einth.		N. E.		Alte Einth.	
$k=2^\circ$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.	$k=2^\circ$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	Gr. M.			Gr. M. S.
2,00	0,031 4211	15 71	01 48 00 0 48 49	2,50	0,039 2800	15 72	02 15 00 4 48 52
2,01	0,031 5782	15 72	01 48 32 4 48 52	2,51	0,039 4372	15 72	02 15 33 4 48 52
02	31 7354	15 71	49 04 8 48 49	52	39 5944	15 72	16 04 8 48 52
03	31 8925	15 72	49 37 2 48 52	53	39 7516	15 72	16 37 2 48 52
04	32 0497	15 72	50 09 6 48 52	54	39 9088	15 72	17 09 6 48 52
05	32 2069	15 71	50 42 0 48 49	55	40 0660	15 72	17 42 0 48 52
2,06	0,032 3640	15 72	01 51 14 4 48 52	2,56	0,040 2232	15 72	02 18 14 4 48 52
07	32 5212	15 72	51 46 8 48 52	57	40 3804	15 72	18 46 8 48 52
08	36 6784	15 71	52 19 2 48 49	58	40 5376	15 72	19 19 2 48 52
09	32 8355	15 72	52 51 6 48 52	59	40 6948	15 73	19 51 6 48 55
10	32 9927	15 71	53 24 0 48 49	60	40 8521	15 72	20 24 0 48 52
2,11	0,033 1498	15 72	01 53 56 4 48 52	2,61	0,041 0093	15 72	02 20 56 4 48 52
12	33 3070	15 72	54 28 8 48 52	62	41 1665	15 72	21 28 8 48 52
13	33 4642	15 72	55 01 2 48 52	63	41 3237	15 72	22 01 2 48 52
14	33 6214	15 71	55 33 6 48 49	64	41 4809	15 73	22 33 6 48 55
15	33 7785	15 72	56 06 0 48 52	65	41 6382	15 72	23 06 0 48 52
2,16	0,033 9357	15 71	01 56 38 4 48 49	2,66	0,041 7954	15 72	02 23 38 4 48 52
17	34 0928	15 72	57 10 8 48 52	67	41 9526	15 72	24 10 8 48 52
18	34 2500	15 72	57 43 2 48 52	68	42 1098	15 72	24 43 2 48 52
19	34 4072	15 72	58 15 6 48 52	69	42 2670	15 73	25 15 6 48 55
20	34 5644	15 72	58 48 0 48 52	70	42 4243	15 72	25 48 0 48 52
2,21	0,034 7216	15 72	01 59 20 4 48 52	2,71	0,042 5815	15 72	02 26 20 4 48 52
22	34 8788	15 71	01 59 52 8 48 49	72	42 7387	15 72	26 52 8 48 52
23	35 0359	15 72	02 00 25 2 48 52	73	42 8959	15 72	27 25 2 48 52
24	35 1931	15 72	00 57 6 48 52	74	43 0531	15 73	27 57 6 48 55
25	35 3503	15 72	01 30 0 48 52	75	43 2104	15 72	28 30 0 48 52
2,26	0,035 5079	15 72	02 02 02 4 48 52	2,76	0,043 3676	15 72	02 29 02 4 48 52
27	35 6647	15 71	02 34 8 48 49	77	43 5248	15 72	29 34 8 48 52
28	35 8218	15 72	03 07 2 48 52	78	43 6820	15 73	30 07 2 48 55
29	35 9790	15 72	03 39 6 48 52	79	43 8393	15 72	30 39 6 48 52
30	36 1362	15 72	04 12 0 48 52	80	43 9965	15 72	31 12 0 48 52
2,31	0,036 2934	15 72	02 04 44 4 48 52	2,81	0,044 1537	15 73	02 31 44 4 48 55
32	36 4506	15 71	05 16 8 48 49	82	44 3110	15 72	32 16 8 48 52
33	36 6077	15 72	05 49 2 48 52	83	44 4682	15 72	32 49 2 48 52
34	36 7649	15 72	06 21 6 48 52	84	44 6254	15 73	33 21 6 48 55
35	36 9221	15 72	06 54 0 48 52	85	44 7827	15 72	33 54 0 48 52
2,36	0,037 0793	15 72	02 07 26 4 48 52	2,86	0,044 9399	15 73	02 34 26 4 48 55
37	37 2365	15 71	07 58 8 48 49	87	45 0972	15 72	34 58 8 48 52
38	37 3936	15 72	08 31 2 48 52	88	45 2544	15 72	35 31 2 48 52
39	37 5508	15 72	09 03 6 48 52	89	45 4116	15 73	36 03 6 48 55
40	37 7080	15 72	09 36 0 48 52	90	45 5689	15 72	36 36 0 48 52
2,41	0,037 8652	15 72	02 10 08 4 48 52	2,91	0,045 7261	15 73	02 37 08 4 48 55
42	38 0224	15 72	10 40 8 48 52	92	45 8834	15 72	37 40 8 48 52
43	38 1796	15 72	11 13 2 48 52	93	46 0406	15 72	38 13 2 48 52
44	38 3368	15 72	11 45 6 48 52	94	46 1978	15 73	38 45 6 48 55
45	38 4940	15 72	12 18 0 48 52	95	46 3551	15 72	39 18 0 48 52
2,46	0,038 6512	15 72	02 12 50 4 48 52	2,96	0,046 5123	15 73	02 39 50 4 48 55
47	38 8084	15 72	13 22 8 48 52	97	46 6696	15 72	40 22 8 48 52
48	38 9656	15 72	13 55 2 48 52	98	46 8268	15 72	40 55 2 48 52
49	39 1228	15 72	14 27 6 48 52	99	46 9840	15 73	41 27 6 48 55
50	39 2800		15 00 0	3,00	47 1413		42 00 0

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=3°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	$k=3°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			Gr. M.			Gr. M. S.		
3,00	0,047 1413	15 73	02 42 00 0	48 55		3,50	0,055 0056	15 73	03 09 00 0	48 55	
3,01	0,047 2986	15 73	02 42 32 4	48 55		3,51	0,055 1629	15 74	03 09 32 4	48 58	
02	47 4559	15 72	43 04 8	48 52		52	55 3203	15 73	10 04 8	48 55	
03	47 6131	15 73	43 37 2	48 55		53	55 4776	15 73	10 37 2	48 55	
04	47 7704	15 72	44 09 6	48 52		54	55 6349	15 73	11 09 6	48 55	
05	47 9276	15 73	44 42 0	48 55		55	55 7922	15 73	11 42 0	48 55	
3,06	0,048 0849	15 73	02 45 14 4	48 55		3,56	0,055 9495	15 74	03 12 14 4	48 58	
07	48 2422	15 72	45 46 8	48 52		57	56 1069	15 73	12 46 8	48 55	
08	48 3994	15 73	46 19 2	48 55		58	56 2642	15 73	13 19 2	48 55	
09	48 5567	15 73	46 51 6	48 55		59	56 4215	15 73	13 51 6	48 55	
10	48 7140	15 72	47 24 0	48 52		60	56 5788	15 74	14 24 0	48 58	
3,11	0,048 8712	15 73	02 47 56 4	48 55		3,61	0,056 7362	15 73	03 14 56 4	48 55	
12	49 0285	15 73	48 28 8	48 55		62	56 8935	15 74	15 28 8	48 58	
13	49 1858	15 72	49 01 2	48 52		63	57 0509	15 73	16 01 2	48 55	
14	49 3430	15 73	49 33 6	48 55		64	57 2082	15 73	16 33 6	48 55	
15	49 5003	15 73	50 06 0	48 55		65	57 3655	15 74	17 06 0	48 58	
3,16	0,049 6576	15 73	02 50 38 4	48 55		3,66	0,057 5229	15 73	03 17 38 4	48 55	
17	49 8149	15 72	51 10 8	48 52		67	57 6802	15 74	18 10 8	48 58	
18	49 9721	15 73	51 43 2	48 55		68	57 8376	15 73	18 43 2	48 55	
19	50 1294	15 73	52 15 6	48 55		69	57 9949	15 73	19 15 6	48 55	
20	50 2867	15 73	52 48 0	48 55		70	58 1522	15 74	19 48 0	48 58	
3,21	0,050 4440	15 72	02 53 20 4	48 52		3,71	0,058 3096	15 73	03 20 20 4	48 55	
22	50 6012	15 73	53 52 8	48 55		72	58 4669	15 74	20 52 8	48 58	
23	50 7585	15 73	54 25 2	48 55		73	58 6243	15 73	21 25 2	48 55	
24	50 9158	15 73	54 57 6	48 55		74	58 7816	15 74	21 57 6	48 58	
25	51 0731	15 73	55 30 0	48 55		75	58 9390	15 73	22 30 0	48 55	
3,26	0,051 2304	15 73	02 56 02 4	48 55		3,76	0,059 0963	15 74	03 23 02 4	48 58	
27	51 3877	15 73	56 34 8	48 55		77	59 2537	15 73	23 34 8	48 55	
28	51 5450	15 73	57 07 2	48 55		78	59 4110	15 74	24 07 2	48 58	
29	51 7023	15 73	57 39 6	48 55		79	59 5684	15 73	24 39 6	48 55	
30	51 8596	15 73	58 12 0	48 55		80	59 7257	15 74	25 12 0	48 58	
3,31	0,052 0169	15 72	02 58 44 4	48 52		3,81	0,059 8831	15 74	03 25 44 4	48 58	
32	52 1741	15 73	59 16 8	48 55		82	60 0405	15 73	26 16 8	48 58	
33	52 3314	15 73	02 59 49 2	48 55		83	60 1978	15 74	26 49 2	48 58	
34	52 4887	15 73	03 00 21 6	48 55		84	60 3552	15 74	27 21 6	48 58	
35	52 6460	15 73	00 54 0	48 55		85	60 5126	15 74	27 54 0	48 58	
3,36	0,052 8033	15 73	03 01 26 4	48 55		3,86	0,060 6700	15 73	03 28 26 4	48 55	
37	52 9606	15 73	01 58 8	48 55		87	60 8273	15 74	28 58 8	48 58	
38	53 1179	15 73	02 31 2	48 55		88	60 9847	15 74	29 31 2	48 58	
39	53 2752	15 73	03 03 6	48 55		89	61 1421	15 74	30 03 6	48 58	
40	53 4325	15 73	03 36 0	48 55		90	61 2994	15 74	30 36 0	48 58	
3,41	0,053 5898	15 73	03 04 08 4	48 55		3,91	0,061 4568	15 74	03 31 08 4	48 58	
42	53 7471	15 73	04 40 8	48 55		92	61 6142	15 74	31 40 8	48 58	
43	53 9044	15 73	05 13 2	48 55		93	61 7716	15 74	32 13 2	48 58	
44	54 0617	15 73	05 45 6	48 55		94	61 9290	15 73	32 45 6	48 55	
45	54 2190	15 73	06 18 0	48 55		95	62 0863	15 74	33 18 0	48 58	
3,46	0,054 3763	15 74	03 06 50 4	48 58		3,96	0,062 2437	15 74	03 33 50 4	48 58	
47	54 5337	15 73	07 22 8	48 55		97	62 4011	15 74	34 22 8	48 58	
48	54 6910	15 73	07 55 2	48 55		98	62 5585	15 74	34 55 2	48 58	
49	54 8483	15 73	08 27 6	48 55		99	62 7159	15 73	35 27 6	48 55	
50	55 0056		09 00 0			4,00	62 8732		36 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.		
$k=4^\circ$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=4^\circ$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
4,00	0,062 8732	15 74	03 36 00 0	48 58	4,50	0,070 7448	15 74	04 03 00 0	48 58
4,01	0,063 0306	15 74	03 36 32 4	48 58	4,51	0,070 9022	15 75	04 03 32 4	48 61
02	63 1880	15 74	37 04 8	48 58	52	71 0597	15 75	04 04 8	48 61
03	63 3454	15 74	37 37 2	48 58	53	71 2172	15 75	04 37 2	48 61
04	63 5028	15 74	38 09 6	48 58	54	71 3747	15 75	05 09 6	48 61
05	63 6602	15 74	38 42 0	48 58	55	71 5322	15 74	05 42 0	48 58
4,06	0,063 8176	15 74	03 39 14 4	88 58	4,56	0,071 6896	15 75	04 06 14 4	48 61
07	63 9750	15 74	39 46 8	48 58	57	71 8471	15 75	06 46 8	48 61
08	6 1324	15 74	40 19 2	48 58	58	72 0046	15 75	07 19 2	48 61
09	64 2898	15 74	40 51 6	48 58	59	72 1621	15 75	07 51 6	48 61
10	64 4472	15 74	41 24 0	48 58	60	72 3196	15 75	08 24 0	48 61
4,11	0,064 6046	15 74	03 41 56 4	48 58	4,61	0,072 4771	15 75	04 08 56 4	48 61
12	64 7620	15 74	42 28 8	48 58	62	72 6346	15 75	09 28 8	48 61
13	64 9194	15 75	43 01 2	48 61	63	72 7921	15 75	10 01 2	48 61
14	65 0769	15 74	43 33 6	48 58	64	72 9496	15 75	10 33 6	48 61
15	65 2343	15 74	44 06 0	48 58	65	73 1071	15 75	11 06 0	48 61
4,16	0,065 3917	15 74	03 44 38 4	48 58	4,66	0,073 2646	15 75	04 11 38 4	48 61
17	65 5491	15 74	45 10 8	48 58	67	73 4221	15 75	12 10 8	48 61
18	65 7065	15 74	45 43 2	48 58	68	73 5796	15 75	12 43 2	48 61
19	65 8639	15 75	46 15 6	48 61	69	73 7371	15 75	13 15 6	48 61
20	66 0214	15 74	46 48 0	48 58	70	73 8946	15 75	13 48 0	48 61
4,21	0,066 1788	15 74	03 47 20 4	48 58	4,71	0,074 0521	15 75	04 14 20 4	48 61
22	66 3362	15 74	47 52 8	48 58	72	74 2096	15 75	14 52 8	48 61
23	66 4936	15 75	48 25 2	48 61	73	74 3671	15 75	15 25 2	48 61
24	66 6511	15 74	48 57 6	48 58	74	74 5246	15 75	15 57 6	48 61
25	66 8085	15 74	49 30 0	48 58	75	74 6821	15 76	16 30 0	48 64
4,26	0,066 9659	15 75	03 50 02 4	48 61	4,76	0,074 8397	15 75	04 17 02 4	48 61
27	67 1234	15 74	50 34 8	48 58	77	74 9972	15 75	17 34 8	48 61
28	67 2808	15 74	51 07 2	48 58	78	75 1547	15 75	18 07 2	48 61
29	67 4382	15 75	51 39 6	48 61	79	75 3122	15 76	18 39 6	48 64
30	67 5957	15 74	52 12 0	48 58	80	75 4698	15 75	19 12 0	48 61
4,31	0,067 7531	15 75	03 52 44 4	48 61	4,81	0,075 6273	15 75	04 19 44 4	48 61
32	67 9106	15 74	53 16 8	48 58	82	75 7848	15 76	20 16 8	48 64
33	68 0680	15 74	53 49 2	48 58	83	75 9424	15 75	20 49 2	48 61
34	68 2254	15 75	54 21 6	48 61	84	76 0999	15 76	21 21 6	48 64
35	68 3829	15 74	54 54 0	48 58	85	76 2575	15 75	21 54 0	48 61
4,36	0,068 5403	15 75	03 55 26 4	48 61	4,86	0,076 4150	15 75	04 22 26 4	48 61
37	68 6978	15 74	55 58 8	48 58	87	76 5725	15 76	22 58 8	48 64
38	68 8552	15 75	56 31 2	48 61	88	76 7301	15 75	23 31 2	48 61
39	69 0127	15 74	57 03 6	48 58	89	76 8876	15 76	24 03 6	48 64
40	69 1701	15 75	57 36 0	48 61	90	77 0452	15 75	24 36 0	48 61
4,41	0,069 3276	15 75	03 58 08 4	48 61	4,91	0,077 2027	15 76	04 25 08 4	48 64
42	69 4851	15 74	58 40 8	48 58	92	77 3603	15 75	25 40 8	48 61
43	69 6425	15 75	59 13 2	48 61	93	77 5178	15 76	26 13 2	48 64
44	69 8000	15 74	03 59 45 6	48 58	94	77 6754	15 75	26 45 6	48 61
45	69 9574	15 75	04 00 18 0	48 61	95	77 8329	15 76	27 18 0	48 64
4,46	0,070 1149	15 75	04 00 50 4	48 61	4,96	0,077 9905	15 75	04 27 50 4	48 61
47	70 2724	15 74	01 22 8	48 58	97	78 1480	15 76	28 22 8	48 64
48	70 4298	15 75	01 55 2	48 61	98	78 3056	15 75	28 55 2	48 61
49	70 5873	15 75	02 27 6	48 61	99	78 4631	15 76	29 27 6	48 64
50	70 7448		03 00 0		5,00	78 6207		30 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.		
$k=5°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.			$k=5°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.					Gr. M.			Gr. M. S.				
5,00	0,078 6207	15 76	04 30 00 0		48 64			5,50	0,086 5016	15 76	04 57 00 0		48 64		
01	0,078 7783	15 76	04 30 32 4		48 64			5,51	0,086 6592	15 77	04 57 32 4		48 67		
02	78 9359	15 75	31 04 8		48 61			52	86 8169	15 77	58 04 8		48 67		
03	79 0934	15 76	31 37 2		48 64			53	86 9746	15 76	58 37 2		48 64		
04	79 2510	15 76	32 09 6		48 64			54	87 1322	15 77	59 09 6		48 67		
05	79 4086	15 76	32 42 0		48 64			55	87 2899	15 77	04 59 42 0		48 67		
5,06	0,079 5662	15 76	04 33 14 4		48 64			5,56	0,087 4476	15 77	05 00 14 4		48 67		
07	79 7238	15 75	33 46 8		48 61			57	87 6053	15 76	00 46 8		48 64		
08	79 8813	15 76	34 19 2		48 64			58	87 7629	15 77	01 19 2		48 67		
09	80 0389	15 76	34 51 6		48 64			59	87 9206	15 77	01 51 6		48 67		
10	80 1965	15 76	35 24 0		48 64			60	88 0783	15 77	02 24 0		48 67		
5,11	0,080 3541	15 76	04 35 56 4		48 64			5,61	0,088 2360	15 76	05 02 56 4		48 64		
12	80 5117	15 76	36 28 8		48 64			62	88 3936	15 77	03 28 8		48 67		
13	80 6693	15 76	37 01 2		48 64			63	88 5513	15 77	04 01 2		48 67		
14	80 8269	15 75	37 33 6		48 61			64	88 7090	15 77	04 33 6		48 67		
15	80 9844	15 76	38 06 0		48 64			65	88 8667	15 77	05 06 0		48 67		
5,16	0,081 1420	15 76	04 38 38 4		48 64			5,66	0,089 0244	15 77	05 05 38 4		48 67		
17	81 2996	15 76	39 10 8		48 64			67	89 1821	15 77	06 10 8		48 67		
18	81 4572	15 76	39 43 2		48 64			68	89 3398	15 77	06 43 2		48 67		
19	81 6148	15 76	40 15 6		48 64			69	89 4975	15 77	07 15 6		48 67		
20	81 7724	15 76	40 48 0		48 64			70	89 6552	15 77	07 48 0		48 67		
5,21	0,081 9300	15 76	04 41 20 4		48 64			5,71	0,089 8129	15 77	05 08 20 4		48 67		
22	82 0876	15 77	41 52 8		48 67			72	89 9706	15 78	08 52 8		48 70		
23	82 2453	15 76	42 25 2		48 64			73	90 1284	15 77	09 25 2		48 67		
24	82 4029	15 76	42 57 6		48 64			74	90 2861	15 77	09 57 6		48 67		
25	82 5605	15 76	43 30 0		48 64			75	90 4438	15 77	10 30 0		48 67		
5,26	0,082 7181	15 76	04 44 02 4		48 64			5,76	0,090 6015	15 78	05 11 02 4		48 70		
27	82 8757	15 77	44 34 8		48 67			77	90 7593	15 77	11 34 8		48 67		
28	83 0334	15 76	45 07 2		48 64			78	90 9170	15 77	12 07 2		48 67		
29	83 1910	15 76	45 39 6		48 64			79	91 0747	15 78	12 39 6		48 70		
30	83 3486	15 76	46 12 0		48 64			80	91 2325	15 77	13 12 0		48 67		
5,31	0,083 5062	15 77	04 46 44 4		48 67			5,81	0,091 3902	15 78	05 13 44 4		48 70		
32	83 6639	15 76	47 16 8		48 64			82	91 5480	15 77	14 16 8		48 67		
33	83 8215	15 76	47 49 2		48 64			83	91 7057	15 77	14 49 2		48 67		
34	83 9791	15 77	48 21 6		48 67			84	91 8634	15 78	15 21 6		48 70		
35	84 1368	15 76	48 54 0		48 64			85	92 0212	15 77	15 54 0		48 67		
5,36	0,084 2944	15 76	04 49 26 4		48 64			5,86	0,092 1789	15 78	05 16 26 4		48 70		
37	84 4520	15 76	49 58 8		48 64			87	92 3367	15 77	16 58 8		48 67		
38	84 6096	15 77	50 31 2		48 67			88	92 4944	15 78	17 31 2		48 70		
39	84 7673	15 76	51 03 6		48 64			89	92 6522	15 77	18 03 6		48 67		
40	84 9249	15 77	51 36 0		48 67			90	92 8099	15 78	18 36 0		48 70		
5,41	0,085 0826	15 76	04 52 08 4		48 64			5,91	0,092 9677	15 78	05 19 08 4		48 70		
42	85 2402	15 77	52 40 8		48 67			92	93 1255	15 77	19 40 8		48 67		
43	85 3979	15 76	53 13 2		48 64			93	93 2832	15 78	20 13 2		48 70		
44	85 5555	15 77	53 45 6		48 67			94	93 4410	15 78	20 45 6		48 70		
45	85 7132	15 77	54 18 0		48 67			95	93 5988	15 77	21 18 0		48 67		
5,46	0,085 8709	15 77	04 54 50 4		48 67			5,96	0,093 7565	15 78	05 21 50 4		48 70		
47	86 0286	15 76	55 22 8		48 64			97	93 9143	15 78	22 22 8		48 70		
48	86 1862	15 77	55 55 2		48 67			98	94 0721	15 77	22 55 2		48 67		
49	86 3439	15 77	56 27 6		48 67			99	94 2298	15 78	23 27 6		48 70		
50	86 5016		57 00 0					6,00	94 3876		24 00 0				

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.			N. E		Alte Einth.			Alte Einth.		
$k=6^0$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.			$k=6^0$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.		
Gr. M.				Gr. M. S.				Gr. M.				Gr. M. S.			
6,00	0,094 3876	15	78	05 24 00 0	48	70		6,50	0,102 2796	15	79	05 51 00 0	48	73	
6,01	0,094 5454	15	78	05 24 32 4	48	70		6,51	0,102 4375	15	79	05 51 32 4	48	73	
02	94 7032	15	78	25 04 8	48	70		52	02 5954	15	77	52 04 8	48	80	
03	94 8610	15	78	25 37 2	48	70		53	02 7534	15	79	52 37 2	48	73	
04	95 0188	15	78	26 09 6	48	70		54	02 9113	15	79	53 09 6	48	73	
05	95 1766	15	77	26 42 0	48	67		55	03 0692	15	79	53 42 0	48	73	
6,06	0,095 3343	15	78	05 27 14 4	48	70		6,56	0,103 2271	15	79	05 54 14 4	48	73	
07	95 4921	15	78	27 46 8	48	70		57	03 3850	15	79	54 46 8	48	73	
08	95 6499	15	78	28 19 2	48	70		58	03 5429	15	80	55 19 2	48	77	
09	95 8077	15	78	28 51 6	48	70		59	03 7009	15	79	55 51 6	48	73	
10	95 9655	15	79	29 24 0	48	73		60	03 8588	15	79	56 24 0	48	73	
6,11	0,096 1234	15	78	05 29 56 4	48	70		6,61	0,104 0167	15	79	05 56 56 4	48	73	
12	96 2812	15	78	30 28 8	48	70		62	04 1746	15	80	57 28 8	48	77	
13	96 4390	15	78	31 01 2	48	70		63	04 3326	15	79	58 01 2	48	73	
14	96 5968	15	78	31 33 6	48	70		64	04 4905	15	79	58 33 6	48	73	
15	96 7546	15	78	32 06 0	48	70		65	04 6484	15	80	59 06 0	48	77	
6,16	0,096 9124	15	78	05 32 38 4	48	70		6,66	0,104 8064	15	79	05 59 38 4	48	73	
17	97 0702	15	79	33 10 8	48	73		67	04 9643	15	80	06 00 10 8	48	77	
18	97 2281	15	78	33 43 2	48	70		68	05 1223	15	79	00 43 2	48	73	
19	97 3859	15	78	34 15 6	48	70		69	05 2802	15	80	01 15 6	48	77	
20	97 5437	15	78	34 48 0	48	70		70	05 4382	15	79	01 48 0	48	73	
6,21	0,097 7015	15	79	05 35 20 4	48	73		6,71	0,105 5961	15	80	06 02 20 4	48	77	
22	97 8594	15	78	35 52 8	48	70		72	05 7541	15	79	02 52 8	48	73	
23	98 0172	15	78	36 25 2	48	70		73	05 9120	15	80	03 25 2	48	77	
24	98 1750	15	78	36 57 6	48	70		74	06 0700	15	80	03 57 6	48	77	
25	98 3328	15	79	37 30 0	48	73		75	06 2280	15	80	04 30 0	48	77	
6,26	0,098 4907	15	78	05 38 02 4	48	70		6,76	0,106 3860	15	80	06 05 02 4	48	77	
27	98 6485	15	79	38 34 8	48	73		77	06 5440	15	80	05 34 8	48	77	
28	98 8064	15	78	39 07 2	48	70		78	06 7020	15	79	06 07 2	48	73	
29	98 9642	15	79	39 39 6	48	73		79	06 8599	15	79	06 39 6	48	73	
30	99 1221	15	78	40 12 0	48	70		80	07 0178	15	80	07 12 0	48	77	
6,31	0,099 2799	15	79	05 40 44 4	48	73		6,81	0,107 1758	15	80	06 07 44 4	48	77	
32	99 4378	15	78	41 16 8	48	70		82	07 3338	15	80	08 16 8	48	77	
33	99 5956	15	79	41 49 2	48	73		83	07 4918	15	80	08 49 2	48	77	
34	99 7535	15	79	42 21 6	48	73		84	07 6498	15	80	09 21 6	48	77	
35	99 9114	15	78	42 54 0	48	70		85	07 8078	15	80	09 54 0	48	77	
6,36	0,100 0692	15	79	05 43 26 4	48	73		6,86	0,107 9658	15	80	06 10 26 4	48	77	
37	00 2271	15	79	43 58 8	48	73		87	08 1238	15	80	10 58 8	48	77	
38	00 3850	15	79	44 31 2	48	73		88	08 2818	15	80	11 31 2	48	77	
39	00 5429	15	78	45 03 6	48	70		89	08 4398	15	80	12 03 6	48	77	
40	00 7007	15	79	45 36 0	48	73		90	08 5978	15	80	12 36 0	48	77	
6,41	0,100 8586	15	79	05 46 08 4	48	73		6,91	0,108 7558	15	80	06 13 08 4	48	77	
42	01 0165	15	79	46 40 8	48	73		92	08 9138	15	80	13 40 8	48	77	
43	01 1744	15	79	47 13 2	48	73		93	09 0718	15	80	14 13 2	48	77	
44	01 3323	15	79	47 45 6	48	73		94	09 2298	15	80	14 45 6	48	77	
45	01 4902	15	78	48 18 0	48	70		95	09 3878	15	81	15 18 0	48	80	
6,46	0,101 6480	15	79	05 48 50 4	48	73		6,96	0,109 5459	15	80	06 15 50 4	48	77	
47	01 8059	15	79	49 22 8	48	73		97	09 7039	15	80	16 22 8	48	77	
48	01 9638	15	79	49 55 2	48	73		98	09 8619	15	81	16 55 2	48	80	
49	02 1217	15	79	50 27 6	48	73		99	10 0200	15	80	17 27 6	48	77	
50	02 2796			51 00 0				7,00	10 1780			18 00 0			

N. E.	Alte Einth.				N. E.	Alte Einth.			
$k=5°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=5°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
5,00	0,078 6207	15 76	04 30 00 0	48 64	5,50	0,086 5016	15 76	04 57 00 0	48 64
01	0,078 7783	15 76	04 30 32 4	48 64	5,51	0,086 6592	15 77	04 57 32 4	48 67
02	78 9359	15 75	31 04 8	48 61	52	86 8169	15 77	58 04 8	48 67
03	79 0934	15 76	31 37 2	48 64	53	86 9746	15 76	58 37 2	48 64
04	79 2510	15 76	32 09 6	48 64	54	87 1322	15 77	59 09 6	48 67
05	79 4086	15 76	32 42 0	48 64	55	87 2899	15 77	04 59 42 0	48 67
5,06	0,079 5662	15 76	04 33 14 4	48 64	5,56	0,087 4476	15 77	05 00 14 4	48 67
07	79 7238	15 75	33 46 8	48 61	57	87 6053	15 76	00 46 8	48 64
08	79 8813	15 76	34 19 2	48 64	58	87 7629	15 77	01 19 2	48 67
09	80 0389	15 76	34 51 6	48 64	59	87 9206	15 77	01 51 6	48 67
10	80 1965	15 76	35 24 0	48 64	60	88 0783	15 77	02 24 0	48 67
5,11	0,080 3541	15 76	04 35 56 4	48 64	5,61	0,088 2360	15 76	05 02 56 4	48 64
12	80 5117	15 76	36 28 8	48 64	62	88 3936	15 77	03 28 8	48 67
13	80 6693	15 76	37 01 2	48 64	63	88 5513	15 77	04 01 2	48 67
14	80 8269	15 75	37 33 6	48 61	64	88 7090	15 77	04 33 6	48 67
15	80 9844	15 76	38 06 0	48 64	65	88 8667	15 77	05 06 0	48 67
5,16	0,081 1420	15 76	04 38 38 4	48 64	5,66	0,089 0244	15 77	05 05 38 4	48 67
17	81 2996	15 76	39 10 8	48 64	67	89 1821	15 77	06 10 8	48 67
18	81 4572	15 76	39 43 2	48 64	68	89 3398	15 77	06 43 2	48 67
19	81 6148	15 76	40 15 6	48 64	69	89 4975	15 77	07 15 6	48 67
20	81 7724	15 76	40 48 0	48 64	70	89 6552	15 77	07 48 0	48 67
5,21	0,081 9300	15 76	04 41 20 4	48 64	5,71	0,089 8129	15 77	05 08 20 4	48 67
22	82 0876	15 77	41 52 8	48 67	72	89 9706	15 78	08 52 8	48 70
23	82 2453	15 76	42 25 2	48 64	73	90 1284	15 77	09 25 2	48 67
24	82 4029	15 76	42 57 6	48 64	74	90 2861	15 77	09 57 6	48 67
25	82 5605	15 76	43 30 0	48 64	75	90 4438	15 77	10 30 0	48 67
5,26	0,082 7181	15 76	04 44 02 4	48 64	5,76	0,090 6015	15 78	05 11 02 4	48 70
27	82 8757	15 77	44 34 8	48 67	77	90 7593	15 77	11 34 8	48 67
28	83 0334	15 76	45 07 2	48 64	78	90 9170	15 77	12 07 2	48 67
29	83 1910	15 76	45 39 6	48 64	79	91 0747	15 78	12 39 6	48 70
30	83 3486	15 76	46 12 0	48 64	80	91 2325	15 77	13 12 0	48 67
5,31	0,083 5062	15 77	04 46 44 4	48 67	5,81	0,091 3902	15 78	05 13 44 4	48 70
32	83 6639	15 76	47 16 8	48 64	82	91 5480	15 77	14 16 8	48 67
33	83 8215	15 76	47 49 2	48 64	83	91 7057	15 77	14 49 2	48 67
34	83 9791	15 77	48 21 6	48 67	84	91 8634	15 78	15 21 6	48 70
35	84 1368	15 76	48 54 0	48 64	85	92 0212	15 77	15 54 0	48 67
5,36	0,084 2944	15 76	04 49 26 4	48 64	5,86	0,092 1789	15 78	05 16 26 4	48 70
37	84 4520	15 76	49 58 8	48 64	87	92 3367	15 77	16 58 8	48 67
38	84 6096	15 77	50 31 2	48 67	88	92 4944	15 78	17 31 2	48 70
39	84 7673	15 76	51 03 6	48 64	89	92 6522	15 77	18 03 6	48 67
40	84 9249	15 77	51 36 0	48 67	90	92 8099	15 78	18 36 0	48 70
5,41	0,085 0826	15 76	04 52 08 4	48 64	5,91	0,092 9677	15 78	05 19 08 4	48 70
42	85 2402	15 77	52 40 8	48 67	92	93 1255	15 77	19 40 8	48 67
43	85 3979	15 76	53 13 2	48 64	93	93 2832	15 78	20 13 2	48 70
44	85 5555	15 77	53 45 6	48 67	94	93 4410	15 78	20 45 6	48 70
45	85 7132	15 77	54 18 0	48 67	95	93 5988	15 77	21 18 0	48 67
5,46	0,085 8709	15 77	04 54 50 4	48 67	5,96	0,093 7565	15 78	05 21 50 4	48 70
47	86 0286	15 76	55 22 8	48 64	97	93 9143	15 78	22 22 8	48 70
48	86 1862	15 77	55 55 2	48 67	98	94 0721	15 77	22 55 2	48 67
49	86 3439	15 77	56 27 6	48 67	99	94 2298	15 78	23 27 6	48 70
50	86 5016		57 00 0		6,00	94 3876		24 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	N. E		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=6^\circ$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		$k=6^\circ$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.			Gr. M.			Gr. M. S.		
6,00	0,094 3876	15 78	05 24 00 0	48 70		6,50	0,102 2796	15 79	05 51 00 0	48 73	
6,01	0,094 5454	15 78	05 24 32 4	48 70		6,51	0,102 4375	15 79	05 51 32 4	48 73	
02	94 7032	15 78	25 04 8	48 70		52	02 5954	15 77	52 04 8	48 80	
03	94 8610	15 78	25 37 2	48 70		53	02 7534	15 79	52 37 2	48 73	
04	95 0188	15 78	26 09 6	48 70		54	02 9113	15 79	53 09 6	48 73	
05	95 1766	15 77	26 42 0	48 67		55	03 0692	15 79	53 42 0	48 73	
6,06	0,095 3343	15 78	05 27 14 4	48 70		6,56	0,103 2271	15 79	05 54 14 4	48 73	
07	95 4921	15 78	27 46 8	48 70		57	03 3850	15 79	54 46 8	48 73	
08	95 6499	15 78	28 19 2	48 70		58	03 5429	15 80	55 19 2	48 77	
09	95 8077	15 78	28 51 6	48 70		59	03 7009	15 79	55 51 6	48 73	
10	95 9655	15 79	29 24 0	48 73		60	03 8588	15 79	56 24 0	48 73	
6,11	0,096 1234	15 78	05 29 56 4	48 70		6,61	0,104 0167	15 79	05 56 56 4	48 73	
12	96 2812	15 78	30 28 8	48 70		62	04 1746	15 80	57 28 8	48 77	
13	96 4390	15 78	31 01 2	48 70		63	04 3326	15 79	58 01 2	48 73	
14	96 5968	15 78	31 33 6	48 70		64	04 4905	15 79	58 33 6	48 73	
15	96 7546	15 78	32 06 0	48 70		65	04 6484	15 80	59 06 0	48 77	
6,16	0,096 9124	15 78	05 32 38 4	48 70		6,66	0,104 8064	15 79	05 59 38 4	48 73	
17	97 0702	15 79	33 10 8	48 73		67	04 9643	15 80	06 00 10 8	48 77	
18	97 2281	15 78	33 43 2	48 70		68	05 1223	15 79	00 43 2	48 73	
19	97 3859	15 78	34 15 6	48 70		69	05 2802	15 80	01 15 6	48 77	
20	97 5437	15 78	34 48 0	48 70		70	05 4382	15 79	01 48 0	48 73	
6,21	0,097 7015	15 79	05 35 20 4	48 73		6,71	0,105 5961	15 80	06 02 20 4	48 77	
22	97 8594	15 78	35 52 8	48 70		72	05 7541	15 79	02 52 8	48 73	
23	98 0172	15 78	36 25 2	48 70		73	05 9120	15 80	03 25 2	48 77	
24	98 1750	15 78	36 57 6	48 70		74	06 0700	15 80	03 57 6	48 77	
25	98 3328	15 79	37 30 0	48 73		75	06 2280	15 80	04 30 0	48 77	
6,26	0,098 4907	15 78	05 38 02 4	48 70		6,76	0,106 3860	15 80	06 05 02 4	48 77	
27	98 6485	15 79	38 34 8	48 73		77	06 5440	15 80	05 34 8	48 77	
28	98 8064	15 78	39 07 2	48 70		78	06 7020	15 79	06 07 2	48 73	
29	98 9642	15 79	39 39 6	48 73		79	06 8599	15 79	06 39 6	48 73	
30	99 1221	15 78	40 12 0	48 70		80	07 0178	15 80	07 12 0	48 77	
6,31	0,099 2799	15 79	05 40 44 4	48 73		6,81	0,107 1758	15 80	06 07 44 4	48 77	
32	99 4378	15 78	41 16 8	48 70		82	07 3338	15 80	08 16 8	48 77	
33	99 5956	15 79	41 49 2	48 73		83	07 4918	15 80	08 49 2	48 77	
34	99 7535	15 79	42 21 6	48 73		84	07 6498	15 80	09 21 6	48 77	
35	99 9114	15 78	42 54 0	48 70		85	07 8078	15 80	09 54 0	48 77	
6,36	0,100 0692	15 79	05 43 26 4	48 73		6,86	0,107 9658	15 80	06 10 26 4	48 77	
37	00 2271	15 79	43 58 8	48 73		87	08 1238	15 80	10 58 8	48 77	
38	00 3850	15 79	44 31 2	48 73		88	08 2818	15 80	11 31 2	48 77	
39	00 5429	15 78	45 03 6	48 70		89	08 4398	15 80	12 03 6	48 77	
40	00 7007	15 79	45 36 0	48 73		90	08 5978	15 80	12 36 0	48 77	
6,41	0,100 8586	15 79	05 46 08 4	48 73		6,91	0,108 7558	15 80	06 13 08 4	48 77	
42	01 0165	15 79	46 40 8	48 73		92	08 9138	15 80	13 40 8	48 77	
43	01 1744	15 79	47 13 2	48 73		93	09 0718	15 80	14 13 2	48 77	
44	01 3323	15 79	47 45 6	48 73		94	09 2298	15 80	14 45 6	48 77	
45	01 4902	15 78	48 18 0	48 70		95	09 3878	15 81	15 18 0	48 80	
6,46	0,101 6480	15 79	05 48 50 4	48 73		6,96	0,109 5459	15 80	06 15 50 4	48 77	
47	01 8059	15 79	49 22 8	48 73		97	09 7039	15 80	16 22 8	48 77	
48	01 9638	15 79	49 55 2	48 73		98	09 8619	15 81	16 55 2	48 80	
49	02 1217	15 79	50 27 6	48 73		99	10 0200	15 80	17 27 6	48 77	
50	02 2796		51 00 0			7,00	10 1780		18 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.				
$k=7°$	ϱ. k.	D. 1″.		D. 1″.	$k=7°$	ϱ. k.	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
7,00	0,110 1780	15 80	06 18 00 0	48 77	7,50	0,118 0832	15 82	06 45 00 0	48 83
7,01	0,110 3360	15 81	06 18 32 4	48 80	7,51	0,118 2414	15 82	06 45 32 4	48 83
02	10 4941	15 80	19 04 8	48 77	52	18 3996	15 81	46 04 8	48 80
03	10 6521	15 80	19 37 2	48 77	53	18 5577	15 82	46 37 2	48 83
04	10 8101	15 81	20 09 6	48 80	54	18 7159	15 82	47 09 6	48 83
05	10 9682	15 80	20 42 0	48 77	55	18 8741	15 82	47 42 0	48 83
7,06	0,111 1262	15 81	06 21 14 4	48 80	7,56	0,119 0323	15 82	06 48 14 4	48 83
07	11 2843	15 80	21 46 8	48 77	57	19 1905	15 82	48 46 8	48 83
08	11 4423	15 81	22 19 2	48 80	58	19 3487	15 82	49 19 2	48 83
09	11 6004	15 81	22 51 6	48 80	59	19 5069	15 82	49 51 6	48 83
10	11 7585	15 80	23 24 0	48 77	60	19 6651	15 82	50 24 0	48 83
7,11	0,111 9165	15 81	06 23 56 4	48 80	7,61	0,119 8233	15 82	06 50 56 4	48 83
12	12 0746	15 80	24 28 8	48 77	62	19 9815	15 82	51 28 8	48 83
13	12 2326	15 81	25 01 2	48 80	63	20 1397	15 83	52 01 2	48 83
14	12 3907	15 81	25 33 6	48 80	64	20 2980	15 82	52 33 6	48 83
15	12 5488	15 81	26 06 0	48 80	65	20 4562	15 82	53 06 0	48 83
7,16	0,112 7069	15 80	06 26 38 4	48 77	7,66	0,120 6144	15 82	06 53 38 4	48 83
17	12 8649	15 81	27 10 8	48 80	67	20 7726	15 82	54 10 8	48 83
18	13 0230	15 81	27 43 2	48 80	68	20 9308	15 83	54 43 2	48 86
19	13 1811	15 81	28 15 6	48 80	69	21 0891	15 82	55 15 6	48 83
20	13 3392	15 81	28 48 0	48 80	70	21 2473	15 82	55 48 0	48 83
7,21	0,113 4973	15 81	06 29 20 4	48 80	7,71	0,121 4055	15 83	06 56 20 4	48 86
22	13 6554	15 81	29 52 8	48 80	72	21 5638	15 82	56 52 8	48 83
23	13 8135	15 81	30 25 2	48 80	73	21 7220	15 83	57 25 2	48 86
24	13 9716	15 81	30 57 6	48 80	74	21 8803	15 82	57 57 6	48 83
25	14 1297	15 81	31 30 0	48 80	75	22 0385	15 83	58 30 0	48 86
7,26	0,114 2878	15 81	06 32 02 4	48 80	7,76	0,122 1968	15 82	06 59 02 4	48 83
27	14 4459	15 81	32 34 8	48 80	77	22 3550	15 83	06 59 34 8	48 83
28	14 6040	15 81	33 07 2	48 80	78	22 5133	15 83	07 00 07 2	48 86
29	14 7621	15 81	33 39 6	48 80	79	22 6716	15 82	00 39 6	48 83
30	14 9202	15 82	34 12 0	48 83	80	22 8298	15 83	01 12 0	48 86
7,31	0,115 0784	15 81	06 34 44 4	48 80	7,81	0,122 9881	15 83	07 01 44 4	48 86
32	15 2365	15 81	35 16 8	48 80	82	23 1464	15 82	02 16 8	48 83
33	15 3946	15 81	35 49 2	48 80	83	23 3046	15 83	02 49 2	48 86
34	15 5527	15 82	36 21 6	48 83	84	23 4629	15 83	03 21 6	48 86
35	15 7109	15 81	36 54 0	48 80	85	23 6212	15 82	03 54 0	48 83
7,36	0,115 8690	15 81	06 37 26 4	48 80	7,86	0,123 7794	15 83	07 04 26 4	48 86
37	16 0271	15 82	37 58 8	48 83	87	23 9377	15 83	04 58 8	48 86
38	16 1853	15 81	38 31 2	48 80	88	24 0960	15 82	05 31 2	48 86
39	16 3434	15 82	39 03 6	48 83	89	24 2543	15 83	06 03 6	48 86
40	16 5016	15 81	39 36 0	48 80	90	24 4126	15 83	06 36 0	48 86
7,41	0,116 6597	15 82	06 40 08 4	48 83	7,91	0,124 5709	15 83	07 07 08 4	48 86
42	16 8179	15 81	40 40 8	48 80	92	24 7292	15 83	07 40 8	48 86
43	16 9760	15 82	41 13 2	48 83	93	24 8875	15 83	08 13 2	48 86
44	17 1342	15 82	41 45 6	48 83	94	25 0458	15 83	08 45 6	48 86
45	17 2924	15 81	42 18 0	48 80	95	25 2041	15 83	09 18 0	48 86
7,46	0,117 4505	15 82	06 42 50 4	48 83	7,96	0,125 3624	15 84	07 09 50 4	48 89
47	17 6087	15 82	43 22 8	48 83	97	25 5208	15 83	10 22 8	48 86
48	17 7669	15 81	43 55 2	48 80	98	25 6791	15 83	10 55 2	48 86
49	17 9250	15 82	44 27 6	48 83	99	25 8374	15 84	11 27 6	48 89
50	18 0832		45 00 0		8,00	25 9958		12 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=8^0$	ϱ. k.	D. 1″.		D. 1″.		$k=8^0$	ϱ. k.	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.			Gr. M.			Gr. M. S.		
8,00	0,125 9958	15 83	07 12 00 0	48 86		8,50	0,133 9162	15 85	07 39 00 0	48 92	
8,01	0,126 1541	15 83	07 12 32 4	48 86		8,51	0,134 0747	15 85	07 39 32 4	48 92	
02	26 3124	15 84	13 04 8	48 89		52	34 2332	15 85	40 04 8	48 92	
03	26 4708	15 83	13 37 2	48 86		53	34 3917	15 85	40 37 2	48 92	
04	26 6291	15 84	14 09 6	48 89		54	34 5502	15 85	41 09 6	48 92	
05	26 7875	15 83	14 42 0	48 86		55	34 7087	15 85	41 42 0	48 92	
8,06	0,126 9458	15 84	07 15 14 4	48 89		8,56	0,134 8672	15 85	07 42 14 4	48 92	
07	27 1042	15 83	15 46 8	48 86		57	35 0257	15 85	42 46 8	48 92	
08	27 2625	15 84	16 19 2	48 89		58	35 1842	15 85	43 19 2	48 92	
09	27 4209	15 83	16 51 6	48 86		59	35 3427	15 85	43 51 6	48 92	
10	27 5792	15 84	17 24 0	48 89		60	35 5012	15 86	44 24 0	48 95	
8,11	0,127 7376	15 84	07 17 56 4	48 89		8,61	0,135 6598	15 85	07 44 56 4	48 92	
12	27 8960	15 83	18 28 8	48 86		62	35 8183	15 85	45 28 8	48 92	
13	28 0543	15 84	19 01 2	48 89		63	35 9768	15 86	46 01 2	48 95	
14	28 2127	15 84	19 33 6	48 89		64	36 1354	15 85	46 33 6	48 92	
15	28 3711	15 83	20 06 0	48 86		65	36 2939	15 85	47 06 0	48 92	
8,16	0,128 5294	15 84	07 20 38 4	48 89		8,66	0,136 4524	15 86	07 47 38 4	48 95	
17	28 6878	15 84	21 10 8	48 89		67	36 6110	15 85	48 10 8	48 92	
18	28 8462	15 84	21 43 2	48 89		68	36 7695	15 86	48 43 2	48 95	
19	29 0046	15 84	22 15 6	48 89		69	36 9281	15 86	49 15 6	48 95	
20	29 1630	15 83	22 48 0	48 86		70	37 0867	15 85	49 48 0	48 92	
8,21	0,129 3213	15 84	07 23 20 4	48 89		8,71	0,137 2452	15 86	07 50 20 4	48 95	
22	29 4797	15 84	23 52 8	48 89		72	37 4038	15 85	50 52 8	48 92	
23	29 6381	15 84	24 25 2	48 89		73	37 5623	15 86	51 25 2	48 95	
24	29 7965	15 84	24 57 6	48 89		74	37 7209	15 86	51 57 6	48 95	
25	29 9549	15 85	25 30 0	48 92		75	37 8795	15 86	52 30 0	48 95	
8,26	0,130 1134	15 84	07 26 02 4	48 89		8,76	0,138 0381	15 85	07 53 02 4	48 92	
27	30 2718	15 84	26 34 8	48 89		77	38 1966	15 86	53 34 8	48 95	
28	30 4302	15 84	27 07 2	48 89		78	38 3552	15 86	54 07 2	48 95	
29	30 5886	15 84	27 39 6	48 89		79	38 5138	15 86	54 39 6	48 95	
30	30 7470	15 84	28 12 0	48 89		80	38 6724	15 86	55 12 0	48 95	
8,31	0,130 9054	15 85	07 28 44 4	48 92		8,81	0,138 8310	15 86	07 55 44 4	48 95	
32	31 0639	15 84	29 16 8	48 89		82	38 9896	15 86	56 16 8	48 95	
33	31 2223	15 85	29 49 2	48 92		83	39 1482	15 86	56 49 2	48 95	
34	31 3808	15 84	30 21 6	48 89		84	39 3068	15 86	57 21 6	48 95	
35	31 5392	15 84	30 54 0	48 89		85	39 4654	15 86	57 54 0	48 95	
8,36	0,131 6976	15 85	07 31 26 4	48 92		8,86	0,139 6240	15 86	07 58 26 4	48 95	
37	31 8561	15 84	31 58 8	48 89		87	39 7826	15 86	58 58 8	48 95	
38	32 0145	15 85	32 31 2	48 92		88	39 9412	15 87	07 59 31 2	48 98	
39	32 1730	15 84	33 03 6	48 89		89	40 0999	15 86	08 00 03 6	48 95	
40	32 3314	15 85	33 36 0	48 92		90	40 2585	15 86	00 36 0	48 95	
8,41	0,132 4899	15 85	07 34 08 4	48 92		8,91	0,140 4171	15 87	08 01 08 4	48 98	
42	32 6484	15 84	34 40 8	48 89		92	40 5758	15 86	01 40 8	48 95	
43	32 8068	15 85	35 13 2	48 92		93	40 7344	15 86	02 13 2	48 95	
44	32 9653	15 85	35 45 6	48 92		94	40 8930	15 87	02 45 6	48 98	
45	33 1238	15 84	36 18 0	48 89		95	41 0517	15 86	03 18 0	48 95	
8,46	0,133 2822	15 85	07 36 50 4	48 92		8,96	0,141 2103	15 87	08 03 50 4	48 98	
47	33 4407	15 85	37 22 8	48 92		97	41 3690	15 86	04 22 8	48 95	
48	33 5992	15 85	37 55 2	48 92		98	41 5276	15 87	04 55 2	48 98	
49	33 7577	15 85	38 27 6	48 92		99	41 6863	15 86	05 27 6	48 95	
50	33 9162		39 00 0			9,00	41 8449		06 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=9°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
9,00	0,141 8449	15 87	08 06 00 0	48 98	
9,01	0,142 0036	15 87	08 06 32 4	48 98	
02	42 1623	15 87	07 04 8	48 98	
03	42 3210	15 86	07 37 2	48 95	
04	42 4796	15 87	08 09 6	48 98	
05	42 6383	15 87	08 42 0	48 98	
9,06	0,142 7970	15 87	08 09 14 4	48 98	
07	42 9557	15 87	09 46 8	48 98	
08	43 1144	15 87	10 19 2	48 98	
09	43 2731	15 87	10 51 6	48 98	
10	43 4318	15 87	11 24 0	48 98	
9,11	0,143 5905	15 87	08 11 56 4	48 98	
12	43 7492	15 87	12 28 8	48 98	
13	43 9079	15 87	13 01 2	48 98	
14	44 0666	15 87	13 33 6	48 98	
15	44 2253	15 87	14 06 0	48 98	
9,16	0,144 3840	15 87	08 14 38 4	48 98	
17	44 5427	15 88	15 10 8	49 01	
18	44 7015	15 87	15 43 2	48 98	
19	44 8602	15 87	16 15 6	48 98	
20	45 0189	15 88	16 48 0	49 01	
9,21	0,145 1777	15 87	08 17 20 4	48 98	
22	45 3364	15 87	17 52 8	48 98	
23	45 4951	15 88	18 25 2	49 01	
24	45 6539	15 87	18 57 6	48 98	
25	45 8126	15 88	19 30 0	49 01	
9,26	0,145 9714	15 87	08 20 02 4	48 98	
27	46 1301	15 88	20 34 8	49 01	
28	46 2889	15 88	21 07 2	49 01	
29	46 4477	15 87	21 39 6	48 98	
30	46 6064	15 88	22 12 0	49 01	
9,31	0,146 7652	15 88	08 22 44 4	49 01	
32	46 9240	15 88	23 16 8	49 01	
33	47 0828	15 87	23 49 2	48 98	
34	47 2415	15 88	24 21 6	49 01	
35	47 4003	15 88	24 54 0	49 01	
9,36	0,147 5591	15 88	08 25 26 4	49 01	
37	47 7179	15 88	25 58 8	49 01	
38	47 8767	15 88	26 31 2	49 01	
39	48 0355	15 88	27 03 6	49 01	
40	48 1943	15 88	27 36 0	49 01	
9,41	0,148 3531	15 89	08 28 08 4	49 04	
42	48 5120	15 88	28 40 8	49 01	
43	48 6708	15 88	29 13 2	49 01	
44	48 8296	15 88	29 45 6	49 01	
45	48 9884	15 89	30 18 0	49 04	
9,46	0,149 1473	15 88	08 30 50 4	49 01	
47	49 3061	15 88	31 22 8	49 01	
48	49 4649	15 89	31 55 2	49 04	
49	49 6238	15 88	32 27 6	49 01	
50	49 7826		33 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=9°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
9,50	0,149 7826	15 89	08 33 00 0	49 04	
9,51	0,149 9415	15 88	08 33 32 4	49 01	
52	50 1003	15 89	34 04 8	49 04	
53	50 2592	15 88	34 37 2	49 01	
54	50 4180	15 89	35 09 6	49 04	
55	50 5769	15 88	35 42 0	49 01	
9,56	0,150 7357	15 89	08 36 14 4	49 04	
57	50 8946	15 89	36 46 8	49 04	
58	51 0535	15 89	37 19 2	49 04	
59	51 2124	15 88	37 51 6	49 01	
60	51 3712	15 89	38 24 0	49 04	
9,61	0,151 5301	15 89	08 38 56 4	49 04	
62	51 6889	15 89	39 28 8	49 04	
63	51 8479	15 89	40 01 2	49 04	
64	52 0068	15 89	40 33 6	49 04	
65	52 1657	15 89	41 06 0	49 04	
9,66	0,152 3246	15 89	08 41 38 4	49 04	
67	52 4835	15 89	42 10 8	49 04	
68	52 6424	15 89	42 43 2	49 04	
69	52 8013	15 89	43 15 6	49 04	
70	52 9602	15 90	43 48 0	49 07	
9,71	0,153 1192	15 89	08 44 20 4	49 04	
72	53 2781	15 89	44 52 8	49 04	
73	53 4370	15 89	45 25 2	49 04	
74	53 5959	15 90	45 57 6	49 07	
75	53 7549	15 89	46 30 0	49 04	
9,76	0,153 9138	15 90	08 47 02 4	49 07	
77	54 0728	15 89	47 34 8	49 04	
78	54 2317	15 90	48 07 2	49 07	
79	54 3907	15 89	48 39 6	49 04	
80	54 5496	15 90	49 12 0	49 07	
9,81	0,154 7086	15 90	08 49 44 4	49 07	
82	54 8676	15 88	50 16 8	49 01	
83	55 0264	15 91	50 49 2	49 10	
84	55 1855	15 90	51 21 6	49 07	
85	55 3445	15 90	51 54 0	49 07	
9,86	0,155 5035	15 89	08 52 26 4	49 04	
87	55 6624	15 90	52 58 8	49 07	
88	55 8214	15 90	53 31 2	49 07	
89	55 9804	15 90	54 03 6	49 07	
90	56 1394	15 90	54 36 0	49 07	
9,91	0,156 2984	15 90	08 55 08 4	49 07	
92	56 3574	15 90	55 40 8	49 07	
93	56 6164	15 90	56 13 2	49 07	
94	56 7754	15 91	56 45 6	49 10	
95	56 9345	15 90	57 18 0	49 07	
9,96	0,157 0935	15 90	08 57 50 4	49 07	
97	57 2525	15 90	58 22 8	49 07	
98	57 4115	15 91	58 55 2	49 10	
99	57 5706	15 90	08 59 27 6	49 07	
10,00	57 7296		09 00 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=10°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		
10,00	0,157 7295	15 93	09 00 00 0		49 07
10,01	0,157 8886	15 91	09 00 32 4		49 10
02	58 0477	15 90	01 04 8		49 07
03	58 2067	15 91	01 37 2		49 10
04	58 3658	15 90	02 09 6		49 07
05	58 5248	15 91	02 42 0		49 10
10,06	0,158 6839	15 91	09 03 14 4		49 10
07	58 8430	15 90	03 46 8		49 07
08	59 0020	15 91	04 19 2		49 10
09	59 1611	15 91	04 51 6		49 10
10	59 3202	15 91	05 24 0		49 10
10,11	0,159 4793	15 90	09 05 56 4		49 07
12	59 6383	15 91	06 28 8		49 10
13	59 7974	15 91	07 01 2		49 10
14	59 9565	15 91	07 33 6		49 10
15	60 1156	15 91	08 06 0		49 10
10,16	0,160 2747	15 91	09 08 38 4		49 10
17	60 4338	15 91	09 10 8		49 10
18	60 5929	15 91	09 43 2		49 10
19	60 7520	15 92	10 15 6		49 14
20	60 9112	15 91	10 48 0		49 10
10,21	0,161 0703	15 91	09 11 20 4		49 10
22	61 2294	15 91	11 52 8		49 10
23	61 3885	15 92	12 25 2		49 14
24	61 5477	15 91	12 57 6		49 10
25	61 7068	15 91	13 30 0		49 10
10,26	0,161 8659	15 92	09 14 02 4		49 14
27	62 0251	15 91	14 34 8		49 10
28	62 1842	15 92	15 07 2		49 14
29	62 3434	15 91	15 39 6		49 10
30	62 5025	15 92	16 12 0		49 14
10,31	0,162 6617	15 92	09 16 44 4		49 14
32	62 8209	15 91	17 16 8		49 10
33	62 9800	15 92	17 49 2		49 14
34	63 1392	15 92	18 21 6		49 14
35	63 2984	15 91	18 54 0		49 10
10,36	0,163 4575	15 92	09 19 26 4		49 14
37	63 6167	15 92	19 58 8		49 14
38	63 7759	15 92	20 31 2		49 14
39	63 9351	15 92	21 03 6		49 14
40	64 0943	15 92	21 36 0		49 14
10,41	0,164 2535	15 92	09 22 08 4		49 14
42	64 4127	15 92	22 40 8		49 14
43	64 5719	15 93	23 13 2		49 17
44	64 7312	15 92	23 45 6		49 14
45	64 8904	15 92	24 18 0		49 14
10,46	0,165 0496	15 92	09 24 50 4		49 14
47	65 2088	15 93	25 22 8		49 17
48	65 3681	15 92	25 55 2		49 14
49	65 5273	15 92	26 27 6		49 14
50	65 6865		27 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=10°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		
10,50	0,165 6865	15 93	09 27 00 0		49 17
10,51	0,165 8458	15 92	09 27 32 4		49 14
52	66 0050	15 93	28 04 8		49 17
53	66 1643	15 92	28 37 2		49 14
54	66 3235	15 93	29 09 6		49 17
55	66 4828	15 92	29 42 0		49 14
10,56	0,166 6420	15 93	09 30 14 4		49 17
57	66 8013	15 93	30 46 8		49 17
58	66 9606	15 92	31 19 2		49 14
59	67 1198	15 93	31 51 6		49 17
60	67 2791	15 93	32 24 0		49 17
10,61	0,167 4384	15 93	09 32 56 4		49 17
62	67 5977	15 93	33 28 8		49 17
63	67 7570	15 93	34 01 2		49 17
64	67 9163	15 93	34 33 6		49 17
65	68 0756	15 93	35 06 0		49 17
10,66	0,168 2349	15 93	09 35 38 4		49 17
67	68 3942	15 93	36 10 8		49 17
68	68 5535	15 93	36 43 2		49 17
69	68 7128	15 94	37 15 6		49 20
70	68 8722	15 93	37 48 0		49 17
10,71	0,169 0315	15 93	09 38 20 4		49 17
72	69 1908	15 94	38 52 8		49 20
73	69 3502	15 93	39 25 2		49 17
74	69 5095	15 93	39 57 6		49 17
75	69 6688	15 94	40 30 0		49 20
10,76	0,169 8282	15 93	09 41 02 4		49 17
77	69 9875	15 94	41 34 8		49 20
78	70 1469	15 93	42 07 2		49 17
79	70 3062	15 94	42 39 6		49 20
80	70 4656	15 94	43 12 0		49 20
10,81	0,170 6250	15 94	09 43 44 4		49 20
82	70 7844	15 94	44 16 8		49 20
83	70 9438	15 93	44 49 2		49 17
84	71 1031	15 94	45 21 6		49 20
85	71 2625	15 94	45 54 0		49 20
10,86	0,171 4219	15 94	09 46 26 4		49 20
87	71 5813	15 94	46 58 8		49 20
88	71 7407	15 94	47 31 2		49 20
89	71 9001	15 94	48 03 6		49 20
90	72 0595	15 94	48 36 0		49 20
10,91	0,172 2189	15 95	09 49 08 4		49 23
92	72 3784	15 94	49 40 8		49 20
93	72 5378	15 94	50 13 2		49 20
94	72 6972	15 94	50 45 6		49 20
95	72 8566	15 95	51 18 0		49 23
10,96	0,173 0161	15 94	09 51 50 4		49 20
97	73 1755	15 94	52 22 8		49 20
98	73 3349	15 95	52 55 2		49 23
99	73 4944	15 94	53 27 6		49 20
11,00	73 6538		54 00 0		

N. E. $k=11°$	L. k.	Alte Einth. D. 1″.	Alte Einth. D. 1″.
Gr. M.		Gr. M. S.	
11,00	0,173 6538	15 95	09 54 00 0	49 23
01	0,173 8133	15 95	09 54 32 4	49 23
02	73 9728	15 94	55 04 8	49 20
03	74 1322	15 95	55 37 2	49 23
04	74 2917	15 95	56 09 6	49 23
05	74 4512	15 94	56 42 0	49 20
11,06	0,174 6106	15 95	09 57 14 4	49 23
07	74 7701	15 95	57 46 8	49 23
08	74 9296	15 95	58 19 2	49 23
09	75 0891	15 95	58 51 6	49 23
10	75 2486	15 95	59 24 0	49 23
11,11	0,175 4081	15 95	09 59 56 4	49 23
12	75 5676	15 95	10 00 28 8	49 23
13	75 7271	15 95	01 01 2	49 23
14	75 8866	15 95	01 33 6	49 23
15	76 0461	15 96	02 06 0	49 26
11,16	0,176 2057	15 95	10 02 38 4	49 23
17	76 3652	15 95	03 10 8	49 23
18	76 5247	15 95	03 43 2	49 23
19	76 6842	15 96	04 15 6	49 26
20	76 8438	15 96	04 48 0	49 26
11,21	0,177 0034	15 95	10 05 20 4	49 23
22	77 1629	15 96	05 52 8	49 26
23	77 3225	15 95	06 25 2	49 23
24	77 4820	15 96	06 57 6	49 26
25	77 6416	15 95	07 30 0	49 23
11,26	0,177 8011	15 96	10 08 02 4	49 26
27	77 9607	15 96	08 34 8	49 26
28	78 1203	15 96	09 07 2	49 26
29	78 2799	15 96	09 39 6	49 26
30	78 4395	15 95	10 12 0	49 23
11,31	0,178 5990	15 96	10 10 44 4	49 26
32	78 7586	15 96	11 16 8	49 26
33	78 9182	15 96	11 49 2	49 26
34	79 0778	15 96	12 21 6	49 26
35	79 2374	15 96	12 54 0	49 26
11,36	0,179 3970	15 96	10 13 26 4	49 26
37	79 5566	15 97	13 58 8	49 29
38	79 7163	15 96	14 31 2	49 26
39	79 8759	15 96	15 03 6	49 26
40	80 0355	15 97	15 36 0	49 29
11,41	0,180 1952	15 96	10 16 08 4	49 26
42	80 3548	15 97	16 40 8	49 29
43	80 5145	15 96	17 13 2	49 26
44	80 6741	15 97	17 45 6	49 29
45	80 8338	15 96	18 18 0	49 26
11,46	0,180 9934	15 97	10 18 50 4	49 29
47	81 1531	15 96	19 22 8	49 26
48	81 3127	15 97	19 55 2	49 29
49	81 4724	15 97	20 27 6	49 29
50	81 6321		21 00 0	

N. E. $k=11°$	L. k.	Alte Einth. D. 1″.	Alte Einth. D. 1″.
Gr. M.		Gr. M. S.	
11,50	0,181 6321	15 97	10 21 00 0	49 29
11,51	0,181 7918	15 97	10 21 32 4	49 29
52	81 9515	15 96	22 04 8	49 26
53	82 1111	15 97	22 37 2	49 29
54	82 2708	15 97	23 09 6	49 29
55	82 4305	15 97	23 42 0	49 29
11,56	0,182 5902	15 98	10 24 14 4	49 32
57	82 7500	15 97	24 46 8	49 29
58	82 9097	15 97	25 19 2	49 29
59	83 0094	15 97	25 51 6	49 29
60	83 2291	15 97	26 24 0	49 29
11,61	0,183 3888	15 98	10 26 56 4	49 32
62	83 5486	15 97	27 28 8	49 29
63	83 7083	15 97	28 01 2	49 29
64	83 8680	15 98	28 33 6	49 32
65	84 0278	15 97	29 06 0	49 29
11,66	0,184 1875	15 98	10 29 38 4	49 32
67	84 3473	15 97	30 10 8	49 29
68	84 5070	15 98	30 43 2	49 32
69	84 6668	15 97	31 15 6	49 29
70	84 8265	15 98	31 48 0	49 32
11,71	0,184 9863	15 98	10 32 20 4	49 32
72	85 1461	15 98	32 52 8	49 32
73	85 3059	15 98	33 25 2	49 32
74	85 4657	15 98	33 57 6	49 32
75	85 6255	15 98	34 30 0	49 32
11,76	0,185 7853	15 98	10 35 02 4	49 32
77	85 9451	15 98	35 34 8	49 32
78	86 1049	15 98	36 07 2	49 32
79	86 2647	15 98	36 39 6	49 32
80	86 4245	15 98	37 12 0	49 32
11,81	0,186 5843	15 99	10 37 44 4	49 35
82	86 7442	15 98	38 16 8	49 32
83	86 9040	15 98	38 49 2	49 32
84	87 0638	15 99	39 21 6	49 35
85	87 2237	15 98	39 54 0	49 32
11,86	0,187 3835	15 99	10 40 26 4	49 35
87	87 5434	15 98	40 58 8	49 32
88	87 7032	15 99	41 31 2	49 35
89	87 8631	15 98	42 03 6	49 32
90	88 0229	15 99	42 36 0	49 35
11,91	0,188 1828	15 99	10 43 08 4	49 35
92	88 3427	15 99	43 40 8	49 35
93	88 5026	15 98	44 13 2	49 32
94	88 6624	15 99	44 45 6	49 35
95	88 8223	15 99	45 18 0	49 35
11,96	0,188 9822	15 99	10 45 50 4	49 35
97	89 1421	15 99	46 22 8	49 35
98	89 3020	15 99	46 55 2	49 35
99	89 4619	15 99	47 27 6	49 35
12,00	89 6218		48 00 0	

N. E.		Alte Einth.		N. E.		Alte Einth.	
$k=12°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.	$k=12°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.
Gr. M.		Gr. M. S.		Gr. M.		Gr. M. S.	
12,00	0,189 6218	15 99	10 48 00 0 49 35	12,50	0,197 6235	16 01	11 15 00 0 49 41
12,01	0,189 7817	15 99	10 48 32 4 49 35	12,51	0,197 7836	16 02	11 15 33 4 49 44
02	89 9416	16 00	49 04 8 49 38	52	97 9438	16 02	16 04 8 49 44
03	90 1016	15 99	49 37 2 49 35	53	98 1040	16 02	16 37 2 49 44
04	90 2615	15 99	50 09 6 49 35	54	98 2642	16 01	17 09 6 49 41
05	90 4214	16 00	50 42 0 49 38	55	98 4243	16 02	17 42 0 49 44
12,06	0,190 5814	15 99	10 51 14 4 49 35	12,56	0,198 5845	16 02	11 18 14 4 49 44
07	90 7413	16 00	51 46 8 49 38	57	98 7447	16 02	18 46 8 49 44
08	90 9013	15 99	52 19 2 49 35	58	98 9049	16 02	19 19 2 49 44
09	91 0612	16 00	52 51 6 49 38	59	99 0651	16 02	19 51 6 49 44
10	91 2212	15 99	53 24 0 49 35	60	99 2253	16 02	20 24 0 49 44
12,11	0,191 3811	16 00	10 53 56 4 49 38	12,61	0,199 3855	16 02	11 20 56 4 49 44
12	91 5411	16 00	54 28 8 49 38	62	99 5457	16 03	21 28 8 49 48
13	91 7011	15 99	55 01 2 49 35	63	99 7060	16 02	22 01 2 49 44
14	91 8610	16 00	55 33 6 49 38	64	0,199 8662	16 02	22 33 6 49 44
15	92 0210	16 00	56 06 0 49 38	65	0,200 0264	16 03	23 06 0 49 48
12,16	0,192 1810	16 00	10 56 38 4 49 38	12,66	0,200 1867	16 02	11 23 38 4 49 44
17	92 3410	16 00	57 10 8 49 38	67	00 3469	16 03	24 10 8 49 48
18	92 5010	16 00	57 43 2 49 38	68	00 5072	16 02	24 43 2 49 44
19	92 6610	16 00	58 15 6 49 38	69	00 6674	16 03	25 15 6 49 48
20	92 8210	16 00	58 48 0 49 38	70	00 8277	16 02	25 48 0 49 44
12,21	0,192 9810	16 00	10 59 20 4 49 38	12,71	0,200 9879	16 03	11 26 20 4 49 48
22	93 1410	16 01	10 59 52 8 49 41	72	01 1482	16 03	26 52 8 49 48
23	93 3011	16 00	11 00 25 2 49 38	73	01 3085	16 02	27 25 2 49 44
24	93 4611	16 00	00 57 6 49 38	74	01 4687	16 03	27 57 6 49 48
25	93 6211	16 01	01 30 0 49 41	75	01 6290	16 03	28 30 0 49 48
12,26	0,193 7812	16 00	11 02 02 4 49 38	12,76	0,201 7893	16 03	11 29 02 4 49 48
27	93 9412	16 00	02 34 8 49 38	77	01 9496	16 03	29 34 8 49 48
28	94 1012	16 01	03 07 2 49 41	78	02 1099	16 03	30 07 2 49 48
29	94 2613	16 01	03 39 6 49 41	79	02 2702	16 03	30 39 6 49 48
30	94 4214	16 00	04 12 0 49 38	80	02 4305	16 03	31 12 0 49 48
12,31	0,194 5814	16 01	11 04 44 4 49 41	12,81	0,202 5908	16 03	11 31 44 4 49 48
32	94 7415	16 01	05 16 8 49 41	82	02 7511	16 03	32 16 8 49 48
33	94 9015	16 01	05 49 2 49 41	83	02 9114	16 04	32 49 2 49 51
34	95 0616	16 01	06 21 6 49 41	84	03 0718	16 03	33 21 6 49 48
35	95 2217	16 01	06 54 0 49 41	85	03 2321	16 03	33 54 0 49 48
12,36	0,195 3818	16 00	11 07 26 4 49 38	12,86	0,203 3924	16 04	11 34 26 4 49 51
37	95 5418	16 01	07 58 8 49 41	87	03 5528	16 03	34 58 8 49 48
38	95 7019	16 01	08 31 2 49 41	88	03 7131	16 04	35 31 2 49 51
39	95 8620	16 01	09 03 6 49 41	89	03 8735	16 03	36 03 6 49 48
40	96 0221	16 02	09 36 0 49 44	90	04 0338	16 04	36 36 0 49 51
12,41	0,196 1823	16 01	11 10 08 4 49 41	12,91	0,204 1942	16 04	11 37 08 4 49 51
42	96 3424	16 01	10 40 8 49 41	92	04 3546	16 03	37 40 8 49 48
43	96 5025	16 01	11 13 2 49 41	93	04 5149	16 04	38 13 2 49 51
44	96 6626	16 02	11 45 6 49 44	94	04 6753	16 04	38 45 6 49 51
45	96 8228	16 01	12 18 0 49 41	95	04 8357	16 04	39 18 0 49 51
12,46	0,196 9829	16 01	11 12 50 4 49 41	12,96	0,204 9961	16 04	11 39 50 4 49 51
47	97 1430	16 02	13 22 8 49 44	97	05 1565	16 04	40 22 8 49 51
48	97 3032	16 01	13 55 2 49 41	98	05 3169	16 04	40 55 2 49 51
49	97 4633	16 02	14 27 6 49 44	99	05 4773	16 04	41 27 6 49 51
50	97 6235		15 00 0	13,00	05 6377		42 00 0

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.		
$k=13°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.			$k=13°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.					Gr. M.			Gr. M. S.				
13,00	0,205 6377	16 04	11	42	00 0	49 51		13,50	0,213 6649	16 07	12	09	00 0	49 60	
13,01	0,205 7981	16 04	11	42	32 4	49 51		13,51	0,213 8256	16 07	12	09	32 4	49 60	
02	05 9585	16 04		43	04 8	49 51		52	13 9863	16 07		10	04 8	49 60	
03	06 1189	16 05		43	37 2	49 54		53	14 1470	16 07		10	37 2	49 60	
04	06 2794	16 04		44	09 6	49 51		54	14 3077	16 07		11	09 6	49 60	
05	06 4398	16 04		44	42 0	49 51		55	14 4684	16 07		11	42 0	49 60	
13,06	0,206 6002	16 05	11	45	14 4	49 54		13,56	0,214 6291	16 07	12	12	14 4	49 60	
07	06 7607	16 04		45	46 8	49 51		57	14 7898	16 07		12	46 8	49 60	
08	06 9211	16 05		46	19 2	49 54		58	14 9505	16 07		13	19 2	49 60	
09	07 0816	16 05		46	51 6	49 54		59	15 1112	16 07		13	51 6	49 60	
10	07 2421	16 04		47	24 0	49 51		60	15 2719	16 08		14	24 0	49 63	
13,11	0,207 4025	16 05	11	47	56 4	49 54		13,61	0,215 4327	16 08	12	14	56 4	49 63	
12	07 5630	16 05		48	28 8	49 54		62	15 5935	16 07		15	28 8	49 60	
13	07 7235	16 05		49	01 2	49 54		63	15 7542	16 08		16	01 2	49 63	
14	07 8840	16 05		49	33 6	49 54		64	15 9150	16 07		16	33 6	49 60	
15	08 0445	16 05		50	06 0	49 54		65	16 0757	16 08		17	06 0	49 63	
13,16	0,208 2050	16 05	11	50	38 4	49 54		13,66	0,216 2365	16 07	12	17	38 4	49 60	
17	08 3655	16 05		51	10 8	49 54		67	16 3972	16 08		18	10 8	49 63	
18	08 5260	16 05		51	43 2	49 54		68	16 5580	16 08		18	43 2	49 63	
19	08 6865	16 05		52	15 6	49 54		69	16 7188	16 08		19	15 6	49 63	
20	08 8470	16 05		52	48 0	49 54		70	16 8796	16 08		19	48 0	49 63	
13,21	0,209 0075	16 05	11	53	20 4	49 54		13,71	0,217 0404	16 07	12	20	20 4	49 60	
22	09 1680	16 05		53	52 8	49 57		72	17 2011	16 08		20	52 8	49 63	
23	09 3286	16 05		54	25 2	49 54		73	17 3619	16 08		21	25 2	49 63	
24	09 4891	16 05		54	57 6	49 54		74	17 5227	16 08		21	57 6	49 63	
25	09 6496	16 06		55	30 0	49 57		75	17 6835	16 09		22	30 0	49 66	
13,26	0,209 8102	16 05	11	56	02 4	49 54		13,76	0,217 8444	16 08	12	23	02 4	49 63	
27	09 9707	16 06		56	34 8	49 57		77	18 0052	16 09		23	34 8	49 66	
28	10 1313	16 06		57	07 2	49 57		78	18 1661	16 08		24	07 2	49 63	
29	10 2919	16 05		57	39 6	49 54		79	18 3269	16 09		24	39 6	49 66	
30	10 4524	16 06		58	12 0	49 57		80	18 4878	16 08		25	12 0	49 63	
13,31	0,210 6130	16 06	11	58	44 4	49 57		13,81	0,218 6486	16 08	12	25	44 4	49 63	
32	10 7736	16 05		59	16 8	49 54		82	18 8094	16 09		26	16 8	49 66	
33	10 9341	16 06	11	59	49 2	49 57		83	18 9703	16 09		26	49 2	49 66	
34	11 0947	16 06	12	00	21 6	49 57		84	19 1312	16 08		27	21 6	49 63	
35	11 2553	16 06		00	54 0	49 57		85	19 2920	16 09		27	54 0	49 66	
13,36	0,211 4159	16 06	12	01	26 4	49 57		13,86	0,219 4529	16 09	12	28	26 4	49 66	
37	11 5765	16 06		01	58 8	49 57		87	19 6138	16 09		28	58 8	49 66	
38	11 7371	16 06		02	31 2	49 57		88	19 7747	16 09		29	31 2	49 66	
39	11 8977	16 07		03	03 6	49 60		89	19 9356	16 09		30	03 6	49 66	
40	12 0584	16 06		03	36 0	49 57		90	20 0965	16 09		30	36 0	49 66	
13,41	0,212 2190	16 07	12	04	08 4	49 60		13,91	0,220 2574	16 09	12	31	08 4	49 66	
42	12 3797	16 06		04	40 8	49 57		92	20 4183	16 09		31	40 8	49 66	
43	12 5403	16 06		05	13 2	49 57		93	20 5792	16 09		32	13 2	49 66	
44	12 7009	16 07		05	45 6	49 60		94	20 7401	16 09		32	45 6	49 66	
45	12 8616	16 06		06	18 0	49 57		95	20 9010	16 10		33	18 0	49 69	
13,46	0,213 0222	16 07	12	06	50 4	49 60		13,96	0,221 0620	16 09	12	33	50 4	49 66	
47	13 1829	16 07		07	22 8	49 60		97	21 2229	16 09		34	22 8	49 66	
48	13 3436	16 06		07	55 2	49 57		98	21 3838	16 09		34	55 2	49 66	
49	13 5042	16 07		08	27 6	49 60		99	21 5447	16 10		35	27 6	49 69	
50	13 6649			09	00 0			14,00	21 7057			36	00 0		

N. E.			Alte Einth.	
$k=14°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
14,00	0,221 7057	16 10	12 36 00 0	49 69
14,01	0,221 8667	16 09	12 36 32 4	49 69
02	22 0277	16 10	37 04 8	49 66
03	22 1866	16 10	37 37 2	49 69
04	22 3496	16 10	38 09 6	49 69
05	22 5106	16 10	38 42 0	49 69
14,06	0,222 6716	16 10	12 39 14 4	49 69
07	22 8326	16 10	39 46 8	49 69
08	22 9936	16 10	40 19 2	49 69
09	23 1546	16 10	40 51 6	49 69
10	23 3156	16 10	41 24 0	49 69
14,11	0,223 4766	16 10	12 41 56 4	49 69
12	23 6376	16 10	42 28 8	49 69
13	23 7986	16 11	43 01 2	49 72
14	23 9597	16 10	43 33 6	49 69
15	24 1207	16 11	44 06 0	49 72
14,16	0,224 2818	16 10	12 44 38 4	49 69
17	24 4428	16 11	45 10 8	49 72
18	24 6039	16 10	45 43 2	49 69
19	24 7649	16 11	46 15 6	49 72
20	24 9260	16 11	6 48 0	49 72
14,21	0,225 0871	16 11	12 47 20 4	49 72
22	25 2482	16 10	47 52 8	49 69
23	25 4092	16 11	48 25 2	49 72
24	25 5703	16 11	48 57 6	49 72
25	25 7314	16 11	49 30 0	49 72
14,26	0,225 8925	16 11	12 50 02 4	49 72
27	26 0536	16 11	50 34 8	49 72
28	26 2147	16 12	51 07 2	49 75
29	26 3759	16 11	51 39 6	49 72
30	26 5370	16 11	52 12 0	49 72
14,31	0,226 6981	16 11	12 52 44 4	49 72
32	26 8592	16 12	53 16 8	49 75
33	27 0204	16 11	53 49 2	49 72
34	27 1815	16 12	54 21 6	49 75
35	27 3427	16 12	54 54 0	49 75
14,36	0,227 5039	16 11	12 55 26 4	49 72
37	27 6650	16 12	55 58 8	49 75
38	27 8262	16 12	56 31 2	49 75
39	27 9874	16 12	57 03 6	49 75
40	28 1486	16 11	57 36 0	49 72
14,41	0,228 3097	16 12	12 58 08 4	49 75
42	28 4709	16 12	58 40 8	49 75
43	28 6321	16 12	59 13 2	49 75
44	28 7933	16 13	12 59 45 6	49 78
45	28 9546	16 12	13 00 18 0	49 75
14,46	0,229 1158	16 12	13 00 50 4	49 75
47	29 2770	16 12	01 22 8	49 75
48	29 4382	16 13	01 55 2	49 78
49	29 5995	16 12	02 27 6	49 75
50	29 7607		03 00 0	

N. E.			Alte Einth.	
$k=14°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
14,50	0,229 7607	16 12	13 03 00 0	49 75
14,51	0,229 9219	16 13	13 03 32 4	49 78
52	30 0832	16 13	04 04 8	49 78
53	30 2445	16 12	04 37 2	49 75
54	30 4057	16 13	05 09 6	49 78
55	30 5670	16 13	05 42 0	49 78
14,56	0,230 7283	16 13	13 06 14 4	49 78
57	30 8896	16 12	06 46 8	49 75
58	31 0508	16 13	07 19 2	49 78
59	31 2121	16 13	07 51 6	49 78
60	31 3734	16 13	08 24 0	49 78
14,61	0,231 5347	16 13	13 08 56 4	49 78
62	31 6960	16 14	09 28 8	49 81
63	31 8574	16 13	10 01 2	49 78
64	32 0187	16 13	10 33 6	49 78
65	32 1800	16 14	11 06 0	49 81
14,66	0,232 3414	16 13	13 11 38 4	49 78
67	32 5027	16 13	12 10 8	49 78
68	32 6640	16 14	12 43 2	49 81
69	32 8254	16 14	13 15 6	49 81
70	32 9868	16 13	13 48 0	49 78
14,71	0,233 1481	16 14	13 14 20 4	49 81
72	33 3095	16 14	14 52 8	49 81
73	33 4709	16 14	15 25 2	49 81
74	33 6323	16 13	15 57 6	49 78
75	33 7936	16 14	16 30 0	49 81
14,76	0,233 9550	16 14	13 17 02 4	49 81
77	34 1164	16 14	17 34 8	49 81
78	34 2778	16 15	18 07 2	49 85
79	34 4393	16 14	18 39 6	49 81
80	34 6007	16 14	19 12 0	49 81
14,81	0,234 7621	16 14	13 19 44 4	49 81
82	34 9235	16 15	20 16 8	49 85
83	35 0850	16 14	20 49 2	49 81
84	35 2464	16 15	21 21 6	49 85
85	35 4079	16 14	21 54 0	49 81
14,86	0,235 5693	16 15	13 22 26 4	49 85
87	35 7308	16 15	22 58 8	49 85
88	35 8923	16 14	23 31 2	49 81
89	36 0537	16 15	24 03 6	49 85
90	36 2152	16 15	24 36 0	49 85
14,91	0,236 3767	16 15	13 25 08 4	49 85
92	36 5382	16 15	25 40 8	49 85
93	36 6997	16 15	26 13 2	49 85
94	36 8612	16 15	26 45 6	49 85
95	37 0227	16 15	27 18 0	49 85
14,96	0,237 1842	16 15	31 27 50 4	49 85
97	37 3457	16 16	28 22 8	49 85
98	37 5073	16 15	28 55 2	49 85
99	37 6688	16 15	29 27 6	49 85
15,00	37 8303		30 00 0	

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=15°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=15°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
15,00	0,237 8303	16 16	13 30 00 0	49 88	15,50	0,245 9152	16 18	13 57 00 0	49 94
15,01	0,237 9919	16 15	13 30 32 4	49 85	15,51	0,246 0770	16 19	13 57 32 4	49 97
02	38 1534	16 16	31 04 8	49 88	52	46 2389	16 19	58 04 8	49 97
03	38 3150	16 16	31 37 2	49 88	53	46 4008	16 18	58 37 2	49 94
04	38 4766	16 15	32 09 6	49 85	54	46 5626	16 19	59 09 6	49 97
05	38 6381	16 16	32 42 0	49 88	55	46 7245	16 19	13 59 42 0	49 97
15,06	0,238 7997	16 16	13 33 14 4	49 88	15,56	0,246 8864	16 19	14 00 14 4	49 97
07	38 9613	16 16	33 46 8	49 88	57	47 0483	16 19	00 46 8	49 97
08	39 1229	16 16	34 19 2	49 88	58	47 2102	16 19	01 19 2	49 97
09	39 2845	16 16	34 51 6	49 88	59	47 3721	16 19	01 51 6	49 97
10	39 4461	16 16	35 24 0	49 88	60	47 5340	16 20	02 24 0	50 00
15,11	0,239 6077	16 16	13 35 56 4	49 88	15,61	0,247 6960	16 19	14 02 56 4	49 97
12	39 7693	16 16	36 28 8	49 88	62	47 8579	16 19	03 28 8	49 97
13	39 9309	16 16	37 01 2	49 88	63	48 0198	16 20	04 01 2	50 00
14	40 0925	16 17	37 33 6	49 91	64	48 1818	16 19	04 33 6	49 97
15	40 2542	16 16	38 06 0	49 88	65	48 3437	16 20	05 06 0	50 00
15,16	0,240 4158	16 16	13 38 38 4	49 88	15,66	0,248 5057	16 19	14 05 38 4	49 97
17	40 5774	16 17	39 10 8	49 91	67	48 6676	16 20	06 10 8	50 00
18	40 7391	16 16	39 43 2	49 88	68	48 8296	16 19	06 43 2	49 97
19	40 9007	16 17	40 15 6	49 91	69	48 9915	16 20	07 15 6	50 00
20	41 0624	16 17	40 48 0	49 91	70	49 1535	16 20	07 48 0	50 00
15,21	0,241 2241	16 17	13 41 20 4	49 91	15,71	0,249 3155	16 20	14 08 20 4	50 00
22	41 3858	16 16	41 52 8	49 88	72	49 4775	16 20	08 52 8	50 00
23	41 5474	16 17	42 25 2	49 91	73	49 6395	16 20	09 25 2	50 00
24	41 7091	16 17	42 57 6	49 91	74	49 8015	16 20	09 57 6	50 00
25	41 8708	16 17	43 30 0	49 91	75	49 9635	16 20	10 30 0	50 00
15,26	0,242 0325	16 17	13 44 02 4	49 91	15,76	0,250 1255	16 20	14 11 02 4	50 00
27	42 1942	16 17	44 34 8	49 91	77	50 2875	16 20	11 34 8	50 00
28	42 3559	16 18	45 07 2	49 94	78	50 4496	16 20	12 07 2	50 00
29	42 5177	16 17	45 39 6	49 91	79	50 6116	16 21	12 39 6	50 03
30	42 6794	16 17	46 12 0	49 91	80	50 7737	16 20	13 12 0	50 00
15,31	0,242 8411	16 18	13 46 44 4	49 94	15,81	0,250 9357	16 21	14 13 44 4	50 03
32	43 0029	16 17	47 16 8	49 91	82	51 0978	16 20	14 16 8	50 00
33	43 1646	16 17	47 49 2	49 91	83	51 2598	16 21	14 49 2	50 03
34	43 3263	16 18	48 21 6	49 94	84	51 4219	16 21	15 21 6	50 03
35	43 4881	16 18	48 54 0	49 94	85	51 5840	16 20	15 54 0	50 00
15,36	0,243 6499	16 17	13 49 26 4	49 91	15,86	0,251 7460	16 21	14 16 26 4	50 03
37	43 8116	16 18	49 58 8	49 94	87	51 9081	16 21	16 58 8	50 03
38	43 9734	16 18	50 31 2	49 94	88	52 0702	16 21	17 31 2	50 03
39	44 1352	16 18	51 03 6	49 94	89	52 2323	16 21	18 03 6	50 03
40	44 2970	16 18	51 36 0	49 94	90	52 3944	16 21	18 36 0	50 03
15,41	0,244 4588	16 18	13 52 08 4	49 94	15,91	0,252 5565	16 21	14 19 08 4	50 03
42	44 6206	16 18	52 40 8	49 94	92	52 7186	16 22	19 40 8	50 06
43	44 7824	16 18	53 13 2	49 94	93	52 8808	16 21	20 13 2	50 03
44	44 9442	16 18	53 45 6	49 94	94	53 0429	16 21	20 45 6	50 03
45	45 1060	16 18	54 18 0	49 94	95	53 2050	16 22	21 18 0	50 06
15,46	0,245 2678	16 19	13 54 50 4	49 97	15,96	0,253 3672	16 21	14 21 50 4	50 03
47	45 4297	16 18	55 22 8	49 94	97	53 5293	16 22	22 22 8	50 06
48	45 5915	16 18	55 55 2	49 94	98	53 6915	16 22	22 55 2	50 06
49	45 7533	16 19	56 27 6	49 97	99	53 8537	16 21	23 27 6	50 03
50	45 9152		57 00 0		16,00	54 0158		24 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=16°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	$k=16°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			Gr. M.			Gr. M. S.		
16,00	0,254 0158	16 22	14 24 00 0	50 06		16,50	0,262 1328	16 25	14 51 00 0	50 15	
16,01	0,254 1780	16 22	14 24 32 4	50 06		16,51	0,262 2953	16 25	14 51 32 4	50 15	
02	54 3402	16 22	25 04 8	50 06		52	62 4578	16 26	52 04 8	50 19	
03	54 5024	16 22	25 37 2	50 06		53	62 6204	16 25	52 37 2	50 15	
04	54 6646	16 22	26 09 6	50 06		54	62 7829	16 26	53 09 6	50 19	
05	54 8268	16 22	26 42 0	50 06		55	62 9455	16 25	53 42 0	50 15	
16,06	0,254 9890	16 22	14 27 14 4	50 06		16,56	0,263 1080	16 26	14 54 14 4	50 19	
07	55 1512	16 22	27 46 8	50 06		57	63 2706	16 25	54 46 8	50 15	
08	55 3134	16 23	28 19 2	50 09		58	63 4331	16 26	55 19 2	50 19	
09	55 4757	16 22	28 51 6	50 06		59	63 5957	16 26	55 51 6	50 19	
10	55 6379	16 22	29 24 0	50 06		60	63 7583	16 25	56 24 0	50 15	
16,11	0,255 8001	16 23	14 29 56 4	50 09		16,61	0,263 9208	16 26	14 56 56 4	50 19	
12	55 9624	16 23	30 28 8	50 09		62	64 0834	16 26	57 28 8	50 19	
13	56 1247	16 22	31 01 2	50 06		63	64 2460	16 26	58 01 2	50 19	
14	56 2869	16 23	31 33 6	50 09		64	64 4086	16 26	58 33 6	50 19	
15	56 4492	16 23	32 06 0	50 09		65	64 5712	16 26	59 06 0	50 19	
16,16	0,256 6115	16 23	14 32 38 4	50 09		16,66	0,264 7338	16 27	14 59 38 4	50 22	
17	56 7738	16 23	33 10 8	50 09		67	64 8965	16 26	15 00 10 8	50 19	
18	56 9361	16 23	33 43 2	50 09		68	65 0591	16 26	00 43 2	50 19	
19	57 0984	16 23	34 15 6	50 09		69	65 2217	16 27	01 15 6	50 22	
20	57 2607	16 23	34 48 0	50 09		70	65 3844	16 26	01 48 0	50 19	
16,21	0,257 4230	16 23	14 35 20 4	50 09		16,71	0,265 5470	16 27	15 02 20 4	50 22	
22	57 5853	16 23	35 52 8	50 09		72	65 7097	16 26	02 52 8	50 19	
23	57 7476	16 23	36 25 2	50 09		73	65 8723	16 27	03 25 2	50 22	
24	57 9099	16 24	36 57 6	50 12		74	66 0350	16 27	03 57 6	50 22	
25	58 0723	16 23	37 30 0	50 09		75	66 1977	16 26	04 30 0	50 19	
16,26	0,258 2346	16 24	14 38 02 4	50 12		16,76	0,266 3603	16 27	15 05 02 4	50 22	
27	58 3970	16 23	38 34 8	50 09		77	66 5230	16 27	05 34 8	50 22	
28	58 5593	16 24	39 07 2	50 12		78	66 6857	16 27	06 07 2	50 22	
29	58 7217	16 23	39 39 6	50 09		79	66 8484	16 27	06 39 6	50 22	
30	58 8840	16 24	40 12 0	50 12		80	67 0111	16 28	07 12 0	50 25	
16,31	0,259 0464	16 24	14 40 44 4	50 12		16,81	0,267 1739	16 27	15 07 44 4	50 22	
32	59 2088	16 24	41 16 8	50 12		82	67 3366	16 27	08 16 8	50 22	
33	59 3712	16 24	41 49 2	50 12		83	67 4993	16 27	08 49 2	50 22	
34	59 5336	16 24	42 21 6	50 12		84	67 6620	16 28	09 21 6	50 25	
35	59 6960	16 24	42 54 0	50 12		85	67 8248	16 27	09 54 0	50 22	
16,36	0,259 8584	16 24	14 43 26 4	50 12		16,86	0,267 9875	16 28	15 10 26 4	50 25	
37	60 0208	16 24	43 58 8	50 12		87	68 1503	16 28	10 58 8	50 25	
38	60 1832	16 25	44 31 2	50 15		88	68 3131	16 27	11 31 2	50 22	
39	60 3457	16 24	45 03 6	50 12		89	68 4758	16 28	12 03 6	50 25	
40	60 5081	16 25	45 36 0	50 15		90	68 6386	16 28	12 36 0	50 25	
16,41	0,260 6706	16 24	14 46 08 4	50 12		16,91	0,268 8014	16 28	15 13 08 4	50 25	
42	60 8330	16 25	46 40 8	50 15		92	68 9642	16 28	13 40 8	50 25	
43	60 9955	16 24	47 13 2	50 12		93	69 1270	16 28	14 13 2	50 25	
44	61 1579	16 25	47 45 6	50 15		94	69 2898	16 28	14 45 6	50 25	
45	61 3204	16 25	48 18 0	50 15		95	69 4526	16 28	15 18 0	50 25	
16,46	0,261 4829	16 24	14 48 50 4	50 12		16,96	0,269 6154	16 29	15 15 50 4	50 28	
47	61 6453	16 25	49 22 8	50 15		97	69 7783	16 28	16 22 8	50 25	
48	61 8078	16 25	49 55 2	50 15		98	69 9411	16 28	16 55 2	50 25	
49	61 9703	16 25	50 27 6	50 15		99	70 1039	16 29	17 27 6	50 28	
50	62 1328		51 00 0			17,00	70 2668		18 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.		
$k=17°$	ϱ. k.	D. 1″.			D. 1″.			$k=17°$	ϱ. k.	D. 1″.			D. 1″.		
Gr. M.			Gr.	M.	S.			Gr. M.			Gr.	M.	S.		
17,00	0,270 2668	16 28	15	18	00 0	50	25	17,50	0,278 4182	16 32	15	45	03 0	50	37
17,01	0,270 4296	16 29	15	18	32 4	50	28	17,51	0,278 5814	16 32	15	45	32 4	50	37
02	70 5925	16 28		19	04 8	50	25	52	78 7446	16 32		46	04 8	50	37
03	70 7553	16 29		19	37 2	50	28	53	78 9078	16 33		46	37 2	50	40
04	70 9182	16 29		20	09 6	50	28	54	79 0711	16 32		47	09 6	50	37
05	71 0811	16 29		20	42 0	50	28	55	79 2343	16 32		47	42 0	50	37
17,06	0,271 2440	16 29	15	21	14 4	50	28	17,56	0,279 3975	16 33	15	48	14 4	50	40
07	71 4069	16 29		21	46 8	50	28	57	79 5608	16 33		48	46 8	50	40
08	71 5698	16 29		22	19 2	50	28	58	79 7241	16 32		49	19 2	50	37
09	71 7327	16 29		22	51 6	50	28	59	79 8873	16 33		49	51 6	50	40
10	71 8956	16 29		23	24 0	50	28	60	80 0506	16 33		50	24 0	50	40
17,11	0,272 0585	16 30	15	23	56 4	50	31	17,61	0,280 2139	16 33	15	50	56 4	50	40
12	72 2215	16 29		24	28 8	50	28	62	80 3772	16 33		51	28 8	50	40
13	72 3844	16 30		25	01 2	50	31	63	80 5405	16 33		52	01 2	50	40
14	72 5474	16 29		25	33 6	50	28	64	80 7038	16 33		52	33 6	50	40
15	72 7103	16 30		26	06 0	50	31	65	80 8671	16 33		53	06 0	50	40
17,16	0,272 8733	16 29	15	26	38 4	50	28	17,66	0,281 0304	16 34	15	53	38 4	50	43
17	73 0362	16 30		27	10 8	50	31	67	81 1938	16 33		54	10 8	50	40
18	73 1992	16 30		27	43 2	50	31	68	81 3571	16 33		54	43 2	50	40
19	73 3622	16 30		28	15 6	50	31	69	81 5204	16 34		55	15 6	50	43
20	73 5252	16 30		28	48 0	50	31	70	81 6838	16 33		55	48 0	50	40
17,21	0,273 6882	16 30	15	29	20 4	50	31	17,71	0,281 8471	16 34	15	56	20 4	50	43
22	73 8512	16 30		29	52 8	50	31	72	82 0105	16 34		56	52 8	50	43
23	74 0142	16 30		30	25 2	50	31	73	82 1739	16 33		57	25 2	50	40
24	74 1772	16 30		30	57 6	50	31	74	82 3372	16 34		57	57 6	50	43
25	74 3403	16 30		31	30 0	50	31	75	82 5006	16 34		58	30 0	50	43
17,26	0,274 5033	16 30	15	32	02 4	50	31	17,76	0,282 6640	16 34	15	59	02 4	50	43
27	74 6663	16 31		32	34 8	50	34	77	82 8274	16 34	15	59	34 8	50	43
28	74 8294	16 30		33	07 2	50	31	78	82 9908	16 35	16	00	07 2	50	46
29	74 9924	16 31		33	39 6	50	34	79	83 1543	16 34		00	39 6	50	43
30	75 1555	16 31		34	12 0	50	34	80	83 3177	16 34		01	12 0	50	43
17,31	0,275 3186	16 30	15	34	44 4	50	31	17,81	0,283 4811	16 35	16	01	44 4	50	46
32	75 4816	16 31		35	16 8	50	34	82	83 6446	16 34		02	16 8	50	43
33	75 6447	16 31		35	49 2	50	34	83	83 8080	16 34		02	49 2	50	43
34	75 8078	16 31		36	21 6	50	34	84	83 9714	16 35		03	21 6	50	46
35	75 9709	16 31		36	54 0	50	34	85	84 1349	16 35		03	54 0	50	46
17,36	0,276 1340	16 31	15	37	26 4	50	34	17,86	0,284 2984	16 34	16	04	26 4	50	43
37	76 2971	16 31		37	58 8	50	34	87	84 4618	16 35		04	58 8	50	46
38	76 4602	16 32		38	31 2	50	37	88	84 6253	16 35		05	31 2	50	46
39	76 6234	16 31		39	03 6	50	34	89	84 7888	16 35		06	03 6	50	46
40	76 7865	16 31		39	36 0	50	34	90	84 9523	16 35		06	36 0	50	46
17,41	0,276 9496	16 32	15	40	08 4	50	37	17,91	0,285 1158	16 35	16	07	08 4	50	46
42	77 1128	16 31		40	40 8	50	34	92	85 2793	16 35		07	40 8	50	46
43	77 2759	16 32		41	13 2	50	37	93	85 4428	16 36		08	13 2	50	49
44	77 4391	16 31		41	45 6	50	34	94	85 6064	16 35		08	45 6	50	46
45	77 6022	16 32		42	18 0	50	37	95	85 7699	16 35		09	18 0	50	46
17,46	0,277 7654	16 32	15	42	50 4	50	37	17,96	0,285 9334	16 36	16	09	50 4	50	49
47	77 9286	16 32		43	22 8	50	37	97	86 0970	16 36		10	22 8	50	49
48	78 0918	16 32		43	55 2	50	37	98	86 2606	16 35		10	55 2	50	46
49	78 2550	16 32		44	27 6	50	37	99	86 4241	16 36		11	27 6	50	49
50	78 4182			45	00 0			18,00	86 5877			12	00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=18°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.			
18,00	0,286 5877	16 36	16 12 00 0		50 49	
18,01	0,286 7513	16 36	16 12 32 4		50 89	
02	86 9149	16 35	13 04 8		50 46	
03	87 0784	16 36	13 37 2		50 49	
04	87 2420	16 37	14 09 6		50 52	
05	87 4057	16 36	14 42 0		50 49	
18,06	0,287 5693	16 36	16 15 14 4		50 49	
07	87 7329	16 36	15 46 8		50 49	
08	87 8965	16 37	16 19 2		50 52	
09	88 0602	16 36	16 51 6		50 49	
10	88 2238	16 36	17 24 0		50 49	
18,11	0,288 3874	16 37	16 17 56 4		50 52	
12	88 5511	16 37	18 28 8		50 52	
13	88 7148	16 37	19 01 2		50 52	
14	88 8785	16 36	19 33 6		50 49	
15	89 0421	16 37	20 06 0		50 52	
18,16	0,289 2058	16 37	16 20 38 4		50 52	
17	89 3695	16 37	21 10 8		50 52	
18	89 5332	16 38	21 43 2		50 56	
19	89 6970	16 37	22 15 6		50 52	
20	89 8607	16 37	22 48 0		50 52	
18,21	0,290 0244	16 37	16 23 20 4		50 52	
22	90 1881	16 38	23 52 8		50 56	
23	90 3519	16 37	24 25 2		50 52	
24	90 5156	16 38	24 57 6		50 56	
25	90 6794	16 38	25 30 0		50 56	
18,26	0,290 8432	16 37	16 26 02 4		50 52	
27	91 0069	16 38	26 34 8		50 56	
28	91 1707	16 38	27 07 2		50 56	
29	91 3345	16 38	27 39 6		50 56	
30	91 4983	16 38	28 12 0		50 56	
18,31	0,291 6621	16 38	16 28 44 4		50 56	
32	91 8259	16 38	29 16 8		50 56	
33	91 9897	16 39	29 49 2		50 59	
34	92 1536	16 38	30 21 6		50 56	
35	92 3174	16 38	30 54 0		50 56	
18,36	0,292 4812	16 39	16 31 26 4		50 59	
37	92 6451	16 38	31 58 8		50 56	
38	92 8089	16 39	32 31 2		50 59	
39	92 9728	16 39	33 03 6		50 89	
40	93 1367	16 39	33 36 0		50 59	
18,41	0,293 3006	16 39	16 34 08 4		50 59	
42	93 4645	16 39	34 40 8		50 59	
43	93 6284	16 39	35 13 2		50 59	
44	93 7923	16 39	35 45 6		50 59	
45	93 9562	16 39	36 18 0		50 59	
18,46	0,294 1201	16 39	16 36 50 4		50 59	
47	94 2840	16 39	37 22 8		50 59	
48	94 4479	16 40	37 55 2		50 62	
49	94 6119	16 39	38 27 6		50 59	
50	94 7758		39 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=18°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.			
18,50	0,294 7758	16 40	16 39 00 0		50 62	
18,51	0,294 9398	16 40	16 39 32 4		50 62	
52	95 1038	16 40	40 04 8		50 62	
53	95 2677	16 40	40 37 2		50 62	
54	95 4317	16 40	41 09 6		50 62	
55	95 5957	16 40	41 42 0		50 62	
18,56	0,295 7597	16 40	16 42 14 4		50 62	
57	95 9237	16 40	42 46 8		50 62	
58	96 0877	16 40	43 19 2		50 62	
59	96 2517	16 40	43 51 6		50 62	
60	96 4158	16 40	44 24 0		50 62	
18,61	0,296 5798	16 40	16 44 56 4		50 62	
62	96 7438	16 40	45 28 8		50 62	
63	96 9079	16 41	46 01 2		50 65	
64	97 0720	16 40	46 33 6		50 62	
65	97 2360	16 40	47 06 0		50 62	
18,66	0,297 4001	16 41	16 47 38 4		50 65	
67	97 5642	16 41	48 10 8		50 65	
68	97 7283	16 41	48 43 2		50 65	
69	97 8924	16 41	49 15 6		50 65	
70	98 0565	16 41	49 48 0		50 65	
18,71	0,298 2206	16 41	16 50 20 4		50 65	
72	98 3847	16 41	50 52 8		50 65	
73	98 5488	16 42	51 25 2		50 68	
74	98 7130	16 41	51 57 6		50 65	
75	98 8771	16 42	52 30 0		50 68	
18,76	0,299 0413	16 41	16 53 02 4		50 65	
77	99 2054	16 42	53 34 8		50 68	
78	99 3696	16 42	54 07 2		50 68	
79	99 5338	16 41	54 39 6		50 65	
80	99 6979	16 42	55 12 0		50 68	
18,81	0,299 8621	16 42	16 55 44 4		50 68	
82	0,300 0263	16 42	56 16 8		50 68	
83	00 1905	16 43	56 49 2		50 71	
84	00 3548	16 42	57 21 6		50 68	
85	00 5190	16 42	57 54 0		50 68	
18,86	0,300 6832	16 42	16 58 26 4		50 68	
87	00 8474	16 43	58 58 8		50 71	
88	01 0117	16 42	16 59 31 2		50 68	
89	01 1759	16 43	17 00 03 6		50 71	
90	01 3402	16 43	00 36 0		50 71	
18,91	0,301 5045	16 43	17 01 08 4		50 71	
92	01 6688	16 42	01 40 8		50 68	
93	01 8330	16 43	02 13 2		50 71	
94	01 9973	16 43	02 45 6		50 71	
95	02 1616	16 43	03 18 0		50 71	
18,96	0,302 3259	16 44	17 03 50 4		50 74	
97	02 4903	16 43	04 22 8		50 71	
98	02 6546	16 43	04 55 2		50 71	
99	02 8189	16 44	05 27 6		50 74	
19,00	02 9833		06 00 0			

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=19°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=19°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
19,00	0,302 9833	16 43	17 06 00 0	50 71	19,50	0,311 2105	16 48	17 33 00 0	50 86
19,01	0,303 1476	16 44	17 06 32 4	50 74	19,51	0,311 3753	16 47	17 33 32 4	50 83
02	03 3120	16 43	07 04 8	50 71	52	11 5400	16 48	34 04 8	50 86
03	03 4763	16 44	07 37 2	50 74	53	11 7048	16 48	34 37 2	50 86
04	03 6407	16 44	08 09 6	50 74	54	11 8696	16 48	35 09 6	50 86
05	03 8051	16 44	08 42 0	50 74	55	12 0344	16 48	35 42 0	50 86
19,06	0,303 9695	16 44	17 09 14 4	50 74	19,56	0,312 1992	16 48	17 36 14 4	50 86
07	04 1339	16 44	09 46 8	50 74	57	12 3640	16 48	36 46 8	50 86
08	04 2983	16 44	10 19 2	50 74	58	12 5288	16 48	37 19 2	50 86
09	04 4627	16 44	10 51 6	50 74	59	12 6936	16 48	37 51 6	50 86
10	04 6271	16 45	11 24 0	50 77	60	12 8584	16 49	38 24 0	50 90
19,11	0,304 7916	16 44	17 11 56 4	50 74	19,61	0,313 0233	16 48	17 38 56 4	50 86
12	04 9560	16 44	12 28 8	50 74	62	13 1881	16 48	39 28 8	50 86
13	05 1204	16 45	13 01 2	50 77	63	13 3529	16 49	40 01 2	50 90
14	05 2849	16 45	13 33 6	50 77	64	13 5178	16 49	40 33 6	50 90
15	05 4494	16 44	14 06 0	50 74	65	13 6827	16 48	41 06 0	50 86
19,16	0,305 6138	16 45	17 14 38 4	50 77	19,66	0,313 8475	16 49	17 41 38 4	50 90
17	05 7783	16 45	15 10 8	50 77	67	14 0124	16 49	42 10 8	50 90
18	05 9428	16 45	15 43 2	50 77	68	14 1773	16 49	42 43 2	50 90
19	06 1073	16 45	16 15 6	50 77	69	14 3422	16 49	43 15 6	50 90
20	06 2718	16 45	16 48 0	50 77	70	14 5071	16 49	43 48 0	50 90
19,21	0,306 4363	16 45	17 17 20 4	50 77	19,71	0,314 6720	16 50	17 44 20 4	50 93
22	06 6008	16 45	17 52 8	50 77	72	14 8370	16 49	44 52 8	50 90
23	06 7653	16 45	18 25 2	50 77	73	15 0019	16 49	45 25 2	50 90
24	06 9298	16 46	18 57 6	50 80	74	15 1668	16 50	45 57 6	50 93
25	07 0944	16 45	19 30 0	50 77	75	15 3318	16 49	46 30 0	50 90
19,26	0,307 2589	16 46	17 20 02 4	50 80	19,76	0,315 4967	16 50	17 47 02 4	50 93
27	07 4235	16 45	20 34 8	50 77	77	15 6617	16 50	47 34 8	50 93
28	07 5880	16 46	21 07 2	50 80	78	15 8267	16 50	48 07 2	50 93
29	07 7526	16 46	21 39 6	50 80	79	15 9917	16 50	48 39 6	50 93
30	07 9172	16 46	22 12 0	50 80	80	16 1567	16 50	49 12 0	50 93
19,31	0,308 0818	16 46	17 22 44 4	50 80	19,81	0,316 3217	16 50	17 49 44 4	50 93
32	08 2464	16 46	23 16 8	50 80	82	16 4867	16 50	50 16 8	50 93
33	08 4110	16 46	23 49 2	50 80	83	16 6517	16 50	50 49 2	50 93
34	08 5756	16 46	24 21 6	50 80	84	16 8167	16 50	51 21 6	50 93
35	08 7402	16 46	24 54 0	50 80	85	16 9818	16 50	51 54 0	50 93
19,36	0,308 9048	16 47	17 25 26 4	50 83	19,86	0,317 1468	16 50	17 52 26 4	50 93
37	09 0695	16 46	25 58 8	50 80	87	17 3118	16 51	52 58 8	50 96
38	09 2341	16 47	26 31 2	50 83	88	17 4769	16 51	53 31 2	50 96
39	09 3988	16 47	27 03 6	50 83	89	17 6420	16 50	54 03 6	50 93
40	09 5635	16 46	27 36 0	50 80	90	17 8070	16 51	54 36 0	50 96
19,41	0,309 7281	16 47	17 28 08 4	50 83	19,91	0,317 9721	16 51	17 55 08 4	50 96
42	09 8928	16 47	28 40 8	50 83	92	18 1372	16 51	55 40 8	50 96
43	10 0575	16 47	29 13 2	50 83	93	18 3023	16 51	56 13 2	50 96
44	10 2222	16 47	29 45 6	50 83	94	18 4674	16 51	56 45 6	50 96
45	10 3869	16 47	30 18 0	50 83	95	18 6325	16 52	57 18 0	50 99
19,46	0,310 5516	16 47	17 30 50 4	50 83	19,96	0,318 7977	16 51	17 57 50 4	50 96
47	10 7163	16 48	31 22 8	50 86	97	18 9628	16 51	58 22 8	50 96
48	10 8811	16 47	31 55 2	50 83	98	19 1279	16 52	58 55 2	50 99
49	11 0458	16 47	32 27 6	50 83	99	19 2931	16 52	17 59 27 6	50 99
50	11 2105		33 00 0		20,00	19 4583		18 00 00 0	

N. E.		Alte Einth.		N. E.		Alte Einth.	
$k=20°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.	$k=20°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.
Gr. M.		Gr. M. S.		Gr. M.		Gr. M. S.	
20,00	0,319 4583	16 51	18 00 00 0 50 96	20,50	0,327 7271	16 55	18 27 00 0 51 14
20,01	0,319 6234	16 52	18 00 32 4 50 99	20,51	0,327 8926	16 57	18 27 32 4 51 11
02	19 7886	16 52	01 04 8 50 99	52	28 0583	16 56	28 04 8 51 11
03	19 9538	16 52	01 37 2 50 99	53	28 2239	16 56	28 37 2 51 11
04	20 1190	16 52	02 09 6 50 99	54	28 3895	16 56	29 09 6 51 11
05	20 2842	16 52	02 42 0 50 99	55	28 5551	16 57	29 42 0 51 14
20,06	0,320 4494	16 52	18 03 14 4 50 99	20,56	0,328 7208	16 56	18 30 14 4 51 10
07	20 6146	16 52	03 46 8 50 99	57	28 8864	16 57	30 46 8 51 14
08	20 7798	16 53	04 19 2 51 02	58	29 0521	16 56	31 19 2 51 11
09	20 9451	16 52	04 51 6 50 99	59	29 2177	16 57	31 51 6 51 14
10	21 1103	16 53	05 24 0 51 02	60	29 3834	16 57	32 24 0 51 14
20,11	0,321 2756	16 52	18 05 56 4 50 99	20,61	0,329 5491	16 57	18 32 56 4 51 14
12	21 4408	16 53	06 28 8 51 02	62	29 7148	16 57	33 28 8 51 14
13	21 6061	16 53	07 01 2 51 02	63	29 8805	16 57	34 01 2 51 14
14	21 7714	16 52	07 33 6 50 99	64	30 0462	16 57	34 33 6 51 14
15	21 9366	16 53	08 06 0 51 02	65	30 2119	16 57	35 06 0 51 14
20,16	0,322 1019	16 53	18 08 38 4 51 02	20,66	0,330 3776	16 58	18 35 38 4 51 17
17	22 2672	16 54	09 10 8 51 05	67	30 5434	16 57	36 10 8 51 14
18	22 4326	16 53	09 43 2 51 02	68	30 7091	16 58	36 43 2 51 17
19	22 5979	16 53	10 15 6 51 02	69	30 8749	16 57	37 15 6 51 14
20	22 7632	16 54	10 48 0 51 05	70	31 0406	16 58	37 48 0 51 17
20,21	0,322 9286	16 53	18 11 20 4 51 02	20,71	0,331 2064	16 58	18 38 20 4 51 17
22	23 0939	16 54	11 52 8 51 05	72	31 3722	16 58	38 52 8 51 17
23	23 2593	16 53	12 25 2 51 02	73	31 5380	16 58	39 25 2 51 17
24	23 4246	16 54	12 57 6 51 05	74	31 7038	16 58	39 57 6 51 17
25	23 5900	16 54	13 30 0 51 05	75	31 8696	16 58	40 30 0 51 17
20,26	0,323 7554	16 53	18 14 02 4 51 02	20,76	0,332 0354	16 58	18 41 02 4 51 17
27	23 9207	16 54	14 34 8 51 05	77	32 2012	16 58	41 34 8 51 17
28	24 0861	16 54	15 07 2 51 05	78	32 3670	16 59	42 07 2 51 20
29	24 2515	16 55	15 39 6 51 08	79	32 5329	16 58	42 39 6 51 17
30	24 4170	16 54	16 12 0 51 05	80	32 6987	16 59	43 12 0 51 20
20,31	0,324 5824	16 54	18 16 44 4 51 05	20,81	0,332 8646	16 58	18 43 44 4 51 17
32	24 7478	16 55	17 16 8 51 08	82	33 0304	16 59	44 16 8 51 20
33	24 9133	16 54	17 49 2 51 05	83	33 1963	16 59	44 49 2 51 17
34	25 0787	16 55	18 21 6 51 08	84	33 3622	16 59	45 21 6 51 20
35	25 2442	16 54	18 54 0 51 05	85	33 5281	16 59	45 54 0 51 20
20,36	0,325 4096	16 55	18 19 26 4 51 08	20,86	0,333 6940	16 59	18 46 26 4 51 20
37	25 5751	16 55	19 58 8 51 08	87	33 8599	16 59	46 58 8 51 20
38	25 7406	16 55	20 31 2 51 08	88	34 0258	16 60	47 31 2 51 23
39	25 9061	16 55	21 03 6 51 08	89	34 1918	16 59	48 03 6 51 20
40	26 0716	16 55	21 36 0 51 08	90	34 3577	16 59	48 36 0 51 20
20,41	0,326 2371	16 55	18 22 08 4 51 08	20,91	0,334 5236	16 60	18 49 08 4 51 23
42	26 4026	16 55	22 40 8 51 08	92	34 6896	16 60	49 40 8 51 23
43	26 5681	16 56	23 13 2 51 11	93	34 8556	16 60	50 13 2 51 23
44	26 7337	16 55	23 45 6 51 08	94	35 0215	16 60	50 45 6 51 23
45	26 8992	16 56	24 18 0 51 11	95	35 1875	16 60	51 18 0 51 23
20,46	0,327 0648	16 55	18 24 50 4 51 08	20,96	0,335 3535	16 60	18 51 50 4 51 23
47	27 2303	16 56	25 22 8 51 11	97	35 5195	16 60	52 22 8 51 23
48	27 3959	16 56	25 55 2 51 11	98	35 6855	16 60	52 55 2 51 23
49	27 5615	16 56	26 27 6 51 11	99	35 8515	16 61	53 27 6 51 27
50	27 7271		27 00 0	21,00	36 0176		54 00 0

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=21°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	$k=21°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			Gr. M.			Gr. M. S.		
21,00	0,336 0176	16 60	18 54 00 0	51 23		21,50	0,344 3304	16 65	19 21 00 0	51 39	
21,01	0,336 1836	16 60	18 54 32 4	51 23		21,51	0,344 4969	16 65	19 21 32 4	51 39	
02	36 3496	16 61	55 04 8	51 27		52	44 6634	16 65	22 04 8	51 39	
03	36 5157	16 61	55 37 2	51 27		53	44 8299	16 65	22 37 2	51 39	
04	36 6818	16 60	56 09 6	51 23		54	44 9964	16 65	23 09 6	51 39	
05	36 8478	16 61	56 42 0	51 27		55	45 1629	16 65	23 42 0	51 39	
21,06	0,337 0139	16 61	18 57 14 4	51 27		21,56	0,345 3294	16 66	19 24 14 4	51 42	
07	37 1800	16 61	57 46 8	51 27		57	45 4960	16 65	24 46 8	51 39	
08	37 3461	16 61	58 19 2	51 27		58	45 6625	16 66	25 19 2	51 42	
09	37 5122	16 61	58 51 6	51 27		59	45 8291	16 66	25 51 6	51 42	
10	37 6783	16 62	59 24 0	51 30		60	45 9957	16 66	26 24 0	51 42	
21,11	0,337 8445	16 61	18 59 56 4	51 27		21,61	0,346 1623	16 66	19 26 56 4	51 42	
12	38 0106	16 61	19 00 28 8	51 27		62	46 3289	16 66	27 28 8	51 42	
13	38 1767	16 62	01 01 2	51 30		63	46 4955	16 66	28 01 2	51 42	
14	38 3429	16 62	01 33 6	51 30		64	46 6621	16 66	28 33 6	51 42	
15	38 5091	16 61	02 06 0	51 27		65	46 8287	16 66	29 06 0	51 42	
21,16	0,338 6752	16 62	19 02 38 4	51 30		21,66	0,346 9953	16 66	19 29 38 4	51 42	
17	38 8414	16 62	03 10 8	51 30		67	47 1619	16 67	30 10 8	51 45	
18	39 0076	16 62	03 43 2	51 30		68	47 3286	16 66	30 43 2	51 42	
19	39 1738	16 62	04 15 6	51 30		69	47 4952	16 67	31 15 6	51 45	
20	39 3400	16 62	04 48 0	51 30		70	47 6619	16 67	31 48 0	51 45	
21,21	0,339 5062	16 62	19 05 20 4	51 30		21,71	0,347 8286	16 67	19 32 20 4	51 45	
22	39 6724	16 63	05 52 8	51 33		72	47 9953	16 66	32 52 8	51 42	
23	39 8387	16 62	06 25 2	51 30		73	48 1619	16 67	33 25 2	51 45	
24	40 0049	16 62	06 57 6	51 30		74	48 3286	16 68	33 57 6	51 48	
25	40 1711	16 63	07 30 0	51 33		75	48 4954	16 67	34 30 0	51 45	
21,26	0,340 3374	16 63	19 08 02 4	51 33		21,76	0,348 6621	16 67	19 35 02 4	51 45	
27	40 5037	16 63	08 34 8	51 33		77	48 8288	16 68	35 34 8	51 48	
28	40 6700	16 62	09 07 2	51 30		78	48 9956	16 67	36 07 2	51 45	
29	40 8362	16 63	09 39 6	51 33		79	49 1623	16 68	36 39 6	51 48	
30	41 0025	16 63	10 12 0	51 33		80	49 3291	16 67	37 12 0	51 45	
21,31	0,341 1688	16 64	19 10 44 4	51 36		21,81	0,349 4958	16 68	19 37 44 4	51 48	
32	41 3352	16 63	11 16 8	51 33		82	49 6626	16 68	38 16 8	51 48	
33	41 5015	16 63	11 49 2	51 33		83	49 8294	16 68	38 49 2	51 48	
34	41 6678	16 64	12 21 6	51 36		84	49 9962	16 68	39 21 6	51 48	
35	41 8342	16 63	12 54 0	51 33		85	50 1630	16 68	39 54 0	51 48	
21,36	0,342 0005	16 64	19 13 26 4	51 36		21,86	0,350 3298	16 68	19 40 26 4	51 48	
37	42 1669	16 63	13 58 8	51 33		87	50 4966	16 69	40 58 8	51 51	
38	42 3332	16 64	14 31 2	51 36		88	50 6635	16 68	41 31 2	51 48	
39	42 4996	16 64	15 03 6	51 36		89	50 8303	16 68	42 03 6	51 48	
40	42 6660	16 64	15 36 0	51 36		90	50 9971	16 69	42 36 0	51 51	
21,41	0,342 8324	16 64	19 16 08 4	51 36		21,91	0,351 1640	16 69	19 43 08 4	51 51	
42	42 9988	16 64	16 40 8	51 36		92	51 3309	16 68	43 40 8	51 48	
43	43 1652	16 65	17 13 2	51 39		93	51 4977	16 69	44 13 2	51 51	
44	43 3317	16 64	17 45 6	51 36		94	51 6646	16 69	44 45 6	51 51	
45	43 4981	16 64	18 18 0	51 36		95	51 8315	16 69	45 18 0	51 51	
21,46	0,343 6645	16 65	19 18 50 4	51 39		21,96	0,351 9984	16 70	19 45 50 4	51 54	
47	43 8310	16 64	19 22 8	51 36		97	52 1654	16 69	46 22 8	51 51	
48	43 9974	16 65	19 55 2	51 39		98	52 3323	16 69	46 55 2	51 51	
49	44 1639	16 65	20 27 6	51 39		99	52 4992	16 70	47 27 6	51 54	
50	44 3304		21 00 0			22,00	52 6662		48 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=22°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			
22,00	0,352 6662	16 69	19 48 00 0	51 51		
22,01	0,352 8331	16 70	19 48 32 4	51 54		
02	53 0001	16 70	49 04 8	51 54		
03	53 1671	16 69	49 37 2	51 51		
04	53 3340	16 70	50 09 6	51 54		
05	53 5010	16 70	50 42 0	51 54		
22,06	0,353 6680	16 70	19 51 14 4	51 54		
07	53 8350	16 71	51 46 8	51 57		
08	54 0021	16 70	52 19 2	51 54		
09	54 1691	16 70	52 51 6	51 54		
10	54 3361	16 71	53 24 0	51 57		
22,11	0,354 5032	16 70	19 53 56 4	51 54		
12	54 6702	16 71	54 28 8	51 57		
13	54 8373	16 71	55 01 2	51 57		
14	55 0044	16 71	55 33 6	51 57		
15	55 1715	16 71	56 06 0	51 57		
22,16	0,355 3386	16 71	19 56 38 4	51 57		
17	55 5057	16 71	57 10 8	51 57		
18	55 6728	16 71	57 43 2	51 57		
19	55 8399	16 72	58 15 6	51 60		
20	56 0071	16 71	58 48 0	51 57		
22,21	0,356 1742	16 72	19 59 20 4	51 60		
22	56 3414	16 71	19 59 52 8	51 57		
23	56 5085	16 72	20 00 25 2	51 60		
24	56 6757	16 72	00 57 6	51 60		
25	56 8429	16 72	01 30 0	51 60		
22,26	0,357 0101	16 72	20 02 02 4	51 60		
27	57 1773	16 72	02 34 8	51 60		
28	57 3445	16 72	03 07 2	51 60		
29	57 5117	16 72	03 39 6	51 60		
30	57 6789	16 73	04 12 0	51 64		
22,31	0,357 8462	16 72	20 04 44 4	51 60		
32	58 0134	16 73	05 16 8	51 64		
33	58 1807	16 72	05 49 2	51 60		
34	58 3479	16 73	06 21 6	51 64		
35	58 5152	16 73	06 54 0	51 64		
22,36	0,358 6825	16 73	20 07 26 4	51 64		
37	58 8498	16 73	07 58 8	51 64		
38	59 0171	16 73	08 31 2	51 64		
39	59 1844	16 74	09 03 6	51 67		
40	59 3518	16 73	09 36 0	51 64		
22,41	0,359 5191	16 73	20 10 08 4	51 64		
42	59 6864	16 74	10 40 8	51 67		
43	59 8538	16 74	11 13 2	51 67		
44	60 0212	16 73	11 45 6	51 64		
45	60 1885	16 74	12 18 0	51 67		
22,46	0,360 3559	16 74	20 12 50 4	51 67		
47	60 5233	16 74	13 22 8	51 67		
48	60 6907	16 74	13 55 2	51 67		
49	60 8581	16 74	14 27 6	51 67		
50	61 0255		15 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=22°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			
22,50	0,361 0255	16 75	20 15 00 0	51 67		
22,51	0,361 1930	16 74	20 15 32 4	51 70		
52	61 3604	16 75	16 04 8	51 67		
53	61 5279	16 74	16 37 2	51 70		
54	61 6953	16 75	17 09 6	51 70		
55	61 8628	16 75	17 42 0	51 70		
22,56	0,362 0303	16 75	20 18 14 4	51 70		
57	62 1978	16 75	18 46 8	51 70		
58	62 3653	16 75	19 19 2	51 70		
59	62 5328	16 75	19 51 6	51 70		
60	62 7003	16 76	20 24 0	51 73		
22,61	0,362 8679	16 75	20 20 56 4	51 70		
62	63 0354	16 75	21 28 8	51 70		
63	63 2029	16 76	22 01 2	51 73		
64	63 3705	16 76	22 33 6	51 73		
65	63 5381	16 76	23 06 0	51 73		
22,66	0,363 7057	16 75	20 23 38 4	51 70		
67	63 8732	16 76	24 10 8	51 73		
68	64 0408	16 76	24 43 2	51 73		
69	64 2084	16 76	25 15 6	51 73		
70	64 3760	16 77	25 48 0	51 76		
22,71	0,364 5437	16 76	20 26 20 4	51 73		
72	64 7113	16 77	26 52 8	51 76		
73	64 8790	16 76	27 25 2	51 73		
74	65 0466	16 77	27 57 6	51 76		
75	65 2143	16 77	28 30 0	51 76		
22,76	0,365 3820	16 77	20 29 02 4	51 76		
77	65 5497	16 77	29 34 8	51 76		
78	65 7174	16 77	30 07 2	51 76		
79	65 8851	16 77	30 39 6	51 76		
80	66 0528	16 77	31 12 0	51 76		
22,81	0,366 2250	16 78	20 31 44 4	51 79		
82	66 3883	16 77	32 16 8	51 76		
83	66 5560	16 78	32 49 2	51 79		
84	66 7238	16 77	33 21 6	51 76		
85	66 8915	16 78	33 54 0	51 79		
22,86	0,367 0593	16 78	20 34 26 4	51 79		
87	67 2271	16 78	34 58 8	51 79		
88	67 3949	16 78	35 31 2	51 79		
89	67 5627	16 78	36 03 6	51 79		
90	67 7305	16 78	36 36 0	51 79		
22,91	0,367 8983	16 79	20 37 08 4	51 82		
92	68 0662	16 78	37 40 8	51 79		
93	68 2340	16 79	38 13 2	51 82		
94	68 4019	16 78	38 45 6	51 79		
95	68 5697	16 79	39 18 0	51 82		
22,96	0,368 7376	16 79	20 39 50 4	51 82		
97	68 9055	16 79	40 22 8	51 82		
98	69 0734	16 79	40 55 2	51 82		
99	69 2413	16 79	41 27 6	51 82		
23,00	69 4092		42 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.				
$k=23°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.				D. 1″.
Gr. M.				Gr. M. S.					
23,00	0,369 4092	16	79	20	42	00 0	51	82	
23,01	0,369 5771	16	80	20	42	32 4	51	85	
02	69 7451	16	80		43	04 8	51	85	
03	69 9130	16	80		43	37 2	51	85	
04	69 0810	16	79		44	09 6	51	82	
05	70 2489	16	80		44	42 0	51	85	
23,06	0,370 4169	16	80	20	45	14 4	51	85	
07	70 5849	16	80		45	46 8	51	85	
08	70 7529	16	80		46	19 2	51	85	
09	70 9209	16	80		46	51 6	51	85	
10	71 0889	16	80		47	24 0	51	85	
23,11	0,371 2569	16	79	20	47	56 4	51	82	
12	71 4250	16	80		48	28 8	51	85	
13	71 5930	16	81		49	01 2	51	88	
14	71 7611	16	80		49	33 6	51	85	
15	71 9291	16	81		50	06 0	51	88	
23,16	0,372 0972	16	81	20	50	38 4	51	88	
17	72 2653	16	81		51	10 8	51	88	
18	72 4334	16	81		51	43 2	51	88	
19	72 6015	16	81		52	15 6	51	88	
20	72 7696	16	81		52	48 0	51	88	
23,21	0,372 9377	16	82	20	53	20 4	51	91	
22	73 1059	16	81		53	52 8	51	88	
23	73 2740	16	82		54	25 2	51	91	
24	73 4422	16	81		54	57 6	51	88	
25	73 6103	16	82		55	30 0	51	91	
23,26	0,373 7785	16	82	20	56	02 4	51	91	
27	73 9467	16	82		56	34 8	51	91	
28	74 1149	16	82		57	07 2	51	91	
29	74 2831	16	82		57	39 6	51	91	
30	74 4513	16	82		58	12 0	51	91	
23,31	0,374 6195	16	83	20	58	44 4	51	94	
32	74 7878	16	82		59	16 8	51	91	
33	74 9560	16	83	20	59	49 2	51	94	
34	75 1243	16	82	21	00	21 6	51	91	
35	75 2925	16	83		00	54 0	51	94	
23,36	0,375 4608	16	83	21	01	26 4	51	94	
37	75 6291	16	83		01	58 8	51	94	
38	75 7974	16	83		02	31 2	51	94	
39	75 9657	16	83		03	03 6	51	94	
40	76 1340	16	84		03	36 0	51	98	
23,41	0,376 3024	16	83	21	04	08 4	51	94	
42	76 4707	16	83		04	40 8	51	94	
43	76 6390	16	84		05	13 2	51	98	
44	76 8074	16	84		05	45 6	51	98	
45	76 9758	16	83		06	18 0	51	94	
23,46	0,377 1441	16	84	21	06	50 4	51	98	
47	77 3125	16	84		07	22 8	51	98	
48	77 4809	16	84		07	55 2	51	98	
49	77 6493	16	85		08	27 6	52	01	
50	77 8178				09	00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.				
$k=23°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.				D. 1″.
Gr. M.				Gr. M. S.					
23,50	0,377 8178	16	84	21	09	00 0	51	98	
23,51	0,377 9862	16	84	21	09	32 4	51	98	
52	78 1546	16	85		10	04 8	52	01	
53	78 3231	16	84		10	37 2	51	98	
54	78 4915	16	85		11	09 6	52	01	
55	78 6600	16	85		11	42 0	52	01	
23,56	0,378 8285	16	85	21	12	14 4	52	01	
57	78 9970	16	85		12	46 8	52	01	
58	79 1655	16	85		13	19 2	52	01	
59	79 3340	16	85		13	51 6	52	01	
60	79 5025	16	86		14	24 0	52	04	
23,61	0,379 6711	16	85	21	14	56 4	52	01	
62	79 8396	16	86		15	28 8	52	04	
63	80 0082	16	85		16	01 2	52	01	
64	80 1767	16	86		16	33 6	52	04	
65	80 3453	16	86		17	06 0	52	04	
23,66	0,380 5139	16	86	21	17	38 4	52	04	
67	80 6825	16	86		18	10 8	52	04	
68	80 8511	16	86		18	43 2	52	04	
69	81 0197	16	86		19	15 6	52	04	
70	81 1883	16	86		19	48 0	52	04	
23,71	0,381 3569	16	87	21	20	20 4	52	07	
72	81 5256	16	86		20	52 8	52	04	
73	81 6942	16	87		21	25 2	52	07	
74	81 8629	16	87		21	57 6	52	07	
75	82 0316	16	87		22	30 0	52	07	
23,76	0,382 2003	16	87	21	23	02 4	52	07	
77	82 3690	16	87		23	34 8	52	07	
78	82 5377	16	87		24	07 2	52	07	
79	82 7064	16	87		24	39 6	52	07	
80	82 8751	16	88		25	12 0	52	10	
23,81	0,383 0439	16	87	21	25	44 4	52	07	
82	83 2126	16	88		26	16 8	52	10	
83	83 3814	16	88		26	49 2	52	10	
84	83 5502	16	88		27	21 6	52	10	
85	83 7190	16	87		27	54 0	52	07	
23,86	0,383 8877	16	88	21	28	26 4	52	10	
87	84 0565	16	89		28	58 8	52	13	
88	84 2254	16	88		29	31 2	52	10	
89	84 3942	16	88		30	03 6	52	10	
90	84 5630	16	88		30	36 0	52	10	
23,91	0,384 7318	16	89	21	31	08 4	52	13	
92	84 9007	16	89		31	40 8	52	13	
93	85 0696	16	88		32	13 2	52	10	
94	85 2384	16	89		32	45 6	52	13	
95	85 4037	16	89		33	18 0	52	13	
23,96	0,385 5762	16	89	21	33	50 4	52	13	
97	85 7451	16	90		34	22 8	52	16	
98	85 9141	16	89		34	55 2	52	13	
99	86 0830	16	89		35	27 6	52	13	
24,00	86 2519				36	00 0			

(Die Fortsetzung im nächsten Hefte.)

10.

Rapport sur un ouvrage manuscrit de Mr. Ostrograski, intitulé „Cours de mécanique céleste." *)

INSTITUT DE FRANCE.

Académie royale des Sciences.

Le secrétaire perpétuel de l'Academie pour les sciences mathématiques certifie que ce qui suit est extrait du procès verbal de la séance du Lundi 25. Octobre 1830.

Mr. Ostrograski, de l'Académie de St. Petersbourg, a fait en cette ville, il y a près d'un an, un cours de mécanique céleste, dont les douze premières leçons rédigées par l'auteur, ont été présentées par lui à notre Académie. C'est de cet ouvrage manuscrit que nous avons été chargés de rendre compte.

Le point de départ de l'auteur est l'équation générale du mouvement d'un système de corps qui résulte du principe de D'Alembert combiné avec celui des vitesses virtuelles. Quoique D'Alembert eût donné le principe de dynamique qui porte son nom, pour réduire tous les problêmes de mouvement à de simples questions de statique, cependant on ne pensa par tout de suite à le combiner avec le principe général de l'équilibre qui était connu depuis long-temps sous la désignation de principe des vitesses virtuelles, et ce fut La Grange qui imagina cette combinaison, vingt ans après la publication de la Dynamique de D'Alembert; ce qui le conduisit à une formule générale dont il a fait depuis la base de sa mécanique analytique. Cette formule renferme, comme on sait, les variations des coordonnées de tous les points du système, compatibles avec les conditions qui lient ce points entre eux. Mr. Ostrograski applique ces variations aux constantes arbitraires que les intégrales des équations différentielles du mouvement renfermeront dans chaque cas, et dont les coor-

*) Le journal donne ici le rapport fait à l'institut de France sur un ouvrage véritablement digne de l'attention générale. L'auteur de cet ouvrage, Mr. Ostrograsky, a bien voulu faire espérer à l'éditeur du journal qu'un extrait de l'ouvrage, ou l'ouvrage même, lui sera communiqué. Dans ce cas le journal le présentera à ses lecteurs.
Note de l'éditeur.

données des mobiles sont des fonctions implicites. Cette idée digne de remarque appartient à l'auteur. Il en déduit immédiatement la propriété connue, d'après laquelle une certaine combinaison des coordonnées et des vitesses de tous les points du système, différentiées par rapport aux constantes arbitraires (1.), est une quantité indépendante du tems, toutes les fois que la somme des forces qui agissent sur ces points, multipliées chacune par l'élement de sa direction, forme une différentielle exacte. Il en déduit aussi les principes des forces vives, du centre de gravité et des aires, en considérant spécialement la constante arbitraire qui est ajoutée au tems, lorsque les forces et les conditions du système ne dépendent pas de cette variable, et les constantes arbitraires, relatives à l'origine des coordonnées et à leurs directions, dans les cas d'un système entièrement libre ou seulement libre de tourner autour de cette origine. L'auteur suppose ensuite que de nouvelles forces qui n'ont pas besoin de satisfaire, comme les précédentes, à la condition d'intégrabilité, sont ajoutées à celles-ci. Suivant le principe fondamental de la variation des constantes arbitraires, ces forces perturbatrices font varier les constantes contenues dans les intégrales relatives aux forces primitives, de manière toutefois que les expressions des coordonnées et de leurs différentielles premières ne soient pas changées. C'est de ce principe et des équations différentielles du mouvement dans lesquelles on a introduit les forces perturbatrices, que l'on conclut les différentielles de ces constantes. L'auteur fait connaître le système d'équations linéaires que La Grange a données de cette manière et qui ne laissent dans chaque problème particulier que des éliminations à effectuer.

Ces théories générales sont exposées avec clarté dans les cinq premieres leçons de Mr. Ostrograski. Il en fait ensuite l'application spéciale au mouvement elliptique d'une planète autour du soleil, troublée par l'action d'une ou plusieurs autres planètes. Il obtient ainsi les différentielles des six élémens elliptiques, savoir, le grand axe, l'excentricité, la longitude du périhélie, celle de la planète à une époque déterminée, l'inclinaison de l'orbite et la longitude du noeud ascendant, à quoi l'on doit ajouter le moyen mouvement qui se déduit du grand axe par la 3e loi de Kepler. Ces différentielles sont exprimées comme on sait, au moyen des différences partielles de la fonction provenant des forces perturbatri-

(1.) Nouveaux mémoires de notre académie, page 9. du 1er volume.

GENERAL LIBRARY
University of
MICHIGAN

ces, lesquelles différences sont prises par rapport aux élémens elliptiques, et multipliées par des coëfficients qui ne renferment pas le temps explicitement non plus que les longitudes de l'époque et du périhélie. Cette forme est la plus simple dont les différentielles des élémens elliptiques soient susceptibles; mais les géomètres n'y sont parvenus qu'après soixante années de travaux remarquables par la variété des méthodes qu'ils ont imaginées pour vaincre les difficultés que présentait le calcul des perturbations planétaires, et parmi lesquelles il faut compter, surtout, l'apparition du tems, dans ces formules, en dehors des signes périodiques; circonstance qui les aurait rendues fautives, au bout d'un tems considérable, et qui aurait ôté l'espoir de former jamais, d'après la théorie, des tables des planètes applicables aux siècles passées et futurs. On doit fixer l'origine de ces efforts de l'esprit humain, au mémoire d'Euler sur les perturbations de Saturne et Jupiter, qui remporta le prix de notre ancienne Académie pour l'année 1748 et où l'on trouve les différentielles de l'inclinaison et de la longitude du noeud, conclues de la considération que le plan de l'orbite mobile est tangent à chaque instant à la trajectoire de la planète; ce qui est, en effet, le principe de la variation des constantes arbitraires. La théorie de cette variation appliquée aux élémens elliptiques des planètes et des satellites, s'est ensuite perfectionnée successivement jusqu'à l'année 1808, où La Grange et Laplace ont présenté à une même séance du Bureau des Longitudes, leurs formules citées plus haut que l'on peut regarder comme définitives. La Grange les a déduites d'autres formules très élégantes qu'il ne donna d'abord que pour le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, suivant une loi quelconque et qu'il étendit peu de temps après au mouvement de tous les systèmes de corps. Quant à Laplace, il avait déjà presenté sous la forme dont il s'agit les différentielles de l'inclinaison et de la longitude du noeud; on trouvait aussi dans sa mécanique céleste, une relation, sous la même forme, entre les différentielles de l'excentricité et de la longitude du périhélie, et l'un de nous venait d'en obtenir une semblable entre les différentielles du périhélie et de l'élément qu'on appelle la longitude de l'époque. En joignant ces quatre formules à l'expression de la différentielle du grand axe, comme depuis longtemps et due à La Grange, et observant que la différentielle de la fonction provenant des forces perturbatrices prise par rapport aux six élémens elliptiques est égale à zéro, Laplace a formé

six équations dont il a tiré des formules qui coïncident avec celles que La Grange obtenait en même tems par un moyen si différent (1.).

L'usage principal de ces formules est leur application immédiate au calcul des perturbations des comètes, qui se déterminent par les quadratures pour chaque intervalle de tems compris entre deux retours consécutifs; elles fournissent sans difficulté, les équations différentielles d'où dependent les inégalités séculaires, soit des excentricités et des périhélies des planètes, soit des inclinaisons et des noeuds de leurs orbites. Les leçons dont nous rendons compte se terminent à la formation de ces équations et à leur intégration par les méthodes connues que l'auteur expose avec tous les développemens convenables. Relativement aux inégalités périodiques, il s'est borné, dans cette partie de son cours, à faire connaître le moyen que l'un de nos commissaires avait déjà indiqué (2.), et d'après lequel on peut calculer, par une double quadrature, le coëfficient de chaque inégalité dont l'argument est déterminé. Ce moyen se présente naturellement à l'esprit, et tout le mérite appartiendra à celui qui en fera l'application et qui exécutera les pénibles calculs qu'il suppose. Il paraît que Mr. Hansen, savant astronome de Gotha, se propose d'en faire usage dans sa théorie des perturbations, dont les N°s 166., 167., 168. du journal de Mr. Schumacher renferment les principes et les formules analytiques. Mr. Hansen présente sa méthode fondée sur le moyen de calcul dont nous parlons, comme propre à exprimer en séries suffisamment convergentes les perturbations des planètes, quelles que soient les excentricités et les inclinaisons, et comme applicable par conséquent aux petites planètes découvertes dans le 19e siecle, et même aux comètes, lorsque leurs élemens elliptiques à une époque déterminée ont été fixés par l'observation. Ils en suivrait donc qu'en regardant comme insensible, la résistance de l'Ether, ou bien en la supposant déterminée par

---

(1.) Les trois équations différentielles secondes du mouvement d'une planète se trouvent ainsi transformées en six équations différentielles du 1er ordre, ce qui n'en rend pas l'intégration plus facile. Si la fonction perturbatrice est égale à une constante donnée, divisée par le rayon vecteur de la planète troublée, ce système de six équations quoique très compliqué, devra pouvoir s'intégrer complètement; car alors le mouvement troublé sera encore un mouvement elliptique; et les élémens primitifs s'exprimeront par conséquent sous forme finie en fonctions du temps et des nouveaux élémens qui seront les constantes arbitraires de cette intégration.

(2.) Page 50. du volume cité plus haut.

une assez longue suite d'observations pour chaque comète, on pourrait former des tables du mouvement de ces astres, comprenant leurs révolutions successives, passées et futures; résultat qui changerait totalement leur théorie, en l'assimilant à celle des planètes et de satellites, et qui serait surtout d'une grande utilité à l'égard des deux comètes à courte période, nouvellement observées.

La lecture attentive que nous avons faite des leçons de Mr. Ostrograski, nous a prouvé que cet habile professeur s'est rendu propres par de profondes études, les méthodes les plus générales dont la mécanique céleste s'est enrichie dans ces derniers tems et dont il a lui même simplifié l'exposition. Nous lui devrons de la reconnaissance pour avoir communiqué à ses compatriotes les lumières qu'il a puisées dans les ouvrages des savans francais, et les amis des sciences verront avec plaisir qu'il ait trouvé dans son pays quelques auditeurs assez instruits pour étudier, sous sa direction, des matières aussi élevées et d'un accès aussi difficile.

Nous pensons que l'ouvrage de Mr. Ostrograski est digne des éloges et de l'approbation de l'académie.

Signé Arago, Poisson, Rapporteur.

L'académie adopte les conclusions de ce Rapport.

Certifié conforme:

Le secrétaire perpétuel pour les sciences mathématiques

F. Arago.

11.
Aufgaben und Lehrsätze,
erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Von Herrn Dr. *Magnus* zu Berlin.)

Aufgaben.

1. Es sind drei Kreislinien $K_1 K_2 K_3$, deren Mittelpuncte $C_1 C_2 C_3$ sind, in einer Ebene gegeben. Es sollen auf jeder dieser Kreislinien drei Puncte $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$ und $a_3 b_3 c_3$ angegeben werden, so dafs:

1stens die Radien $C_1 a_1$, $C_2 a_2$, $C_3 a_3$ oder ihre Verlängerungen sich in dem Schwerpuncte des Dreiecks $a_1 a_2 a_3$ schneiden,

2tens die Radien $C_1 b_1$, $C_2 b_2$, $C_3 b_3$ oder ihre Verlängerungen durch den Mittelpunct des in $b_1 b_2 b_3$ eingeschriebenen Kreises gehen, und

3tens die Radien $C_1 c_1$, $C_2 c_2$, $C_3 c_3$ auf $c_2 c_3$, $c_1 c_3$, $c_1 c_2$ respective senkrecht seien.

2. Es sind vier Kugelflächen $S_1 S_2 S_3 S_4$ gegeben, deren Mittelpuncte $C_1 C_2 C_3 C_4$ heifsen. Es sollen auf einer jeden dieser Flächen drei Puncte $a_1 b_1 c_1$, $a_2 b_2 c_2$, $a_3 b_3 c_3$, $a_4 b_4 c_4$ bestimmt werden, so dafs:

1stens die Radien $C_1 a_1$, $C_2 a_2$, $C_3 a_3$, $C_4 a_4$ oder ihre Verlängerungen sich in dem Schwerpuncte des Tetraëders $a_1 a_2 a_3 a_4$ schneiden,

2tens die Radien $C_1 b_1$, $C_2 b_2$, $C_3 b_3$, $C_4 b_4$ oder ihre Verlängerungen durch den Mittelpunct der in $b_1 b_2 b_3 b_4$ eingeschriebenen Kugel gehen, und

3tens die Radien $C_1 c_1$, $C_2 c_2$, $C_3 c_3$, $C_4 c_4$ auf den Ebenen $c_2 c_3 c_4$, $c_1 c_3 c_4$, $c_1 c_2 c_4$, $c_1 c_2 c_3$ respective senkrecht seien.

(Auct. Dr. *C. J. D. Hill*, Lond. Goth.)

Theoremata demonstranda.

3. Integrale definitum

$$\int_0^{\pi} du\,(x^2+2ax\cos u+a^2)^{\frac{n}{2}}\cos(ru-n\varphi) = \frac{\pi a^r x^{n-r}\Gamma' n}{\Gamma' r\,.\,\Gamma'(n-r)},$$

pro $r =$ numero quocunque integro positivo valet, exsistente $x > a$, $\operatorname{tang}\varphi = \frac{a\sin u}{x - a\cos u}$, $\Gamma' \alpha = \Gamma(1+\alpha)$ apud celeb. **Legendre**.

Coroll. Sumto $x = a$, obtinetur integrale a celeb. **Gauchy** jam (in **Férussac**, Bulletin des sciences mathématiques **1825**, **No. 250.**)

propositum $$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dz\,(\cos z)^n \cos pz = \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \frac{\Gamma' n}{\Gamma' r \,.\, \Gamma'(n-r)}.$$

4. Aequatio differentialis

$$(1-c^2)\,\underset{c}{d^2} y + \frac{1-3c^2}{c}\,\underset{c}{dy} + \tfrac{3}{16} y = 0$$

ellipticae $(1-c^2)\,\underset{c}{d^2} F + \frac{1-3c^2}{c}\,\underset{c}{dF} - F = 0$ simillima, integrari potest.

5. Data resolutione (particulari) alterius utrius harum aequationum, ubi p data est ipsius x functio, et $\underset{x}{dy} = \frac{dy}{dx}$:

$\alpha)$ $dr + r^2 - 1 \pm pr = 0,$

$\beta)$ $\left(\frac{dq}{q} - p\right)(q^2-1) + (1+q^2)^2 = 0,$

$\gamma)$ $dv + 2\,.\,v^2 = 2 + p\sqrt{(v^2-1)} = 0,$

$\delta)$ $\underset{x}{d^2} y \pm p\,\underset{x}{dy} - y = 0,$

$\varepsilon)$ $\underset{x}{d^2} z = 4z + p\sqrt{((\underset{x}{dz})^2 - 4z^2)},$

$\zeta)$ $\underset{x}{d^2} u = \frac{\underset{x}{dp}}{p} \,.\, \underset{x}{du} + p^2 u + 2p\sqrt{\left(\left(\frac{\underset{x}{du}}{p}\right)^2 - 4u^2\right)},$

reliquae omnes etiam resolvuntur.

6. Aequationes reductae, quarum ope aequatio lineariter differentialis solvitur, nonnisi hujus ipsius aequationis solutionem specialem postulant. Sic ex. gr. tum aequatio

$$\underset{x}{d^2} y + py = 0$$

tum sua ipsius reducta

$$\underset{x}{d^3} z + 4p\,\underset{x}{dz} + 2\,\underset{x}{dp}\,.\,z = 0,$$

ut complete solvantur, nonnisi solutionem prioris specialem (y_0) requirunt.

7. Generatim aequationes lineariter differentiales, unica ordinis unius cujusque solutione particulari concessa, complete resolvuntur.

8. Data quadam aequatione lineariter differentiali, aliae etiam ejusdem ordinis, et quidem tot, quot ordo hic indicat, inveniuntur, quae vinculo quam maxime necessario cum ipsa et invicem conjunguntur (ex. gr. in secundo ordine functionis ellipticae E et F). Quarum quidem aliqua data, reliquarum coëfficientes determinantur ope aequationum, quae generatim ordinis sunt proxime inferioris.

9. Omnis formula differentialis hujusmodi $R\,dx \log R' \log R''$, existentibus R, R', R'' rationalibus, integrari potest ope functionum elementarium realium, quarum nulli argumentorum numerus triadem superat.

10. $\int_0^{n\pi} x\,dx \log(\sin x)^2 = n^2\pi^2 \log 2$, exsistente $\pm n$ numero integro, $\pi = 3{,}14159\ldots\ldots$, $\int_0^{n\pi} =$ integr. defin. intra limites 0 et $n\pi$.

Problemata resolvenda.

11. Disquiritur, num integrale definitum in Th. I. exhibitum pro quocunque ipsius r valore immutatum valeat.

12. Indolem functionis, datae aequationi lineariter differentiali particulariter satisfacientis, perscrutandi modum exhibere, ipsamque functionem quotis ex jam notis componitur, determinare.

13. Functiones elementares in theor. 7. memoratas, accuratius definire.

14. Ex aequationibus linearibus, quae oriuntur ex $\frac{1}{2}c_{2r} = c_r - c_{30-r}$, ponendo $r = 1, 2, 3 \ldots 14$; ex $\frac{1}{3}c_{3r} = c_r - c_{20-r} + c_{20+r}$, ponendo $r = 1, 2, 3 \ldots 9$; atque ex $\frac{1}{5}c_{5r} = c_r - c_{12-r} + c_{12+r} - c_{24-r} + c_{24+r}$, ponendo $r = 1, 2, 3 \ldots 5$, quantitatum c tot, quot fieri potest, per reliquas definire.

15. Valores quantitatum b et α reales numeris ad decem saltem locos decimales approximate, exhibere, quae his aequationibus satisfaciunt:

$$\sin\alpha \,.\, \breve{\cos} b - \tfrac{1}{2^2}\sin 2\alpha \,.\, \breve{\cos} 2b + \tfrac{1}{3^2}\sin 3\alpha \,.\, \breve{\cos} 3b - \ldots = 0 \text{ et}$$

$$\cos\alpha \,.\, \breve{\sin} b - \tfrac{1}{2^2}\cos 2\alpha \,.\, \breve{\sin} 2b + \tfrac{1}{3^2}\cos 3\alpha \,.\, \breve{\sin} 3b - \ldots = 0,$$

existentibus $\sin x$ et $\cos x$ sinu et cosinu trigonometrico, atque $\breve{\sin} x$ et $\breve{\cos} x$ sinu et cosinu hyperbolico, seu $2\breve{\cos} x = e^x + e^{-x}$, $2\breve{\sin} x = e^x - e^{-x}$, $e =$ basi naturali.

16. Data functione f, invenire functionem φ ex aequatione

$$\varphi(fx) = \varphi x \,.\, \frac{df x}{dx}.$$

(Von Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.)

17. Theorème. Si p est un nombre premier de la forme $6n+1 = a^2 + 27b^2$, on aura toujours

$$(n+1)(n+2)\ldots 2n \equiv -(2n+1)(2n+2)\ldots 3n \pmod{p}.$$

Par ex. si $p = 31 = 6.5+1 = 2^2 + 27.1^2$, $6.7.8.9.10 + 11.12.13.14.15$ est divisible par 31.

18. Problème. On sait que la somme des termes appartenants à la période d'un nombre premier p est toujours $= mp$ (voy. Gaufs disq. arithm. art. 79.). Si le nombre de ces termes est pair, $= 2f$, on trouvera aisément le nombre m, car dans ce cas on a $m = \frac{1}{2}f$. On demande la valeur du nombre m, au cas où le nombre des termes est impair.

Druckfehler. Seite 33. Zeile 8. v. o. ist statt Taf. II. Fig. 1. zu lesen Taf. I. Fig. 6.

12.

Eine neue Art, die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

---

1. Es kann der Fall eintreten, dafs man blofs mit einem Azimuthaltheodoliten versehen, die Zeit und die Polhöhe an einem Orte zu bestimmen wünscht, wozu, wie man leicht sieht, die Azimuthaldifferenzen zwischen dreien Sternen und einem beliebigen Puncte, zur gegebenen Zeit gemessen, hinreichen. Abgesehen von dem Nutzen, den die Auflösung dieser Aufgabe in practischer Hinsicht hat, gewährt sie auch ein besonderes theoretisches Interesse, aus welchem Grunde ich sie vorzüglich unternommen habe.

Durch einige sehr leichte und oft angestellte Betrachtungen reducirt sich das eben genannte Problem darauf: Wenn auf der Sphäre drei Puncte A, B, C (Taf. II. Fig. I.) gegeben sind, einen vierten Punct D zu finden, an dem die Winkel $ADB = \varepsilon$ und $ADC = \varepsilon'$ sind.

Es sei:

$$\begin{array}{lll} AB = l; & BAD = a + \xi; & \operatorname{cotang} l = d; \\ AC = l'; & CAD = a - \xi; & \operatorname{cotang} l' = d'; \\ AD = y; & & \operatorname{cotang} \varepsilon = e; \\ & & \operatorname{cotang} \varepsilon' = e'; \end{array}$$

so hat man:

$$e \sin(a+\xi) + \cos(a+\xi)\cos y - d \sin y = 0,$$
$$e' \sin(a-\xi) + \cos(a-\xi)\cos y - d' \sin y = 0,$$

woraus man leicht folgert:

$$[(d-d')\cos a\cos\xi + (d+d')\sin a\sin\xi]\cos y = (ed'-e'd)\sin a\cos\xi + (ed'+e'd)\cos a\sin\xi,$$
$$[(d-d')\cos a\cos\xi + (d+d')\sin a\sin\xi]\cos y = \tfrac{1}{2}(e-e')\sin 2a + \tfrac{1}{2}(e+e')\sin 2\xi.$$

Die Summe der Quadrate dieser beiden Gleichungen giebt, wenn man setzt:

$$(d-d')\cos a = g\cos G; \qquad (ed'-e'd)\sin a = g\sin G;$$
$$(d+d')\sin a = h\sin H; \qquad (ed'+e'd)\cos a = h\cos H;$$

$$0 = hh\cos 2H\sin\xi^2 + 2gh\sin(G-H)\sin\xi\cos\xi - gg\cos 2G\cos\xi^2$$
$$+ \tfrac{1}{4}(e-e')^2\sin 2a^2 + \tfrac{1}{2}(e^2-e'^2)\sin 2a\sin 2\xi + \tfrac{1}{4}(e+e')^2\sin 2\xi^2.$$

Macht man ferner:

$$A = \tfrac{1}{2} hh \cos 2H - \tfrac{1}{2} gg \cos 2G + \tfrac{1}{4}(e-e')^2 \sin 2a^2,$$
$$C = \tfrac{1}{4}(e+e')^2,$$
$$D = -\tfrac{1}{4} hh \cos 2H - \tfrac{1}{4} gg \cos 2G;$$
$$F = \tfrac{1}{2} gh \sin(G-H) + \tfrac{1}{4}(e-e'^2) \sin 2a,$$

so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$0 = A + C \sin 2\xi^2 + 2D \cos 2\xi + 2F \sin 2\xi.$$

Dieser gebe ich folgende Form:

$$0 = A + x - x \cos 2\xi^2 + (C-x) \sin 2\xi^2 + 2D \cos 2\xi + 2F \sin 2\xi,$$

und bestimmen x so, dafs

$$(a.) \quad 0 = -x\left(\cos 2\xi - \frac{D}{x}\right)^2 + (C-x)\left(\sin 2\xi + \frac{F}{C-x}\right)^2;$$

subtrahirt man die beiden Gleichungen, so findet man:

$$0 = A + x + \frac{DD}{x} - \frac{FF}{C-x},$$

oder

$$(b.) \quad x^3 + (A-C)x^2 + (DD + FF - AC)x - CDD = 0.$$

Damit die Gleichung ($a.$) möglich sei, mufs der Werth von x zwischen 0 und C liegen. Sie hat wirklich innerhalb dieser Grenzen wenigstens eine Wurzel, da der Werth der Gleichung ($b.$), wenn $x = 0$, $-CDD$ oder negativ ist, weil C positiv; wenn $x = C$, $+CFF$ oder positiv ist.

Nachdem x bekannt ist, hat man sogleich aus der Gleichung ($a.$):

$$\sqrt{(C-x)} \sin 2\xi - \sqrt{x} \cdot \cos 2\xi + \frac{F}{\sqrt{(C-x)}} + \frac{D}{\sqrt{x}} = 0,$$

oder, wenn man $\sqrt{\frac{x}{C}} = \cos P$ setzt,

$$\cos(2\xi + P) = \frac{D}{C \cos P} + \frac{F}{C \sin P}.$$

Die Bestimmung der übrigen Stücke des Vierecks $ABCD$ hat nun keine weitere Schwierigkeit, so wenig als die Bestimmung der Lage des Punctes D gegen jeden andern Punct auf der Sphäre, dessen Lage gegen A, B und C bekannt ist; ich füge sie daher nicht bei, um Weitläufigkeit zu vermeiden.

2. Eine andere Aufgabe entsteht, wenn die Polhöhe eines Ortes gegeben ist, und man sucht an der gegebenen Azimuthaldifferenz zweier Sterne die Zeit. Diese reducirt sich auf die vorige, mit dem Unterschiede, dafs statt des Winkels ε' die Seite $CD = \eta$ gegeben ist. In diesem Falle hat man folgende Gleichungen:

$$\text{cotang}\, \varepsilon \sin(a+\xi) + \cos(a+\xi) \cos y - \text{cotang}\, l \sin y = 0,$$
$$\cos \eta - \cos l' \cos y - \cos(a-\xi) \sin l' \sin y = 0,$$

woraus man leicht folgert:

$$[\text{cotang}\, l \cos l' + \tfrac{1}{2} \sin l' \cos 2a + \tfrac{1}{2} \sin l' \cos 2\xi] \cos y$$
$$= \text{cotang}\, l \cos \eta - \tfrac{1}{2} \text{cotang}\, \varepsilon \sin l' \sin 2a + \tfrac{1}{2} \text{cotang}\, \varepsilon \sin l' \sin 2\xi,$$
$$[\text{cotang}\, l \cos l' + \tfrac{1}{2} \sin l' \cos 2a + \tfrac{1}{2} \sin l' \cos 2\xi] \sin y$$
$$= (\text{cotang}\, \varepsilon \cos l' \sin a + \cos \eta \cos a) \cos \xi + (\text{cotang}\, \varepsilon \cos l' \cos a - \cos \eta \sin a) \sin \xi.$$

Die Summe der Quadrate dieser beiden Gleichungen giebt, wenn man setzt:

$$\text{cotang}\, \varepsilon \cos l' = g \cos G; \quad \text{cotang}\, l \cos l' + \tfrac{1}{2} \sin l' \cos 2a = h \sin H;$$
$$\cos \eta = g \sin G; \quad \text{cotang}\, l \cos \eta - \tfrac{1}{2} \text{cotang}\, \varepsilon \sin l' \sin 2a = h \cos H.$$

$$0 = hh \cos 2H - h \cos H \,\text{ctg}\, \varepsilon \sin l' \sin 2\xi + \tfrac{1}{4} \text{ctg}\, \varepsilon^2 \sin l'^2 \sin 2\xi^2 - h \sin H \sin l \cos 2\xi$$
$$- \tfrac{1}{4} \sin l'^2 \cos 2\xi^2 + gg \sin (G+a)^2 \cos \xi^2 + \tfrac{1}{2} gg \sin 2(G+a) \sin 2\xi + gg \cos (G+a)^2 \sin \xi^2;$$

und wenn man

$$A = hh \cos 2H + \tfrac{1}{2} gg - \tfrac{1}{4} \sin l'^2,$$
$$C = \tfrac{1}{4} \frac{\sin l'^2}{\sin \varepsilon^2},$$
$$2D = -h \sin H \sin l' - \tfrac{1}{2} gg \cos 2(G+a),$$
$$2F = -h \cos H \,\text{cotang}\, \varepsilon \sin l' + \tfrac{1}{2} gg \sin 2(G+a)$$

setzt, so verwandelt sich die Gleichung in folgende:

$$0 = A + C \sin 2\xi^2 + 2D \cos 2\xi + 2F \sin 2\xi$$

völlig wie oben.

München, den 6. October 1829.

Druckfehler. Im 6. Bande 3. Hefte S. 293. Z. 8. und 11. v. o. lese man ff statt H.

13.

Über die Formirung der Bedingungs-Gleichungen zur Verbesserung einer Planeten- oder Cometenbahn.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

---

1. Es sei die geocentrische Länge, Breite und Entfernung des Himmelskörpers l, b und $\triangle$; verändert man nun seinen Ort um ein Weniges im Raume in irgend einer Richtung, so ist diese Veränderung allgemein durch die Projectionen derselben auf drei auf einander senkrecht stehende Axen bestimmt. Es sei die eine dieser Axen $\triangle$, oder die Richtung derselben in Länge und Breite ausgedrückt l, b; die zweite senkrecht darauf in der Richtung $l+90^0$ und 0; die dritte demnach in der Richtung $l+180^0$ und $90-b$. Diese drei Puncte seien auf der Sphäre (ξ), (υ), (ζ) (Taf. II. Fig. 2. und 3.). Die Projectionen selbst sind aber, wenn $\partial\triangle$, ∂l, ∂b die Veränderungen in Entfernung, Länge und Breite sind, $\partial\triangle$, $\triangle\cos b\,\partial l$, $\triangle\partial b$.

Es sei nun in der Ebene der Bahn die Anomalie des Körpers φ und der Radius vector r, der Winkel zwischen Perihel und Knoten ϖ. Man kann nun jede Veränderung des Ortes in der Fläche der Bahn durch die Projectionen derselben auf zwei aufeinander senkrechte Axen bestimmen; die eine dieser Axen sei demnach r und die andere der zu der Anomalie $\varphi+90^0$ gehörende Radius vector. Die Projectionen sind demnach ∂r und $r\partial(\varphi+\varpi)$ ($\partial\varpi$ bedeutet hier die Veränderung der Lage der grofsen Axe im Raume, und nicht die Entfernung vom Knoten), und ihre Richtungen (x), (y). Die Veränderung in der auf der Ebene senkrechten Richtung nach dem Pole der Ebene (z) gerichtet, entsteht blofs durch eine Veränderung in der Lage der Bahn. Es drehe sich diese also um den kleinen Winkel ∂i um die Knotenlinie ω, in welchem Puncte die Anomalie Φ sein mag, so ist die daraus entstehende Änderung des Körpers im Raume, wie leicht zu sehen ist:

$$r\sin(\varphi-\Phi)\,\partial i \quad\text{oder}\quad r\sin\varphi\cos\Phi\,\partial i - r\cos\varphi\sin\Phi\,\partial i.$$

Nun ist bekanntlich die senkrechte Projection irgend einer Linie im Raume auf irgend eine Axe, gleich der Summe der drei senkrechten Projectionen dieser Linie auf drei willkürliche senkrechte Axen auf dieselbe

Axe projicirt. Man hat also:

$$1.\quad \begin{cases} \triangle \cos b\, \partial l = \partial r \cos(\eta)(x) + r\,\partial(\varphi+\varpi)\cos(\eta)(y) + r\sin(\varphi-\Phi)\,\partial i \cos(\eta)(z), \\ \triangle\, \partial b \quad\;\; = \partial r \cos(\zeta)(x) + r\,\partial(\varphi+\varpi)\cos(\zeta)(y) + r\sin(\varphi-\Phi)\,\partial i \cos(\zeta)(z). \end{cases}$$

2. Um nun diese Gröfsen durch die Elemente der Bahn auszudrücken, seien Ω und i die Länge des aufsteigenden Knotens um die Neigung der Bahn. Zieht man nun von (η) nach (z) einen gröfsten Kreis M, der die Ebene der Bahn in dem Puncte (v) schneidet, und setzt man $\Omega(v) = N$, so hat man in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke die beiden Catheten $M - 90^0$ und N, und die Hypothenuse $90 + l - \Omega$, und den der Seite $M - 90^0$ gegenüberstehenden Winkel i. Es finden also folgende Gleichungen Statt:

$$2.\quad \begin{cases} \sin M \cos N = \sin(\Omega - l), \\ \sin M \sin N = \cos(\Omega - l)\cos i, \\ \cos M \quad\;\; = -\cos(\Omega - l)\sin i. \end{cases}$$

Es ist aber, wie sehr leicht zu sehen ist, wenn man $\Phi + \varpi = u$ setzt:

$$3.\quad \begin{cases} \cos(\eta)(x) = \quad \sin M \cos(u - N), \\ \cos(\eta)(y) = -\sin M \sin(u - N), \\ \cos(\eta)(z) = \quad \cos M. \end{cases}$$

Fällt man nun eben so vom Puncte (ζ) (Fig. 3.) einen senkrechten Bogen auf die Ebene der Bahn, die sie in der Entfernung N' vom Knoten schneidet, und verlängert ihn zurück nach (z), verbindet man darauf durch einen Bogen den Pol der Ecliptik (Z) und (z), und fällt von jenem auf die Ebene der Ecliptik durch den Punct (ζ) einen Breitenkreis, und setzt $(\zeta)(z) = M$, so entsteht ein sphärisches Dreieck, dessen drei Seiten M, b, i und die resp. gegenüberstehenden Winkel $l - \Omega - 90^0$, $90^0 - N$ und $90^0 - V$ sind, wo der Winkel V ferner nicht gebraucht wird. Man hat also nach den Gaufsischen Relationen:

$$4.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}M' \sin\frac{1}{2}(V - N') = \cos[\frac{1}{2}(l-\Omega) - 45^0]\sin\frac{1}{2}(b-i), \\ \sin\frac{1}{2}M' \cos\frac{1}{2}(V - N') = \sin[\frac{1}{2}(l-\Omega) - 45^0]\sin\frac{1}{2}(b+i), \\ \cos\frac{1}{2}M' \sin\frac{1}{2}(V + N') = \sin[\frac{1}{2}(l-\Omega) - 45^0]\cos\frac{1}{2}(b+i), \\ \cos\frac{1}{2}M' \cos\frac{1}{2}(V + N') = \cos[\frac{1}{2}(l-\Omega) - 45^0]\cos\frac{1}{2}(b-i), \end{cases}$$

und es ist eben so, wie bei (3.):

$$5.\quad \begin{cases} \cos(\zeta)(x) = \quad \sin M' \cos(u - N'), \\ \cos(z)(y) = -\sin M' \sin(u - N'), \\ \cos(\zeta)(z) = \quad \cos M'. \end{cases}$$

Man hat also endlich:

$$6.\quad \begin{cases} \left(\frac{\cos b\,.\,\partial l}{\partial r}\right) = \frac{1}{\Delta}\sin M\,\cos(u-N), \\ \left(\frac{\cos b\,.\,\partial l}{\partial(\varphi+\varpi)}\right) = -\frac{r}{\Delta}\sin M\,\sin(u-N), \\ \left(\frac{\cos b\,.\,\partial l}{\cos\Phi\,\partial i}\right) = \frac{r}{\Delta}\cos M\,\sin\varphi, \\ \left(\frac{\cos b\,.\,\partial l}{\sin\Phi\,\partial i}\right) = -\frac{r}{\Delta}\cos M\,\cos\varphi, \\ \left(\frac{\partial b}{\partial r}\right) = \frac{1}{\Delta}\sin M'\cos(u-N'), \\ \left(\frac{\partial b}{\partial(\varphi+\varpi)}\right) = -\frac{r}{\Delta}\sin M'\sin(u-N'), \\ \left(\frac{\partial b}{\cos\Phi\,\partial i}\right) = \frac{r}{\Delta}\cos M'\sin\varphi, \\ \left(\frac{\partial b}{\sin\Phi\,\partial i}\right) = -\frac{r}{\Delta}\cos M'\cos\varphi. \end{cases}$$

Die beiden Gröfsen $\cos\Phi\,\partial i$ und $\sin\Phi\,\partial i$ sind als zwei von einander unabhängige Differentiale zu betrachten. Hat man nun $\partial\varpi$, ∂i und Φ bestimmt, so erhält man die Correctionen der die Lage der Bahn bestimmenden Elemente folgendermafsen. Es sei $\partial\Pi$ die Correction der Entfernung des Perihels vom Knoten $=\partial\varpi+\partial\varpi'$, dafs also $\partial\varpi'$ der von der kleinen Drehung der Ebene um eine in derselben liegenden Linie herrührende Theil ist; $\partial\Omega$ die Correction der Länge des Knotens, und ∂J die Correction der Neigung der Bahn gegen die Ecliptik, so hat man in dem kleinem sphärischen Dreiecke, dessen Seiten $\partial\Omega$, $\varpi+\Phi$ und $\varpi+\Phi+\partial\varpi'$ sind, die resp. gegenüberstehenden Winkel ∂i, $180-i-\partial J$, i, also:

$$\partial\varpi' = -\sin(\varpi+\Phi)\,\mathrm{cotang}\,i\,\partial i,$$

$$7.\quad \begin{cases} \partial\Omega = \frac{\sin(\varpi+\Phi)}{\sin i}\,\partial i, \\ \partial J = \cos(\varpi+\Phi)\,\partial i, \\ \partial\Pi = \partial\varpi - \sin(\varpi+\Phi)\,\mathrm{cotang}\,i\,\partial i. \end{cases}$$

3. Wenn statt der Längen und Breiten oder geraden Aufsteigungen und Declinationen des Himmelskörpers seine Entfernung von einem Sterne gemessen ist, so erhält man die Differential-Gleichungen dieser Entfernung auf folgende Weise. Zieht man von dem Orte des Sterns auf der Himmelssphäre (Fig. 4.) einen gröfsten Kreisbogen D bis zum Orte des Cometen, und verlängert ihn um 90^0 bis (v), so hat man, wie leicht zu sehen ist,

$$\triangle\,\partial D = \partial r\cos(v)(x) + r\,\partial(\varphi+\varpi)\cos(v)(y) + r\sin(\varphi-\Phi)\,\partial i\cos(v)(z);$$

es müssen also blofs die drei Cosinusse gefunden werden. Zu dem Ende

beschreibe man um den Ort des Cometen als Pol einen gröfsten Kreis, dessen Durchschnittslinie mit der Ecliptik in der Länge 90^0+l, und dessen Neigung 90^0+b ist. Ist nun die Länge und Breite des Sterns l', b', und die Entfernung des Punctes (v) von dem Knoten dieses gröfsten Kreises auf der Ecliptik E, so hat man in dem sphärischen Dreiecke, dessen drei Seiten D, $90^0-b'$, 90^0-b sind, die gegenüberstehenden Winkel $l-l'$, 90^0+E und 90^0-F, wo F ferner nicht gebraucht wird, also nach den Gaufsischen Relationen:

$$8.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}D\,\sin\frac{1}{2}(F+E) = \cos\frac{1}{2}(l-l')\,\sin\frac{1}{2}(b-b'), \\ \sin\frac{1}{2}D\,\cos\frac{1}{2}(F+E) = \sin\frac{1}{2}(l-l')\,\cos\frac{1}{2}(b+b'), \\ \cos\frac{1}{2}D\,\sin\frac{1}{2}(F-E) = \sin\frac{1}{2}(l-l')\,\sin\frac{1}{2}(b+b'), \\ \cos\frac{1}{2}D\,\cos\frac{1}{2}(F-E) = \cos\frac{1}{2}(l-l')\,\cos\frac{1}{2}(b-b'). \end{cases}$$

Setzt man nun die Entfernung des Durchschnittes des ebengenannten gröfsten Kreises mit der Ebene der Bahn vom aufsteigenden Knoten derselben A, die Neigung K, die Entfernung der beiden Durchschnitte mit der Ebene der Bahn und mit der Ecliptik B, so hat man abermals die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks $90+l-\Omega$, A, B, und die gegenüberstehenden Winkel k, $90+b$, i, folglich:

$$8.\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}k\,\sin\frac{1}{2}(A+B) = \sin[45^0+\frac{1}{2}(l-\Omega)]\,\cos[45^0+\frac{1}{2}(b-i)], \\ \sin\frac{1}{2}k\,\cos\frac{1}{2}(A+B) = \cos[45^0+\frac{1}{2}(l-\Omega)]\,\cos[45^0+\frac{1}{2}(b+i)], \\ \cos\frac{1}{2}k\,\sin\frac{1}{2}(A-B) = \sin[45^0+\frac{1}{2}(l-\Omega)]\,\sin[45^0+\frac{1}{2}(b-i)], \\ \cos\frac{1}{2}k\,\cos\frac{1}{2}(A-B) = \cos[45^0+\frac{1}{2}(l-\Omega)]\,\sin[45^0+\frac{1}{2}(b+i)]. \end{cases}$$

Es sei nun analog mit den Formeln (2. und 5.) das von (v) auf die Ebene der Bahn gefällte Perpendikel $90^0-M''$, und die Entfernung des Fufspunctes desselben vom aufsteigenden Knoten N'', so hat man

$$10.\quad \begin{cases} \sin M''\cos(N''-A) = \cos(E-B), \\ \sin M''\sin(N''-A) = \sin(E-B)\cos k, \\ \cos M'' = \sin(E-B)\sin k, \end{cases}$$

und

$$11.\quad \begin{cases} \cos(v)(x) = \sin M''\cos(u-N''), \\ \cos(v)(y) = -\sin M''\sin(u-N''), \\ \cos(v)(z) = \cos M'', \end{cases}$$

also endlich:

$$12.\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial D}{\partial r}\right) = \frac{1}{\triangle}\sin M''\cos(u-N''), & \left(\frac{\partial D}{\partial(\varphi+\varpi)}\right) = -\frac{r}{\triangle}\sin M''\sin(u-N''), \\ \left(\frac{\partial D}{\cos\Phi\,\partial i}\right) = \frac{r}{\triangle}\cos M''\sin\varphi, & \left(\frac{\partial D}{\sin\Phi\,\partial i}\right) = -\frac{r}{\triangle}\cos M''\cos\varphi. \end{cases}$$

München, den 28. October 1830.

14.

Über den Werth der Reihen

$R_n = 1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n -$ etc. in infin. und

$S_n = 1^n - 3^n + 5^n -$ etc. in infin.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

---

1. Es ist

$$1.\quad \begin{cases} z(1+z)^{-1} = z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 - \text{etc.} = Z_0, \\ z\dfrac{\partial . z(1+z)^{-1}}{\partial z} = z - 2z^2 + 3z^3 - 4z^4 + 5z^5 - \text{etc.} = Z_1, \\ z\dfrac{\partial z\,\partial z(1+z)^{-1}}{\partial z^2} = z - 2^2z^2 + 3^2z^3 - 4^2z^4 + 5^2z^5 - \text{etc.} = Z_2, \\ \text{etc.} \\ z\dfrac{\partial Z_{n-1}}{\partial z} = z - 2^nz^2 + 3^nz^3 - 4^nz^4 + 5^nz^5 - \text{etc.} = Z_n. \end{cases}$$

Setzt man $z = y-1$, so wird $z(1+z)^{-1} = 1 - \dfrac{1}{y}$ und $\partial z = \partial y$; folglich:

$$2.\quad \begin{cases} Z_0 = 1 - \dfrac{1}{y}, \\ Z_1 = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y^2}, \\ Z_2 = -\dfrac{1}{y} + 3\dfrac{1}{y^2} - 2\dfrac{1}{y^3}, \\ Z_3 = \dfrac{1}{y} - 7\dfrac{1}{y^2} + 12\dfrac{1}{y^3} - 6\dfrac{1}{y^4}. \end{cases}$$

Wenn man $z=1$ oder $y=2$ setzt, so verwandeln sich Z_0, Z_1, Z_2 resp. in R_0, R_1, R_2; man hat demnach

$$R_0 = \tfrac{1}{2};\quad R_1 = \tfrac{1}{4};\quad R_2 = 0;\quad R_3 = -\tfrac{1}{8}.$$

Aus den Gleichungen (2.) sieht man, dafs der allgemeine Ausdruck die Form haben mufs:

$$3.\quad Z_n = \pm\frac{1}{y} \mp a^{(n,2)}\frac{1}{y^2} \pm a^{(n,3)}\frac{1}{y^3} \mp a^{(n,4)}\frac{1}{y^4} \pm \text{etc.}$$

und dafs

$$4.\quad \begin{cases} a^{(n,\,n+1)} = 1.2.3.4\ldots.n, \\ a^{(n,\,i)} = 0, \end{cases}$$

wenn $i > n+1$. Die Gleichung (3.) giebt hieraus

$$Z_{n+1} = (y-1)\frac{\partial Z_n}{\partial y} = \mp\frac{1}{y} \pm (2a^{(n,2)}+1)\frac{1}{y^2} \mp (3a^{(n,3)} - 2a^{(n,2)})\frac{1}{y^3} + \text{etc.},$$

folglich ist:

5. $\begin{cases} a^{(n+1,2)} = 2a^{(n,2)}+1, & a^{(n+1,3)} = 3a^{(n,3)}+2a^{(n,2)}, \\ a^{(n+1,4)} = 4a^{(n,4)}+3a^{(n,3)}, & \ldots. \; a^{(n+1,i+1)} = (i+1)a^{(n,i+1)}+ia^{(n,i)}. \end{cases}$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt: $\frac{a^{(n+1,2)}}{2^{n+1}} = \frac{a^{(n,2)}}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$; folglich ist

$$\frac{a^{(n,2)}}{2^n} = +\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots.+\frac{1}{2^n} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n; \text{ also}$$

$$6. \quad a^{(n,2)} = 2^n-1.$$

Die zweite der Gleichungen (5.) giebt: $\frac{a^{(n+1,3)}}{3^{n+1}} = \frac{a^{(n,3)}}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$;
folglich eben so:

$$\frac{a^{(n,3)}}{3^n} = \tfrac{2}{3}+(\tfrac{2}{3})^2+(\tfrac{2}{3})^3+\ldots.+(\tfrac{2}{3})^n-2[\tfrac{1}{3}+(\tfrac{1}{3})^2+(\tfrac{1}{3})^3+\ldots.+(\tfrac{1}{3})^n], \text{ oder}$$

$$7. \quad a^{(n,3)} = 3^n-2.2^n+1.$$

Aus der dritten Gleichung folgt:

$$\frac{a^{(n+1,4)}}{4^{n+1}} = \frac{a^{(n,4)}}{4^n} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 3\left(\frac{2}{4}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1},$$

folglich ist

$$\frac{a^{(n,4)}}{4^n} = \tfrac{3}{4}+(\tfrac{3}{4})^2+(\tfrac{3}{4})^3+\ldots.+(\tfrac{3}{4})^n-3[\tfrac{2}{4}+(\tfrac{2}{4})^2+(\tfrac{2}{4})^3+\ldots.+(\tfrac{2}{4})^n] + 3[\tfrac{1}{4}+(\tfrac{1}{4})^2+(\tfrac{1}{4})^3+\ldots.+(\tfrac{1}{4})^n],$$

oder:

$$8. \quad a^{(n,4)} = 4^n-3.3^n+3.2^n-1.$$

Die Gleichungen (6., 7., 8.) lassen vermuthen, dafs allgemein

$$9. \quad a^{(n,i)} = i^n-(i-1)(i-1)^n+\frac{(i-1)(i-2)}{1.2}(i-2)^n-\frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3}(i-3)^n+\text{etc.}$$

sei. Unter dieser Voraussetzung erhält man aus der letztern der Gleichungen (5.)

$$\frac{a^{(n+1,i+1)}}{(i+1)^{n+1}} = \frac{a^{(n,i+1)}}{(i+1)^n} + \left(\frac{i}{i+1}\right)^{n+1} - \frac{i}{1}\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{n+1} + \frac{i.i-1}{1.2}\left(\frac{i-2}{i+1}\right)^{n+1} - \text{etc.}, \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^{(n,i+1)}}{(i+1)^n} = & \quad \frac{i}{i+1}+\left(\frac{i}{i+1}\right)^2+\left(\frac{i}{i+1}\right)^3+\ldots.+\left(\frac{i}{i+1}\right)^n \\ & -i\left[\frac{i-1}{i+1}+\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^2+\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^3+\ldots.+\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n\right] \\ & +\frac{i(i-1)}{1.2}\left[\frac{i-2}{i+1}+\left(\frac{i-2}{i+1}\right)^2+\left(\frac{i-2}{i+1}\right)^3+\ldots.+\left(\frac{i-2}{i+1}\right)^n\right] \\ & -\text{etc.} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{a^{(n,i+1)}}{(i+1)^n} = i\left(1-\left(\frac{i}{i+1}\right)^n\right)-\frac{i(i-1)}{1.2}\left(1-\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^n\right)+\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\left(1-\left(\frac{i-2}{i+1}\right)^n\right]-\text{etc.}$$

da aber $(1-1)^i = 1-i+\frac{i(i-1)}{1.2}-\text{etc.} = 0$ ist, so erhält man endlich:

$$a^{(n,i+1)} = (i+1)^n-i.2^n+\frac{i(i-1)}{1.2}(i-1)^n-\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}(i-2)^n+\text{etc.}$$

Die Gleichung (9.) gilt also für $i+1$, wenn sie für i gilt; und demnach, da sie für $i=2, 3,$ etc. wahr ist, allgemein für jeden Werth von i.

Nach der Gleichung (7.) hat man:

$$10.\quad [1.2.3.4\ldots.n](-1)^n = 1^n - n2^n + \frac{n.n-1}{1.2}3^n - \text{etc.}\ldots.\pm(n+1)^n.$$

Beiläufig ergiebt sich hieraus ein neuer Beweis des in der Zahlentheorie sogenannten Wilsonschen Theorems (Gaufs *Disq. arithm. art.* 67.). Da nemlich, wenn $n+1$ eine ungerade Primzahl ist, die nach der Division durch $n+1$ nachbleibenden Reste von 1^n, 2^n, $3^n\ldots.n^n$ alle $=1$ sind, so hat man die Summe dieser Reste von $1.2.3\ldots.n$, da die Coëfficienten der Formel (10.) ganze Zahlen sind,

$$1-n+\frac{n.n-1}{1.2}-\text{etc.}\ldots.-n = (1-1)^n-1 = -1.$$

2. Es ist ebenfalls:

$$11.\quad \begin{cases} y(1+y^2)^{-1} = y - y^3 + y^5 - y^7 + \ldots. = M_0, \\ y\frac{\partial M_0}{\partial y} = y - 3y^3 + 5y^5 - 7y^7 + \ldots. = M_1, \\ y\frac{\partial M_1}{\partial y} = y - 3^2y^3 + 5^2y^5 - 7^2y^7 + \ldots. = M_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y\frac{\partial M_{n-1}}{\partial y} = y - 3^ny^3 + 5^ny^5 - 7^ny^7 + \ldots. = M_n. \end{cases}$$

Setzt man nun $y=\text{tang}\,\varphi$, so wird $y(1+y^2)^{-1} = \sin\varphi\cos\varphi$;

$$\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial M_{n-1}}{\partial\varphi} = M_n,$$

also ist:

$$12.\quad \begin{cases} M_0 = \sin\varphi\cos\varphi, \\ M_1 = \sin\varphi\cos\varphi^3 - \sin\varphi^3\cos\varphi, \\ M_2 = \sin\varphi\cos\varphi^5 - 6\sin\varphi^3\cos\varphi^3 + \sin\varphi^5\cos\varphi, \\ M_3 = \sin\varphi\cos\varphi^7 - 23\sin\varphi^3\cos\varphi^5 + 23\sin\varphi^5\cos\varphi^3 - \sin\varphi^7\cos\varphi; \end{cases}$$

man wird also allgemein setzen können:

$$M_n = \sin\varphi\cos\varphi^{2n+1} - a^{(n,3)}\sin\varphi^3\cos\varphi^{2n-1} + a^{(n,5)}\sin\varphi^5\cos\varphi^{2n-3} - a^{(n,7)}\sin\varphi^7\cos^{2n-5} + \ldots$$
$$\ldots.\pm a^{(n,2n+1)}\sin\varphi^{2n+1}\cos\varphi,$$

und es wird dann:

$$13.\quad \begin{cases} a^{(n+1,3)} = 3a^{(n,3)} + 2n + 1, \\ a^{(n+1,5)} = 5a^{(n,5)} + (2n-1)a^{(n,3)}, \\ a^{(n+1,7)} = 7a^{(n,7)} + (2n-3)a^{(n,5)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(n+1,2\mu+1)} = (2\mu+1)a^{(n,2\mu+1)} + (2n-2\mu+3)a^{(n,2\mu-1)}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt: $\frac{a^{(n+1,3)}}{3^{n+1}} = \frac{a^{(n,3)}}{3^n} + (2n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$, also ist

$$\frac{a^{(n,3)}}{3^n} = 3.\tfrac{1}{3} + 5(\tfrac{1}{3})^2 + 7(\tfrac{1}{3})^3 + \ldots + (2n-1)(\tfrac{1}{3})^n;$$

um diese Reihe summiren zu können, und zugleich einige nachfolgende, bemerke ich, dafs

$$14.\begin{cases} x + x^2 + x^3 \ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}, \\ (1+a)x + (2+a)x^2 + (3+a)x^3 + \ldots + (n+a)x^n = \\ \qquad \frac{x^2 - x^{n+2}}{(1-x)^2} + \frac{(1+a)x - (n+1+a)x^{n+1}}{1-x}, \\ (1+a)(1+a')x + (2+a)(2+a')x^2 + \ldots + (n+a)(n+a')x^n = \\ 2\frac{x^3 - x^{n+3}}{(1-x)^3} + \frac{(3+a+a')x^2 - (2n+3+a+a')x^{n+2}}{(1-x)^2} + \frac{(1+a)(1+a')x - (n+1+a)(n+1+a')x^{n+1}}{1-x}; \end{cases}$$

man erhält also:

$$15. \quad n^{(n,3)} = 3^n - (n+1).$$

Es ist ferner $\frac{a^{(n+1,5)}}{5^{n+1}} = \frac{a^{(n,5)}}{5^n} + \frac{2n-1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - \frac{(2n-1)(n+1)}{5^{n+1}}$, demnach

$$\frac{a^{(n,5)}}{5^n} = \tfrac{2}{3}[-\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{5})^2 + \tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{5})^3 \ldots (n - \tfrac{3}{2})(\tfrac{3}{5})^n]$$
$$- 2[-\tfrac{1}{2}.1.\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{2}.2(\tfrac{1}{5})^2 + \tfrac{3}{2}.3(\tfrac{1}{5})^3 \ldots (n - \tfrac{3}{2})n(\tfrac{1}{5})^n],$$

woraus man durch Hülfe der Gleichungen (14.) erhält:

$$16. \quad a^{(n,5)} = 5^n - (n+1)3^n + \frac{(n+1)n}{1.2}.$$

Dieser Ausdruck deutet auf das allgemeine Gesetz der Coëfficienten

$$17. \quad a^{(n,2\mu+1)} = (2\mu+1)^n - (n+1)(2\mu-1)^n + \frac{n+1.n}{2.2}(2\mu-3)^n \ldots \pm \frac{n+1.n \ldots n-\mu+2}{1.2 \ldots \mu},$$

und in der That wird der allgemeinen Bedingungs-Gleichung in (13.) dadurch Genüge gethan. Setzt man in (12.) statt φ, $\frac{\pi}{2} - \varphi$, und also statt $\partial\varphi$, $-\partial\varphi$, so verändern blofs die M mit ungeradem Index die Zeichen. Es wird also für den Werth von $\varphi = \frac{\pi}{4}$, wodurch $M_{2\mu+1}$ in $S_{2\mu+1}$ übergeht,

$$S_{2\mu+1} = -S_{2\mu+1},$$

folglich $S_{2\mu+1} = 0$. Ferner ist $a^{(n,2\mu+1)} = \pm a^{(n,2n-2\mu+1)}$, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Substituirt man noch hierin $\varphi = \frac{\pi}{4}$, so erhält man:

$$18. \quad 2^{2n} S_{2n} = 1 - a^{(2n,3)} + a^{(2n,5)} - \text{etc.} \ldots \pm a^{(2n,n-1)} \mp \tfrac{1}{2} a^{(2n,n+1)}.$$

München, den 23. Januar 1831.

15.

Mémoire sur la théorie de la chaleur.

(Par Mr. *G. Libri* de Florence.)

Introduction.

Lorsque l'illustre géomètre, qui le premier a découvert les lois de la propagation de la chaleur, s'occupa de cette théorie, les physiciens admettaient presque généralement, que le refroidissement des corps s'opère d'après la différence qui passe entre leur température, et celle du milieu environnant. Depuis cette époque MM. Dulong et Petit sont parvenus, pas des expériences délicates et variées, à découvrir la véritable loi d'après laquelle la chaleur se propage à la surface des corps. Cette loi remarquable, et entièrement différente de celle que Newton avait énoncée, paraissait devoir exciter l'attention des analystes, et les engager à connaître les modifications qu'elle introduirait dans les résultats du calcul: mais on a dû remarquer, que dans les recherches plus récentes qui ont été publiées sur la théorie de la chaleur, on partait toujours de la loi de Newton.

Lorsqu'il s'agit de températures peu élevées, on peut supposer sans erreur sensible, que le refroidissement s'opère d'après la différence des temperatures; mais il n'en est pas de même dans le problème général, et quoiqu'on ait cru que l'erreur ne devenait apréciable qu'à des températures très-élevées, déjà à la chaleur de l'eau bouillante, on commet une erreur de presque deux degrés du thermomètre centesimal, dans l'équation différentielle qui exprime le mouvement de la chaleur; et cette erreur qui affecte à la fois la valeur de l'inconnue, et la forme sous laquelle elle se trouve dans l'équation différentielle, doit devenir bien plus sensible dans l'intégrale. Il est vrai qu'en partant de la loi découverte par M. Dulong, les équations que l'on obtient ne peuvent plus être intégrées en termes finis avec les méthodes connues; mais il ne paraît pas toujours permis dans les problèmes physiques de s'écarter de la nature, pour simplifier l'analyse qui sert à les résoudre: et d'ailleurs si une première approximation est suffisante pour les inventeurs d'une théorie, il faut que des recherches ultérieures rapprochent d'avantage le calcul de l'expérience. C'est ainsi que

Newton ayant découvert le système du monde, il a fallu un siècle de recherches pour construire l'édifice dont il avait posé les fondemens.

Dans le mémoire que nous publions à présent, nous nous sommes proposés de déterminer le mouvement linéaire de la chaleur, en partant de la loi du refroidissement découverte par M. Dulong. On sait que cette loi se compose de deux parties, dont l'une exprime la perte de la chaleur, éprouvée par l'effet du rayonnement, et l'autre représente l'action du milieu. Or cette seconde partie est sujette à des variations qu'il est très-difficile de soumettre au calcul: pour y parvenir il faudrait connaître la théorie des mouvemens des fluides élastiques; mais ce problème considéré dans sa généralité surpasse les forces actuelles de l'analyse. On a supposé, pour surmonter cette difficulté, que les corps dont on voulait connaître les changemens de température, étaient soumis à l'action d'un courant d'air de densité et de température constantes, qui frappait tous les points de leur surface avec une vitesse uniforme; mais il est aisé de voir l'impossibilité de verifier en nature cette hypothèse, de manière qu'on ne peut tirer de la aucun résultat comparable à l'expérience. Pour rapprocher autant qu'il est possible la théorie de l'observation, nous avons dû considérer le mouvement linéaire de la chaleur, dans une armille de petite épaisseur renfermée dans un espace vide, dont l'enceinte est maintenue à une température constante. Ce problème conduit à une équation aux différentielles partielles qui n'est plus linéaire, et qui contient la variable principale sous la forme d'exponentielle. Il n'est plus possible dans ce cas d'intégrer directement l'équation trouvée, et il faut recourir aux méthodes d'approximation. On ne connait pas de méthode pour intégrer par approximation les équations aux différentielles partielles: on peut à la verité exprimer leur intégrale en séries, et l'on parvient, à l'aide du théorème de M. Fourier, à sommer ces séries lorsqu'elles dérivent d'équations linéaires à coëfficiens constans; mais lorsque la série est trop compliquée pour pouvoir en obtenir le terme général, il est impossible de juger de sa convergence, et le problème reste sans solution. Nous savons tâché d'appliquer aux équations aux différentielles partielles, la méthode d'approximation dont on se sert pour les équations différentielles ordinaires. On sait que pour intégrer les équations différentielles qui expriment les mouvemens des corps célestes, on fait usage de la méthode d'approximation successive, à l'aide de laquelle on les réduit à un nombre indé-

fini d'équations linéaires; mais il arrive que chaque intégration introduit des arcs de cercle qui détruisent l'effet de l'approximation. Les plus grands géomètres ont tâché de vaincre cette difficulté, mais les méthodes qu'ils ont inventées, quoique très-ingénieuses, deviennent souvent impraticables à cause de la longueur excessive des calculs qu'elles demandent. Et d'ailleurs il est très-difficile de s'assurer, que parmi les termes qu'on néglige il n'en existe aucun qui devienne sensible au bout d'un tems très-long: de telle manière que ces méthodes exigent presqu'autant de sagacité pour les appliquer, qu'il fallait de génie pour les découvrir. Toutes ces difficultés paraissent devoir se retrouver dans les équations aux différentielles partielles; cependant si au lieu d'intégrer complètement la première des équations linéaires que nous avons obtenues, pour prendre des intégrales particulières des autres, comme on le fait pour les équations différentielles ordinaires, on commence par prendre des intégrales particulières, des premières équations que l'on veut considérer, et que l'on n'intègre complètement que celle à laquelle on veut arrêter l'approximation, on obtiendra le nombre de fonctions arbitraires qui est nécessaire pour satisfaire à toutes les conditions du problème, et on sera assuré, comme on le démontre directement, de pouvoir éviter toujours les arcs de cercle. Nous avons effectué le calcul que nous venons d'indiquer, sur les deux premières équations linéaires que fournit le problème, et nous avons trouvé une formule qui se compose de celle que M. Fourier avait déjà donnée, et d'un terme de correction multiplié par une petite quantité. En embrassant un plus grand nombre d'équations, on trouverait la même expression, plus des termes multipliés par les puissances ascendantes de la petite quantité par rapport à laquelle on a développé. La méthode que nous venons d'exposer, peut s'appliquer à l'intégration par approximation d'une classe assez étendue d'équations aux différentielles partielles; mais ces recherches ne sauraient trouver place ici, et elles formeront le sujet d'un mémoire particulier.

Parmi les nombreux corollaires que M. Fourier a déduits de son analyse, il en est un fort remarquable qui prouve, qu'après un tems considérable la demisomme des températures de deux points diamétralement opposés dans l'armille, forme toujours une quantité constante, et égale à la température moyenne. Ce résultat a été confirmé avec assez de précision par l'expérience, et il était intéressant de voir comment on tirerait la même conséquence de la loi découverte par M. Dulong. En partant

de la température donnée par notre formule nous obtenons le même théorème, et nous démontrons qu'il dérive également de l'hypothèse de Newton, et de la loi observée.

En supposant le refroidissement proportionnel à la différence des températures, on trouve qu'en plongeant l'extrémité d'une barre de petite épaisseur dans une source constante de chaleur, lorsque l'équilibre des températures se sera établi, la distribution de la chaleur dans la barre pourra être exprimée par une courbe logarithmique. Si l'on part de la loi observée, on obtient une équation différentielle qui n'est plus linéaire, mais qui peut cependant s'intégrer, et dont l'intégrale fait voir que ce n'est que pour des températures très-peu élevées, que l'état permanent de la barre peut se représenter par une courbe logarithmique: lorsque la chaleur augmente, cet état dépendra d'une transcendante elliptique, et en général il sera donné par une transcendante d'une ordre d'autant plus élevé, que la température sera plus grande.

L'intégrale de l'équation différentielle, qui exprime l'état permanent des températures dans une barre très-mince, n'est propre qu'à donner les températures d'une partie de la barre comprise entre deux foyers successifs: cela est évident dans le cas du mouvement linéaire, et tient à ce que l'équation différentielle que l'on a trouvée, ne se vérifie pas aux points qui servent de foyers. Mais lorsqu'il s'agit d'un corps d'une figure quelconque, qui a été échauffé primitivement par plusieurs foyers situés à sa surface ou dans son intérieur, il devient difficile de séparer les diverses parties du corps, pour chacune desquelles l'intégrale que la théorie fournit doit se vérifier, et de déterminer les limites au delà desquelles elle donnerait une valeur fautive. Le corps se subdivise alors, par rapport à son état calorifique, en d'autres corps dont les surfaces de contact jouissent de la propriété du maximum, ou du minimum de température. La détermination de ces surfaces-limites conduit à trouver un grand nombre de propriétés importantes dans la théorie de la chaleur, comme nous le montrerons dans une autre occasion.

Lorsqu'on cherche à connaître le mouvement de la chaleur dans un corps, on exprime la température d'un point donné en fonction de ses cordonnées, et du tems écoulé; mais pendant que le corps s'échauffe ou se refroidit, toutes ses molécules se déplacent à cause du changement de volume produit par les variations de la température. On a négligé jusqu'à

présent, dans la théorie mathématique de la chaleur, l'altération du volume des corps; mais ce phénomène, le plus remarquable et le plus constant de tous ceux qui dépendent de la chaleur, ne nous paraît pas de nature à être négligé. En considérant les dilatations linéaires, nous donnons la formule de correction, qui doit servir à déterminer les coordonnées du point dont on connaît la température.

Nous n'avons traité, dans ce mémoire, que les cas les plus simples de la théorie de la chaleur; mais nous nous proposons de reprendre ce travail dans la suite, et d'appliquer notre analyse à des questions plus compliquées.

Analyse.

Si l'on renferme une armille circulaire homogène de petite épaisseur, dans une sphère creuse, qui ne contienne ni air ni aucune autre espèce de gaz, de manière que le centre de l'armille coïncide avec le centre de la sphère, et si le rayon de celle-ci est beaucoup plus grand que le rayon de l'armille, les parois de la sphère étant d'ailleurs entretenues à une température constante quelconque, il résulte du principe de la communication de la chaleur, et de la loi du refroidissement découverte par M. Dulong, que le mouvement de la chaleur dans l'armille sera exprimé, à très-peu près, par l'équation

$$\frac{dv}{dt} - \frac{a\,d^2v}{dx^2} + c(p^v - 1) = 0,$$

dans laquelle v exprime l'excès de la température du point que l'on considère, sur la température de l'enceinte; x représente la distance, comptée sur l'armille même, de ce point à l'origine des coordonnées; t est le tems écoulé depuis que l'armille a abandonné l'état initial des températures; et p, a et c, sont des constantes dont la première a pour valeur $\sqrt[20]{(1,165)}$, et les deux autres se déterminent par l'expérience dans chaque cas particulier.

En effet, l'équation que M. Fourier a trouvée, en supposant que le refroidissement s'opère d'après la différence des températures, est de la forme

$$7. \qquad \frac{dv}{dt} - \frac{a\,d^2v}{dx^2} + Cv = 0,$$

et en y substituant au lieu de Cv, le terme $c(p^v - 1)$ qui exprime la loi du refroidissement dans le vide, d'après les expériences de MM. Dulong et Petit, on aura l'équation

$$8. \quad \frac{dv}{dt} - \frac{a\,d^2v}{dx^2} + c\,(p^v - 1) = 0,$$

que nous avions déjà indiquée.

Avant d'aller plus loin, il convient d'examiner un résultat que l'on a obtenu en faisant $v = e^{-ct}u$ dans l'équation (7.); car par cette substitution elle se transforme dans la suivante

$$\frac{du}{dt} - \frac{a\,d^2u}{dx^2} = 0,$$

qui est la même équation (7.) dans laquelle on a supposé qu'il n'y avait aucune déperdition de chaleur à la surface; d'où il résulte que dans l'hypothèse de Newton, le refroidissement qui s'opère à la surface ne change pas la loi de la distribution de la chaleur. Mais comme il n'est pas possible d'effectuer une réduction semblable sur l'équation (8.), qui dérive de la loi observée, il faudra admettre qu'en nature, même dans le mouvement linéaire, la distribution de la chaleur est troublée par l'effet de la déperdition qui a lieu à la surface.

Maintenant si l'on fait $\log p = \delta$, l'équation (8.) prendra la forme

$$\frac{dv}{dt} - \frac{a\,d^2v}{dx^2} + c\,(e^{\delta v} - 1) = 0,$$

l'exposant $\delta = \frac{1}{20}\log\left(\frac{11655}{10000}\right)$ étant une très-petite quantité; et si l'on développe en série l'exponentielle dans cette équation, on aura

$$\frac{dv}{dt} - \frac{a\,d^2v}{dx^2} + c\,dv + \frac{c\,\delta^2 v^2}{1.2} + \frac{c\,\delta^3 v^3}{1.2.3} + \text{etc.} = 0,$$

et par suite, en faisant $c\,\delta = b$, on obtiendra

$$\frac{dv}{dt} - \frac{a\,d^2v}{dx^2} + b\,v + \frac{b\,\delta\,v^2}{1.2} + \frac{b\,\delta^2 v^3}{1.2.3} + \text{etc.} = 0,$$

Si l'on fait à présent

$$v = V + \delta V_1 + \delta^2 V_2 + \delta^3 V_3 + \text{etc.},$$

et que l'on substitue cette valeur dans l'équation précédente, en ordonnant le résultat par les puissances ascendantes de δ, on trouvera

$$9. \quad 0 = \frac{dV}{dt} - \frac{a\,d^2V}{dx^2} + bV + \delta\left(\frac{dV_1}{dt} - \frac{a\,d^2V_1}{dx^2} + bV_1 + \frac{bV^2}{1.2}\right)$$
$$+ \delta^2\left(\frac{dV_2}{dt} - \frac{a\,d^2V_2}{dx^2} + bV_2 + bVV_1 + \frac{bV^3}{1.2.3}\right) + \text{etc.},$$

et en égalant à zéro séparément les coëfficiens de chaque puissance de δ, on aura les équations

$$\frac{dV}{dt} - \frac{a\,d^2V}{dx^2} + bV = 0,$$

$$\frac{dV_1}{dt} - \frac{a\,d^2V_1}{dx^2} + bV_1 + \frac{bV^2}{1.2} = 0,$$
$$\frac{dV_2}{dt} - \frac{a\,d^2V_2}{dx^2} + bV_2 + bVV_1 + \frac{bV^3}{1.2.3} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ etc.,}$$

dont le nombre sera déterminé par l'exposant de la plus grande puissance de δ, que l'on veut considérer.

En intégrant la première de ces équations, on obtiendra la valeur de V qui étant substituée dans la seconde équation, servira à déterminer V_1 et ainsi de suite, en introduisant dans la dernière équation les valeurs des inconnues déduites des équations précédentes, on déterminera une nouvelle inconnue. Mais il faut observer, qu'au lieu de prendre l'intégrale complète de la première équation, pour la substituer dans la seconde, et puis intégrer complètement celle-ci, pour substituer encore la valeur de l'inconnue dans la suivante, et ainsi de suite, on pourra exprimer

$$V,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots\ V_{n-1},$$

par des intégrales particulières, et δ^n étant la dernière puissance de δ que l'on veut considérer, il suffira d'intégrer complètement l'équation multipliée par δ^n, qui comprendra les différentielles de V_n et les quantités connues $V, V_1, V_2, \ldots\ldots V_{n-1}$; car l'intégrale complète de cette équation, contiendra toutes les fonctions arbitraires, qui sont nécessaires à la résolution générale du problème.

Supposons par exemple que dans l'équation (9.) on veuille avoir égard à la première puissance de δ seulement, et négliger toutes les autres; on aura les deux équations

$$\frac{dV}{dt} - \frac{a\,d^2V}{dx^2} + bV = 0,$$
$$\frac{dV_1}{dt} - \frac{a\,d^2V_1}{dx^2} + bV_1 + \frac{bV^2}{1.2} = 0,$$

dans la première desquelles on prendra une valeur particulière de V, pour la substituer dans la seconde équation, que l'on devra intégrer complètement.

Maintenant, on sait que l'on satisfait à l'équation

$$\frac{dV}{dt} - \frac{a\,d^2V}{dx^2} + bV = 0,$$

en faisant $V = (\sin nx + \cos nx)\,e^{-(b+an^2)t}$, n étant une constante indéterminée. Si l'on substitue cette valeur de V dans l'équation

$$\frac{dV_1}{dt} - \frac{a\,d^2V_1}{dx^2} + bV_1 + \frac{bV^2}{1.2} = 0,$$

on aura

$$\frac{dV_1}{dt} - \frac{a\,d^2V_1}{dx^2} + bV_1 + \frac{b}{1.2}(\sin nx + \cos nx)^2 e^{-2(b+an^2)t}$$
$$= \frac{dV_1}{dt} - \frac{a\,d^2V_1}{dx^2} + bV_1 + \frac{b}{1.2}(1 + \sin 2nx)e^{-2(b+an^2)t} = 0,$$

et en faisant $V_1 = y\,e^{-2(b+an^2)t} + Z$ (y étant fonction de x seulement, et Z fonction de x et de t), on obtiendra, après avoir divisé par $e^{-2(b+an^2)t}$,

$$2(b+an^2)y + \frac{a\,d^2y}{dx^2} - by - \frac{b}{1.2}(1+\sin 2nx) - \frac{dZ}{dt} + \frac{a\,d^2Z}{dx^2} - bZ = 0,$$

et si l'on égale à zéro séparement les termes qui contiennent Z, on aura, après les réductions, les deux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{b}{a} + 2n^2\right)y = \frac{b}{2a}(1+\sin 2nx),$$

$$10. \qquad \frac{dZ}{dt} - \frac{a\,d^2Z}{dx^2} + bZ = 0,$$

dont la première a pour intégrale

$$y = \begin{cases} \left(E_1 + \dfrac{b}{2a\sqrt{\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)}}\int dx(1+\sin 2nx)\sin x\sqrt{\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)}\right)\cos x\sqrt{\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)} \\ + \left(E_2 - \dfrac{b}{2a\sqrt{\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)}}\int dx(1+\sin 2nx)\cos x\sqrt{\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)}\right)\sin x\sqrt{\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)}; \end{cases}$$

et par suite on obtiendra

$$y = E_1\cos y\sqrt{\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)} + E_2\sin x\sqrt{\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)} - \frac{b}{2}\left(\frac{1}{b+2an^2} + \frac{\sin 2nx}{b-2an^2}\right).$$

Si l'on intègre à présent l'équation en Z, on aura

$$Z = (a_p \sin px + b_p \cos px)\,e^{-(b+ap^2)t},$$

a_p, b_p et p, étant des quantités quelconques; et comme l'équation (10.) est linéaire et ne contient pas de terme indépendant de Z, il s'ensuit qu'elle sera satisfaite par une somme de termes semblables à la valeur de Z que nous avons déjà trouvée, pourvu que les constantes a_p, b_p, p, soient différentes. Et par conséquent l'intégrale complète de l'équation (10.) sera composé d'une suite infinie de valeurs semblables à celle que nous avons déjà obtenue, pourvu que l'on change convenablement les constantes arbitraires.

Maintenant, puisque Z contient une infinité de constantes arbitraires, on pourra dans la valeur de y supprimer les deux constantes E_1, E_2, qui ne rendraient pas plus générale la valeur de V_1; alors en faisant

$E_1 = E_2 = 0$, on aura une valeur de y qui ne contiendra plus les fonctions

$$\cos x \sqrt{\left(\frac{b}{a} + 2n^2\right)}; \quad \sin x \sqrt{\left(\frac{b}{a} + 2n^2\right)}.$$

Soit r le rayon de l'armille dans laquelle on suppose que la chaleur se propage; sa circonférence sera égale à $2r\pi$, et il est clair qu'en exprimant par v la température d'un point dont la distance à l'origine est x, la valeur de v ne devra pas changer lorsque dans la formule qui exprime v on mettra $x + 2r\pi$, à la place de x: par conséquent il faudra, dans les valeurs de V, et de V_1, faire $n = \frac{m}{r}$, et $p = \frac{s}{r}$; m et s étant deux nombres entiers positifs quelconques: on aura donc, en négligeant les puissances supérieures de δ,

$$v = V + \delta V_1 = V + \delta(y e^{-2(b+an^2)t} + Z)$$

$$= \begin{cases} \left(\sin\frac{mx}{r} + \cos\frac{mx}{r}\right) e^{-\left(b+\frac{am^2}{r^2}\right)t} + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(a_s \sin\frac{sx}{r} + b_s \cos\frac{sx}{r}\right) \delta e^{-\left(b+\frac{as^2}{r^2}\right)t} \\ \qquad - \frac{br^2}{2}\left(\frac{1}{br^2+2am^2} + \frac{\sin\frac{2mx}{r}}{br^2-2am^2}\right) \delta e^{-2\left(b+\frac{am^2}{r^2}\right)t}, \end{cases}$$

mais le premier terme $\left(\sin\frac{mx}{r} + \cos\frac{mx}{r}\right) e^{-\left(b+\frac{am^2}{r}\right)t}$ de cette formule pourra être compris sous le signe Σ, puisque la valeur de m devra se trouver parmi les valeurs de s; et en faisant $\delta a_s = A_s$, et $\delta b_s = B_s$, on aura

$$11. \quad v = \begin{cases} \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(A_s \sin\frac{sx}{r} + B_s \cos\frac{sx}{r}\right) e^{-\left(b+\frac{as^2}{r^2}\right)t} \\ - \frac{br^2}{2}\delta\left(\frac{1}{br^2+2am^2} + \frac{\sin\frac{2mx}{r}}{br^2-2am^2}\right) e^{-2\left(b+\frac{am^2}{r^2}\right)t} \end{cases}$$

et cette formule exprimera le mouvement de la chaleur dans l'armille. Pour déterminer la fonction arbitraire ou, ce qui revient au même, la série des termes

$$A_1, \; A_2, \; A_3, \; \ldots\ldots A_s, \text{ etc.},$$
$$B_1, \; B_2, \; B_3, \; \ldots\ldots B_s, \text{ etc.},$$

on devra faire $t = 0$, et on aura v égal à la température initiale, que nous exprimerons par la fonction $f(x)$, et qui étant développée en série suivant les sinus et cosinus des multiples de l'arc $\frac{x}{r}$ servira pour déterminer les coëfficiens.

Si dans la formule (11.) on fait $\delta = 0$, on obtiendra l'expression que M. Fourier a trouvée le premier en partant de l'hypothèse de New-

ton. Pour déterminer m, on devra prendre le nombre entier le plus petit qui ne satisfait pas à l'équation

$$br^2 \pm 2am^2 = 0,$$

puisqu'on aura de cette manière la valeur la plus approchée, et on sera assuré de ne pas rencontrer des arcs de cercle qui détruiraient l'effet de l'approximation. Lorsque les conditions du problème permettront de faire $m = 0$, le terme de correction, pour la première approximation, se réduira à $-\frac{\delta}{2} e^{-2bt}$; et on trouvera que ce terme est indépendant des coordonnées, et qu'il ne dépend que du tems.

On a vu qu'en faisant $E_1 = E_2 = 0$, on obtenait

$$y = \frac{b}{2a\sqrt{\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)}} \left\{ \begin{array}{l} \cos x \sqrt{\left(2n^2+\frac{b}{a}\right)} \int dx\,(1+\sin 2nx) \sin x \sqrt{\left(2n^2+\frac{b}{a}\right)} \\ -\sin x \sqrt{\left(2n^2+\frac{b}{a}\right)} \int dx\,(1+\sin 2nx) \cos x \sqrt{\left(2n^2+\frac{b}{a}\right)} \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{b}{2}\left(\frac{1}{b+2an^2} + \frac{\sin 2nx}{b-2an^2}\right)$$

de manière que les fonctions $\cos x\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)$, $\sin x \sqrt{\left(\frac{b}{a}+2n^2\right)}$, s'évanouissaient d'elles-mêmes dans le calcul: il était nécessaire que cette réduction pût s'effectuer, autrement la température v ne serait pas restée la même en changeant x en $x+2r\pi$, dans la formule qui la représente. Cependant cette réduction, qui a paru un résultat de calcul, aura toujours lieu quel que soit le nombre des puissances de δ que l'on considère; en effet on a toujours l'équation

$$\cos ax \int dx\,\varphi(x) \sin ax - \sin ax \int dx\,\varphi(x) \cos ax$$

$$= -\frac{\varphi(x)}{a} - \frac{1}{a^2}\left(\cos ax \int dx \frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2} \sin ax - \sin ax \int dx \frac{d^2.\varphi(x)}{dx^2} \cos ax\right)$$

$$= \frac{(-1)^p}{a^{2p}}\left(\cos ax \int dx \frac{d^{2p}.\varphi(x)}{dx^{2p}} \sin ax - \sin ax \int dx \frac{d^{2p}.\varphi(x)}{dx^{2p}} \cos ax\right)$$

$$-\frac{\varphi(x)}{a} + \frac{d^2.\varphi(x)}{a^3\,dx^2} - \frac{d^4.\varphi(x)}{a^5\,dx^4} \ldots + \frac{(-1)^p}{a^{2p-1}} \frac{d^{2p-2}.\varphi(x)}{dx^{2p-2}};$$

qui montre, que si entre $\varphi(x)$, et $\frac{d^{2p}.\varphi(x)}{dx^{2p}}$ on peut avoir une équation de la forme $M\varphi(x) = \frac{d^{2p}.\varphi(x)}{dx^{2p}}$, M étant une quantité constante, on pourra toujours avoir

12. $$\cos ax \int dx\,\varphi(x) \sin ax - \sin ax \int dx\,\varphi(x) \cos ax$$

$$= \left(\frac{a^{2p}}{a^{2p}-(-1)^p M}\right)\left(-\frac{\varphi(x)}{a} + \frac{d^2.\varphi(x)}{a^3\,dx^2} \ldots + \frac{(-1)^p}{a^{2p-1}} \frac{d^{2p-2}.\varphi(x)}{dx^{2p-2}}\right)$$

et l'on voit que le second membre ne contiendra ni $\cos ax$, ni $\sin ax$. Il est clair que si $\varphi(x) = A \sin mx + B \cos mx$, on pourra établir l'équation $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = -m^2 \varphi(x)$, et par conséquent on obtiendra la valeur de l'intégrale (12.) délivrée de $\sin ax$, et de $\cos ax$; la même chose arrivera en général lorsque $\varphi(x)$ sera de la forme

$$A_1 \sin m_1 x + A_2 \sin m_2 x \ldots\ldots + A_t \sin m_t x + \text{etc.},$$
$$+ B_1 \cos m_1 x + B_2 \cos m_2 x \ldots\ldots + B_t \cos m_t x + \text{etc.},$$

et lorsqu'on aura

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots + ex^n;$$

et dans d'autres cas.

Maintenant, puisque les valeurs particulières de V, V_1, V_2, etc., peuvent toujours s'exprimer par des fonctions de la forme

$$e^{-lt} \left\{ \begin{array}{l} P_1 \sin n_1 x + P_2 \sin n_2 x \ldots\ldots + P_q \sin n_q x \\ + Q_1 \cos n_1 x + Q_2 \cos n_2 x \ldots\ldots + Q_q \cos n_q x \end{array} \right\},$$

on sera toujours assuré que les sinus et cosinus des arcs irrationnels ne se trouveront pas dans l'intégrale complète, quel que soit le nombre des puissances de δ que l'on voudra considérer.

Il faut observer que si l'on avait $(-1)^p M - a^{2p} = 0$, le second membre de l'équation (12.) aurait une valeur infinie: on rencontrerait cette circonstance si l'un des nombres n_1, n_2, n_3, ... n_q, etc., compris dans les valeurs de V, V_1, V_2, etc., était égal à a; alors en reprenant le calcul on trouverait, après les réductions, un terme de la forme $Nx \sin n_q x$, qui contiendrait l'arc de cercle x, et qui rendrait nul, dans le cas que nous considérons, l'effet de l'approximation: mais il est clair que le nombre m de la formule (11.) pourra toujours être déterminé de manière que cela n'arrive pas, et il suffira à cet effet que le dénominateur ne soit pas zéro, comme nous l'avons déjà indiqué.

La formule (12.) exige, pour être appliquée facilement, que la fonction $\varphi(x)$ puisse se réduire à une suite finie de monomes composés d'un seul facteur: cependant en poussant fort loin l'approximation, et en calculant un grand nombre de termes de la serie $V + \delta V_1 + \delta^2 V_2 + \text{etc.}$, on aurait en général

$$\varphi(x) = \left\{ \begin{array}{l} A \cos a_1 \cos a_2 \cos a_3 \ldots\ldots \cos a_n \,.\, \sin b_1 \sin b_2 \ldots\ldots \sin b_m \\ + A_1 \cos c_1 \cos c_2 \cos c_3 \ldots\ldots \cos c_p \,.\, \sin d_1 \sin d_2 \ldots\ldots \sin d_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.} \end{array} \right\};$$

pour opérer les réductions nécessaires dans cette formule on pourra faire usage de l'équation

$$\cos a_1 \cos a_2 \cos a_3 \ldots\ldots \cos a_n$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}}(\cos q + S.\cos(q-2a_y) + S.S.\cos(q-2a_y-2a_z)\ldots\ldots + \text{etc.}),$$

dans laquelle les arcs a_1, a_2, a_3, ... a_n, sont indéterminés et tous différens entre eux, et donnent $a_1 + a_2 + a_3 \ldots\ldots + a_r = q$; en indiquant par $S.\cos(q-2a_y)$, la somme de tous les termes de la forme $\cos(q-2a_y)$, où l'on a fait successivement $y = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$: en représentant par $S.S.\cos(q-2a_y-2a_z)$, la somme de tous les termes de la forme $\cos(q-2a_y-2a_z)$, où l'on a fait d'abord successivement $y = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$; et où l'on a donné à z toutes les valeurs 1, 2, 3, ... n (pourvu que l'on néglige tous les termes dans lesquels on aurait $y = z$); et ainsi de suite jusqu'au dernier terme: en observant toujours d'omettre tous les termes de cette formule, qui seraient égaux à l'un de ceux que l'on a déjà trouvés. En différentiant cette équation par rapport à a_1, a_2, a_3, etc., on obtiendrait des expressions semblables, pour le produit d'un nombre quelconque de sinus et de cosinus.

M. Fourier en adoptant la loi de Newton a trouvé, que la demi-somme des températures de deux points de l'armille situés aux extrémités d'un diamètre quelconque, forme toujours, au bout d'un temps très-long, une quantité constante, et égale à la température moyenne de l'armille. Maintenant, puisque ce résultat à été confirmé par l'expérience, il est clair qu'il devra se déduire encore de la loi du refroidissement découverte par MM. Dulong et Petit. En effet, en reprenant la valeur de v trouvée précédemment (11.), et en y supposant t très-grand, on devra considérer seulement deux espèces de termes: ceux dans lesquels on a $s = 0$, et ceux qui résultent de $s = 1$: c'est-à-dire les termes multipliés par e^{-bt}, et par $e^{-\left(b+\frac{a}{r^2}\right)t}$; puisque tous les autres qui contiennent quelques-uns des facteurs $e^{-2\left(b+a\frac{m^2}{r^2}\right)t}$; $e^{-\left(b+4\frac{a}{r^2}\right)t}$ etc.; sont trop petits (dans l'hypothèse de t très-grand) pour être comparés à ceux-ci. Alors la valeur de v se réduira à la forme

$$v = B_0 e^{-bt} + A_1 e^{-\left(b+\frac{a}{r^2}\right)t} \sin\frac{x}{r} + B_1 e^{-\left(b+\frac{a}{r^2}\right)t} \cos\frac{x}{r},$$

et il est clair que si dans cette équation on substitue $x + r\pi$, au lieu de x, on aura la température v_1, du point de l'armille diamétralement opposé à celui dont la distance à l'origine est x, exprimée de cette manière

$$v_1 = B_0 e^{-bt} - A_1 e^{-\left(b+\frac{a}{r^2}\right)t} \sin\frac{x}{r} - B_1 e^{-\left(b+\frac{a}{r^2}\right)t} \cos\frac{x}{r};$$

et partant

$$\frac{v+v_1}{2} = B_0 e^{-bt}.$$

Si dans la formule (11.) on substitue pour b sa valeur $c\delta$, on trouvera, que l'expression de M. Fourier contient seulement la première puissance de δ, et que la nôtre renferme aussi δ^2. Avec notre méthode, on pourra pousser l'approximation aussi loin que l'on voudra, sans crainte de rencontrer jamais des arcs de cercle qui la rendraient nulle; et on pourra toujours déterminer les constantes arbitraires (que l'on trouve en prenant des integrales particulières des premières équations différentielles, pour les substituer dans celles qui suivent) de manière que tous les termes aillent toujours en décroissant, et qu'aucun dénominateur ne s'évanouisse; comme nous l'avons fait dans l'analyse précédente.

On sait que l'équilibre des températures dans une armille, dont un point est soumis à une température constante, est donné lorsqu'on adopte la loi de Newton, par l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = n^2 v;$$

dont l'integrale est $v = Ae^{nx} + A_1 e^{-nx}$, A et A_1 étant deux constantes arbitraires. En partant de la loi de M. Dulong on obtient, pour l'équilibre des températures dans le vide, l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = a(e^{\delta v} - 1)$$

qui a pour intégrale

$$x = \int \frac{dv}{\sqrt{\left(2a\left(\frac{e^{\delta v}}{\delta} - v\right) + C - \frac{2a}{\delta}\right)}} + C_1;$$

C et C_1 étant deux nouvelles constantes arbitraires. Lorsque v est une petite quantité, on peut supposer sans erreur sensible

$$x = \int \frac{dv}{\sqrt{(C + a\delta v^2)}} + C_1 = \frac{1}{\sqrt{(a\delta)}} \log\left(v\sqrt{\left(\frac{a\delta}{C}\right)} + \sqrt{\left(1 + \frac{a\delta v^2}{C}\right)}\right) + C_1,$$

et en faisant $C_1\sqrt{(a\delta)} = \log E$; $a\delta = n^2$; et réduisant, on aura

$$\left(\frac{e^{nx}}{E} - \frac{nv}{\sqrt{(C)}}\right)^2 = 1 + \frac{n^2v^2}{C} = \frac{e^{2nx}}{E^2} - \frac{2nve^{nx}}{E\sqrt{(C)}} + \frac{n^2v^2}{C},$$

et par suite

$$v = \frac{e^{nx}\sqrt{(C)}}{2nE} - \frac{E\sqrt{(C)}}{2ne^{nx}} = Ae^{nx} + A_1 e^{-nx};$$

en faisant $A = \frac{V(C)}{2nE}$; $A_1 = -\frac{EV(C)}{2n}$; et comme v est égal à la température t du point que l'on considère, moins la température T de l'enceinte, on obtiendra enfin l'équation

$$t = A e^{nx} + A_1 e^{-nx} + T;$$

qui dans le cas de $T = 0$, coïncide avec celle que nous avions déjà trouvée, en supposant le refroidissement proportionnel à la différence des températures.

Si l'on considère une barre indéfinie très-mince, et que l'on suppose un foyer de température constante placé sur cette barre à l'origine des coordonnées, lorsque l'équilibre des températures se sera établi, cet état sera représenté par l'équation $\frac{d^2v}{dx^2} = n^2 v$, pourvu que la température v soit assez petite pour pouvoir négliger, dans le développement de $e^{\delta v}$, les puissances de δv supérieures à la première: maintenant on sait que l'intégrale de l'équation précédente est $v = C e^{nx} + C_1 e^{-nx}$; mais comme d'ailleurs l'état permanent de la barre est exprimé depuis $x = -\infty$, jusqu'à $x = +\infty$, par l'équation

$$v = C_2 \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq \cos qx}{1+q^2} \right)^n,$$

et que quelque valeur que l'on attribue aux constantes, ces deux expressions de v ne peuvent jamais coïncider, il en résulterait que l'intégrale de l'équation $\frac{d^2v}{dx^2} = n^2 v$, qui est linéaire, pourrait se former de la somme des deux valeurs de v que nous venons de rapporter, et contiendrait trois constantes arbitraires. Pour expliquer ce paradoxe il est nécessaire d'observer que l'équation $\frac{d^2v}{dx^2} = n^2 v$, n'exprime l'état permanent de la barre, que dans les points qui permettent un flux de chaleur du point qui précède immédiatement celui que l'on considère, à celui-ci, et de celui-ci, à l'autre qui le suit immédiatement; tandis que le foyer, que nous avons placé à l'origine des coordonnées, envoye un flux continuel de chaleur à tous les points de la barre qui sont situés à sa droite et à sa gauche. Le même résultat se déduirait de la considération de la figure, qui exprime les valeurs des températures pour chaque point de la barre, et dont l'équation est

$$y = C_2 \left(\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{dq\cos qx}{1+q^2}\right)^n;$$

car pour $x=0$, au lieu de donner $\frac{d^2y}{dx^2} = n^2 C_2$, comme cette courbe devrait faire si elle satisfaisait dans tous ses points à l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = n^2 y$, on voit, par la construction, qu'elle donne $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$; puisque la courbe dont nous parlons est formée de deux demi-logarithmiques égales, qui se réunissent de manière à avoir leur tangente commune au point de contact, perpendiculaire à l'axe des abscisses. Les mêmes considérations s'appliquent à une barre dont plusieurs points sont entretenus à des températures constantes: elles sont très-simples, mais nous avons cru devoir les placer ici, comme étant propres à limiter l'étendue que l'on serait tenté d'attribuer aux équations différentielles du mouvement de la chaleur, ou à leurs intégrales. Il faudra surtout y avoir égard, lorsqu'on voudra connaître l'état calorifique d'un corps, dont un ou plusieurs points pris dans son intérieur ou à sa surface, sont supposés des foyers de temperatures invariables.

Une autre observation que nous croyons ne pas devoir omettre, c'est que lorsque dans l'armille circulaire, que nous avons considérée, nous sommes partis de la propriété connue, que la temperature du point x devait être égale à celle du point dont la distance à l'origine est $x+2r\pi$, pour déterminer la forme des fonctions circulaires comprises dans l'intégrale, nous l'avons fait en suivant l'exemple des illustres géomètres qui nous ont précédé dans ce genre de recherches. Cependant il paraît, qu'au lieu de partir de cette considération auxiliaire, on auraît dû déterminer les coëfficiens de l'arc x d'après l'équation qui exprime la figure de l'armille, et l'irradiation qui se fait intérieurement entre les diverses parties de l'anneau; irradiation qui est modifiée, comme l'on sait, d'après la courbure intérieure de l'armille. Ceci deviendrait surtout évident, si l'on devait déterminer le mouvement de la chaleur sur une surface cylindrique creuse.

Enfin il faut remarquer, que la théorie mathématique de la chaleur a pour but de trouver à chaque instant la température d'un point quelconque, d'après les conditions initiales du problème et la figure du corps que l'on considère. Cependant, dans la solution de ce problème,

on suppose toujours que les coordonnées du point en question n'ont point changé, pendant que le corps s'est échauffé ou refroidi; quoiqu'il soit certain que ce point a changé de position, d'après l'augmentation ou la diminution de volume que le corps a soufferte par l'action de la chaleur. En opérant de cette manière on trouve la température d'une molécule matérielle, exprimée en fonction des coordonnées du point qu'elle occupait dans l'espace au commencement du phénomène, et du tems écoulé depuis la cessation de l'état initial: pour corriger les formules que l'on a obtenues, il faut connaître la loi d'après laquelle les corps se dilatent par l'effet de la chaleur. Si l'on suppose les dilatations linéaires élémentaires, proportionnelles aux accroissemens de la température, ce qui paraît toujours permis, du moins entre certaines limites de l'échelle thermométrique, on trouvera que le point qui, lorsque la température du corps était zéro, avait x pour distance à l'origine des coordonnées, sera éloigné de l'origine de la quantité $x_1 = \int dx(1+\alpha v)$; v étant donné en fonction de x et de t; et le coëfficient α étant donné dans chaque cas par l'expérience. Mais ceci n'est qu'un aperçu, que nous reprendrons dans une autre circonstance.

Ce mémoire est le même, à quelques changemens près, qui a été lu en 1825 à l'Académie Royale des Sciences de Paris.

16.

Einige geometrische Sätze.

In Folge des Lehrsatzes 11. Band 6. Heft 2. S. 213.

(Von Herrn *L. J. Magnus* zu Berlin.)

1.

Es sei $y = \varphi(x)$ die Gleichung irgend einer Curve, an welcher sich zwei Tangenten so bewegen, dafs sie immer denselben gegebenen Winkel mit einander bilden.

Nennt man die Coordinaten der Berührungspuncte jener Tangenten α, β und α', β'; und die trigonometrische Tangente des gegebenen Winkels a, so hat man, aufser den Gleichungen $\beta = \varphi(\alpha)$ und $\beta' = \varphi(\alpha')$, zur Bestimmung des Ortes des Durchschnittspuncts der Tangenten, dessen Coordinaten x, y heifsen mögen:

$$1. \quad (y-\beta) = \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}(x-\alpha),$$

$$2. \quad (y-\beta') = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}(x-\alpha'),$$

$$3. \quad \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} - \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'} = a\left(1+\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}\right).$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen die Gröfsen $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$ und $\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}$, so kommt

$$4. \quad a[(y-\beta)(y-\beta')+(x-\alpha)(x-\alpha'] + (y-\beta')(x-\alpha) - (y-\beta)(x-\alpha') = 0,$$

welche Gleichung, wenn man nur x und y als veränderlich ansieht, einen Kreis ausdrückt, der durch die Puncte α, β und α', β' geht. Differentiirt man diese Gleichung, indem man auch α, β und α', β' als veränderlich betrachtet, so erhält man:

$$\begin{aligned} 5. \quad & [2ay - a(\beta+\beta') + \alpha' - \alpha]\,\partial y + [2cx - a(\alpha+\alpha') + \beta - \beta']\,\partial x \\ & + \left[y-\beta-a(x-\alpha) - [x-\alpha+a(y-\beta)]\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}\right]\partial\alpha' \\ & - \left[y-\beta'+a(x-\alpha') + [a(y-\beta') - (x-\alpha']\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right]\partial\alpha = 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun hierin für $y-\beta$ und $y-\beta'$ die Werthe aus (1. und 2.), so verschwinden, in Folge der Gleichung (3.), die Coëfficienten von $\partial\alpha$ und $\partial\alpha'$. Der Ausdruck für den Differential-Coëfficienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist daher

derselbe, man mag α, α' als veränderlich oder als constant betrachten. Hieraus folgt, dafs die Tangente und die Normale des Ortes, den der Punct x, y beschreibt, mit der Tangente und Normale des Kreises (4.) zusammenfallen; und man hat den Satz:

1) Wenn ein Winkel von veränderlicher Gröfse sich so bewegt, dafs seine Schenkel fortwährend eine gegebene ebene Curve berühren, so beschreibt die Spitze P dieses Winkels eine ebene Cure von der Beschaffenheit, dafs die Normale in einem Puncte P dieser Curve durch den Mittelpunct des Kreises geht, welcher durch den Punct P und die Puncte A, B, in denen die Schenkel des Winkels die gegebene Curve berühren, gelegt werden kann.

Es ist klar, dafs dieser Satz auch noch Statt findet, wenn der Winkel sich so bewegt, dafs der eine Schenkel eine und der andere Schenkel eine andere Curve berührt.

Läfst man zwei gerade Linien sich so bewegen, dafs sie fortwährend Normalen an einer gegebenen Curve sind und mit einander denselben constanten Winkel bilden, so werden sie zugleich die Evolute jener Curve berühren, und man kann daher folgenden Satz aufstellen:

2) Wenn ein Schenkel von unveränderlicher Gröfse sich in einer Ebene so bewegt, dafs seine Schenkel eine gegebene, in derselben Ebene liegende Curve rechtwinklig schneiden, so beschreibt die Spitze P dieses Winkels eine Curve von der Beschaffenheit, dafs die Normale in einem ihrer Puncte P, durch den Mittelpunct des Kreises geht, welcher durch den Punct P und die Krümmungs-Mittelpuncte A', B' der Puncte A und B, in denen die Schenkel des Winkels die gegebene Curve schneiden, gelegt werden kann.

Obgleich diese Sätze von grofser Allgemeinheit sind, so lassen sie sich aus noch allgemeineren als besondere Fälle ableiten. Wenn nemlich zwei gerade Linien sich so bewegen, dafs sie fortwährend eine gegebene ebene Curve berühren, und dafs sie mit einer dritten geraden Linie von gegebener Lage zwei Winkel bilden, die auf irgend eine gegebene Art von einander abhangen, so wird der Durchschnittspunct jener beiden Linien eine Curve beschreiben, deren Gestalt von derjenigen der gegebenen Curve und von der gegebenen Art der Abhängigkeit der genannten

beiden Winkel bestimmt werden wird. Man nehme nun die gerade Linie von gegebener Lage zur Abscissen-Achse und nenne die oben durch $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}$ bezeichneten Differential-Coëfficienten, der Kürze wegen, p und p', so sind die Gleichungen der beiden beweglichen Tangenten

$$\text{I.} \quad y-\beta = p(x-\alpha),$$
$$\text{II.} \quad y-\beta' = p'(x-\alpha').$$

Die Abhängigkeit der Winkel, welche diese beiden Linien mit der Abscissen-Achse bilden, wird sich immer durch eine Gleichung zwischen den Tangenten dieser Winkel, d. i. zwischen p und p', angeben lassen, so dafs man hat:

$$\text{III.} \quad \psi(p, p') = 0,$$

wo ψ eine gegebene Function bedeutet.

Setzt man nun für p und p' die Werthe aus (I., II.) in (III.), so kommt

$$\text{IV.} \quad \psi\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}, \frac{y-\beta'}{x-\alpha'}\right) = 0,$$

und diese Gleichung drückt, wenn man α, β und α', β' als constant ansieht, diejenige Curve aus, die der Durchschnittspunct zweier geraden Linien beschreiben würde, wenn diese letzteren sich um die als fest betrachteten Puncte drehen, während sie mit der Abscissen-Achse Winkel von der gegebenen Abhängigkeit bilden.

Differentiirt man die Gleichung (IV.), indem man, aufser y und x, auch $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ als veränderlich betrachtet, so kommt

$$\text{V.} \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\frac{1}{x-\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial p'}\cdot\frac{1}{x-\alpha'}\right)\partial y-\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\cdot\frac{y-\beta}{(x-\alpha)^2}+\frac{\partial\psi}{\partial p'}\cdot\frac{y-\beta'}{(x-\alpha')^2}\right)$$
$$-\frac{\partial\psi}{\partial p}\left(\frac{(x-\alpha)\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}-(y-\beta)}{(x-\alpha)^2}\right)\partial\alpha-\frac{\partial\psi}{\partial p'}\left(\frac{(x-\alpha')\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}-(y-\beta')}{(x-\alpha')^2}\right)\partial\alpha' = 0.$$

In dieser Gleichung verschwinden aber, in Folge der Gleichungen (I., II.), die Coëfficienten von $\partial\alpha$ und $\partial\alpha'$, d. i. der Ausdruck für den Differential-Coëfficienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist derselbe, man mag $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ als veränderlich oder als constant betrachten, und hieraus ergiebt sich der Satz:

3) Wenn zwei Tangenten an einer gegebenen Curve sich so bewegen, dafs sie mit einer festen Linie Winkel bilden, die auf irgend eine gegebene Weise von einander abhangen, so beschreibt der Durchschnittspunct P dieser Tangenten eine Curve von der Beschaffenheit, dafs ihre Berührungslinie im Puncte P mit der Berührungslinie derjenigen

Curve zusammenfällt, in welcher der Punct P liegen würde, wenn die beiden beweglichen Tangenten, statt sich an der gegebenen Curve fortzuschieben, sich um die, dem Puncte P entsprechenden Berührungspuncte der gegebenen Curve als feste Puncte drehten.

Aus diesem Satze läfst sich durch Betrachtung der Evolute der folgende herleiten:

4) Wenn zwei Normalen an einer gegebenen Curve sich so bewegen, dafs sie mit einer festen Linie Winkel bilden, die auf irgend eine gegebene Weise von einander abhangen, so beschreibt der Durchschnittspunct P dieser Normalen eine Curve von der Beschaffenheit, dafs ihre Berührungslinie im Puncte P mit der Berührunglinie derjenigen Curve zusammenfällt, in welcher der Punct P liegen würde, wenn die beiden beweglichen Normalen, statt sich auf der gegebenen Curve fortzuschieben, sich um die Krümmungs-Mittelpuncte derjenigen Puncte drehten, in welchen die Normalen durch den Punct P die gegebene Curve schneiden.

2.

Es seien $y=\varphi(x)$; $y=\varphi_1(x)$; . . . . $y=\varphi_n(x)$ die Gleichungen einer beliebigen Anzahl gegebener Curven, und von einem Puncte P der Ebene, welche diese Curven enthält, sei an jeder derselben eine Normale gezogen. Wenn nun die Längen dieser Normalen, vom Puncte P bis zu den Curven genommen, in einer nur durch eine einzige Gleichung ausgedrückten Relation stehen, so wird der Punct P eine Curve beschreiben. Nennt man die Coordinaten des Punctes P x und y; diejenigen der Puncte A, A', ... $A^{(n)}$, in welchen die genannten Curven von den Normalen geschnitten werden, $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, ... $\alpha^{(n)}\beta^{(n)}$; und u, u_1, ... u_n die Längen dieser Normalen, so hat man, aufser den Gleichungen $\beta=\varphi(\alpha)$, $\beta'=\varphi_1(\alpha)$, ... $\beta^{(n)}=\varphi_n(\alpha^{(n)})$, zur Bestimmung des Ortes von P die Gleichungen:

$$(a.)\quad (y-\beta)p+(x-\alpha)=0;\ (y-\beta')p'+(x-\alpha')=0;\ \ldots\ (y-\beta^{(n)})p^{(n)}+(x-\alpha^{(n)})=0,$$

$$(b.)\quad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=u^2;\ (y-\beta')^2+(x-\alpha')^2=u_1^2;\ \ldots\ (y-\beta^{(n)})^2+(x-\alpha^{(n)})^2=u_n^2,$$

$$(c.)\quad \psi(u, u_1, \ldots . u_n) = 0,$$

wo p, p', ... $p^{(n)}$ für $\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}$; $\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}$; .... $\frac{\partial\beta^{(n)}}{\partial\alpha^{(n)}}$ gesetzt sind, und ψ eine gegebene Function bedeutet. Entwickelt man nemlich aus den zuerst ge-

nannten Gleichungen die Gröfsen α, β, α', β', ... $\alpha^{(n)}$, $\beta^{(n)}$, und setzt sie in die letzte Gleichung:

$$\psi(u, u_1, \ldots . u_n) = 0,$$

so erhält man die Gleichung des Ortes von P in x und y ausgedrückt. Wenn man aber diese Gleichung differentiirt, so kommt:

$$(d.)\quad \begin{cases} \left[\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial y}\ldots .+\frac{\partial\psi}{\partial u_n}\cdot\frac{\partial u_n}{\partial y}\right]\partial y \\ +\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x}\ldots .+\frac{\partial\psi}{\partial u_n}\cdot\frac{\partial u_n}{dx}\right]\partial x \\ +\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial\alpha}\partial\alpha+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial\alpha'}\partial\alpha'\ldots .+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdot\frac{du_n}{\partial\alpha^{(n)}}\partial\alpha^{(n)}=0. \end{cases}$$

Es ist aber auch:

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=-\frac{1}{u}\left[(y-\beta)\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}+(x-\alpha)\right];\quad \frac{\partial u_1}{\partial\alpha'}=-\frac{1}{u_1}\left[(y-\beta')\frac{\partial\beta'}{\partial\alpha'}+(x-\alpha')\right];$$

$$\ldots .\quad \frac{\partial u_n}{\partial\alpha^{(n)}}=-\frac{1}{u_n}\left[(y-\beta^{(n)})\frac{\partial\beta^{(n)}}{\partial\alpha^{(n)}}+(x-\alpha^{(n)})\right],$$

also in Folge der Gleichungen ($a.$):

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=0;\quad \frac{\partial u_1}{\partial\alpha'}=0;\quad \ldots .\quad \frac{\partial u_n}{\partial\alpha^{(n)}}=0;$$

und es verschwinden demnach in der Gleichung ($d.$) die Coëfficienten von $\partial\alpha$, $\partial\alpha'$, ... $\partial\alpha^{(n)}$, so dafs der Ausdruck von $\frac{\partial y}{\partial x}$ derselbe ist, man mag $\alpha\beta$, $\alpha'\beta$, ... als veränderlich oder als constant betrachten. Wenn aber diese letztern Gröfsen als constant angesehen werden, drückt die Gleichung $\psi(u, u_,, \ldots . u_n)=0$ den Ort des Punctes P, für den Fall dafs A, A', ... $A^{(n)}$ feste Puncte sind, aus. Die Tangente im Puncte P des erstgenannten Ortes fällt demnach mit der Tangente desselben Punctes P im letztgenannten zusammen, und man kann daher den folgenden Satz aufstellen:

5) Wenn ein Punct P sich in einer Ebene so bewegt, dafs die Länge der Normalen, die von diesem Puncte an eine beliebige Anzahl gegebener, in derselben Ebene liegender Curven gezogen werden können, in einer bestimmten durch eine einzige Gleichung ausgedrückten Relation stehen, so ist der Ort des Punctes P so beschaffen, dafs die Tangente im Puncte P mit der Tangente derjenigen Curve zusammenfällt, in welcher der Punct P liegen würde, wenn die beweglichen Normalen statt sich auf den gegebenen Curven fortzuschieben, sich um die dem Puncte P entsprechenden Durchschnittspuncte A, A', ... $A^{(n)}$ drehten.

Um aus diesem allgemeinen Satze einige andere herzuleiten, wollen wir annehmen, der Punct P soll so liegen, dafs die Summe der Quadrate der Normalen eine gegebene constante Gröfse sei. Nach einem bekannten Satze ist nun der Ort des Punctes P, wenn die Puncte A, A', ... $A^{(n)}$ fest sind, ein Kreis, dessen Mittelpunct der Schwerpunct von A, A', ... $A^{(n)}$ ist, und hieraus haben wir nun unmittelbar den folgenden:

6) Wenn ein Punct P in einer Ebene sich so bewegt, dafs die Summe der Quadrate der Normalen, welche von diesem Puncte an eine oder mehrere Curven in derselben Ebene gezogen werden können, einer gegebenen constanten Gröfse gleich ist, so geht die Normale des Ortes von P durch den Schwerpunct derjenigen Puncte, in welchen die vom Puncte P an die gegebenen Curven gezogenen Normalen diese Curven schneiden.

Wir wollen ferner annehmen, die Summe (oder die Differenz) zweier Normalen, welche vom Puncte P aus an eine oder zwei gegebene Curven gezogen werden, sei constant. In diesem Falle ist der Ort des Punctes P, für constante Puncte A, A', eine Ellipse (oder Hyperbel) und A, A' ihre Brennpuncte. Daher:

7) Wenn ein Punct P sich in einer Ebene so bewegt, dafs die von diesem Puncte aus an eine oder zwei gegebene Curven gezogenen Normalen PA, PA' eine constante Summe (oder Differenz) bilden, so halbirt die Normale (oder Tangente) des Ortes von P den Winkel APA', welchen die beiden Normalen einschliefsen.

3.

Wenn nicht die Längen der Normalen, sondern die Längen der vom Puncte P aus an die Curven gezogenen Tangenten in einer bestimmten Relation stehen sollen, so ist die Lage der Berührungslinie im Puncte P nicht mehr von der Krümmung der gegebenen Curven in den Puncten A, A', ... $A^{(n)}$ unabhängig. Denn statt der Gleichungen (a.) hat man jetzt die Gleichungen:

(a'.) $(y-\beta)-p(x-\alpha)=0$; $(y-\beta')-p'(x-\alpha')=0$; .... $(y-\beta^{(n)})-p^{(n)}(x-\alpha^{(n)})=0$,

und in Folge dieser Gleichungen sind die Coëfficienten von $\partial\alpha$, $\partial\alpha'$, ... $\partial\alpha^{(n)}$ in der Gleichung (d.) nicht gleich Null. Setzt man aber für $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial x}$ die sich aus (b.) ergebenden Werthe $\frac{1}{u}(y-\beta)$ und $\frac{1}{u}(x-\alpha)$;

für $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, ... $\frac{\partial u_n}{\partial y}$, und für $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, ... $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ die analogen; ferner für $\partial\alpha$, $\partial\alpha'$, ... $\partial\alpha^{(n)}$ die sich aus (a'.) ergebenden $\frac{\partial y - p\partial x}{(x-\alpha)q}$; $\frac{\partial y - p'\partial x}{(x-\alpha')q'}$ etc., wo q, q' die Differential-Coëfficienten $\frac{\partial^2\beta}{\partial\alpha^2}$; $\frac{\partial^2\beta'}{\partial\alpha'^2}$ etc. bezeichnen, so erhält man aus (d.)

$$(d'.)\quad \left\{\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{1}{u}\left[y-\left(\beta+\frac{1+p^2}{q}\right)\right]+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdot\frac{1}{u_1}\left[y-\left(\beta'+\frac{1+p'^2}{q'}\right)\right]+....\right\}\partial y$$
$$+\left\{\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{1}{u}\left[x-\left(\alpha-\frac{(1+p^2)p}{q}\right)\right]+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdot\frac{1}{u_1}\left[x-\left(\alpha'-\frac{(1+p'^2)p'}{q'}\right)\right]+....\right\}\partial x=0,$$

oder, wenn man $\beta+\frac{1+p^2}{q}$, $\beta'+\frac{1+p'^2}{q'}$ etc.; $\alpha-\frac{(1+p^2)p}{q}$, $\alpha'-\frac{(1+p'^2)p'}{q'}$, welche nichts anders als die Coordinaten der Krümmungs-Mittelpuncte von A, A' etc. sind, durch δ, δ' etc.; γ, γ' etc. bezeichnet:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{1}{u}(y-\delta)+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdot\frac{1}{u_1}(y-\delta')+....\right]\partial y+\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{1}{u}(x-\gamma)+\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdot\frac{1}{u_1}(x-\gamma')+....\right]=0.$$

Ist z. B. die Summe der Quadrate der Tangenten eine constante Gröfse, so dafs man hat

$$\psi(u, u_1, ... u_n) = u^2 + u_1^2 + ... u_n^2 - c^2 = 0,$$

so ist

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{1}{u} = \frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdot\frac{1}{u_1} = ... = \frac{\partial\psi}{\partial u_n}\cdot\frac{1}{u_n} = 2,$$

und für diesen Fall entsteht aus der obigen Gleichung:

$$\left[y-\frac{\delta+\delta'+....+\delta^{(n)}}{n+1}\right]\partial y+\left[x-\frac{\gamma+\gamma'+....+\gamma^{(n)}}{n+1}\right]\partial x = 0.$$

Die Gleichung der Normale im Puncte xy des Ortes von P ist daher

$$Y-y = \frac{y-\frac{\delta+\delta'+....+\delta^{(n)}}{n+1}}{x-\frac{\gamma+\gamma'+....+\gamma^{(n)}}{n+1}}(X-x),$$

wenn die laufenden Coordinaten dieser Normale durch X, Y bezeichnet werden. Hieraus ist klar, dafs die Normale durch den Schwerpunct der Krümmungs-Mittelpuncte geht. Wir haben daher folgenden Satz:

8) Wenn ein Punct P sich in einer Ebene so bewegt, dafs die Summe der Quadrate der Tangenten PA, PA' etc., welche von diesem Puncte an eine oder mehrere in derselben Ebene liegende Curven gezogen werden, constant ist, so geht die Normale des Ortes von P durch den Schwerpunct der Krümmungs-Mittelpuncte von A, A' etc.

Es seien ferner nur zwei Tangenten von P aus gezogen und diese seien einander gleich, so hat man

$$\psi(u, u_1, \ldots u_n) = u - u_1 = 0;$$

daher $$\frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{u} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \cdot \frac{1}{u_1} = -\frac{1}{u},$$

folglich $$(\delta' - \delta)\,\partial y + (\gamma' - \gamma)\,\partial x = 0.$$

Die Gleichung der Normale ist also

$$Y - y = \frac{\delta' - \delta}{\gamma' - \gamma}(X - x),$$

und diese Linie mithin der Verbindungslinie der Krümmungs-Mittelpuncte parallel, oder

9) Der Ort der gleichen Tangente an einer oder zwei ebenen Curven ist so beschaffen, dafs die Tangente in einem Puncte P desselben, auf der Verbindungslinie der Krümmungs-Mittelpuncte der zugehörigen Berührungspuncte an den gegebenen Curven senkrecht steht.

4.

Wir haben oben gesehen, dafs die Lage der Berührungslinie im Puncte P unabhängig sei von der Krümmung der gegebenen Curven in den Puncten A, A' etc., es mag ψ eine Form haben, welche man will, wenn nemlich für den Fall der von P aus gezogenen Tangenten p, p' etc., oder was dasselbe ist, $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, $\frac{y-\beta'}{x-\alpha'}$ etc., und für den Fall der von P aus gezogenen Normalen, $\sqrt{[(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2]}$; $\sqrt{[(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2]}$ etc. die Functionalgröfsen in ψ sind. Es kann nun gefragt werden, welches die Functionalgröfsen in ψ sein müssen, wenn vom Puncte P aus gerade Linien an die gegebenen Curven gezogen werden, die diese unter irgend einem bestimmten Winkel schneiden, damit die Lage der Berührungslinie in P von den Krümmungen der gegebenen Curven in A, A' etc. unabhängig seien. Eine leichte Rechnung ergiebt für die Form dieser Functionalgröfsen im Allgemeinen:

$$e^{-\frac{1}{a}\operatorname{Arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{\gamma-\beta}{x-\alpha}\right)} \cdot \sqrt{[(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2]}, \quad \text{oder}$$

$$e^{-\operatorname{Arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{\gamma-\beta}{x-\alpha}\right)} \cdot [(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2]^{\frac{a}{2}},$$

wo a die trigonometrische Tangente des Winkels bedeutet, unter welchem die gegebenen Curven von den beweglichen geraden Linien geschnitten werden, und wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

17.

Observatio pertinens ad solutionem aequationum indeterminatarum secundi gradus.

(Auctore *Ferd. Minding*, Dr. phil.)

Aequatio $ax^2+2bxy+cz^2=\pm N$, cuius determinantem $A=b^2-ac$ positivum non quadratum supponimus, solvitur per integros inter se primos ope fractionis continuae, quae exprimit unam vel alteram ex radicibus aequationis quadratae: $av^2+2bv+c=0$. Evolutio radicis v ita fieri solet, ut fractio continua terminos negativos non contineat. Qua lege observata, demonstratur, si numerus N radicem quadratam determinantis A non excedat, solutionem aequationis propositae necessario aut nullam omnino esse, aut in periodo fractionis continuae v inveniri. — Cf. Legendre *Théorie des nombres*, §. XII.

Jam vero videamus, qualem usum praebeat methodus ab illa supra indicata paullulum discrepans, qua loco numeri integri maximi in quovis denominatore completo fractionis continuae obvii assumatur numerus integer ad denominatorem completum (qui est formae $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, designando per J et A numeros integros) proxime accedens, neglecto eo discrimine, utrum sit maior illo an minor.

Quod si hac lege evolvitur fractio continua, radicem v exhibens, sit denominator aliquis completus positive acceptus $=\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, numerus integer proxime accedens $=\alpha$, denominator insequens $\frac{\sqrt{D}+J'}{A'}$, iam erit $\frac{\sqrt{A}+J}{D}=\alpha+\frac{1}{\frac{\sqrt{A}+J'}{D}}$, unde fit:

$$J+J'=D\alpha\,.\,A=J'^2+DD'.$$

In his aequationibus D et D' non necessario paribus signis erunt praediti; facile tamen perspicitur, primum, fractionem continuam in forma proposita non minus quam in forma solita (ubi omnes terminos positivos habet) periodicam fore; deinde, quoniam in formae solitae periodo D minor est quam $2\sqrt{A}$, eandem legem etiam in forma proposita locum habere. Praeterea $\frac{\sqrt{A}+J}{D}$, neglecto signo, maior est quam 2, si fortasse primum terminum fractionis continuae v excipias.

Jam quia generaliter $\frac{\sqrt{A}+J}{D} = \alpha \pm w$, maior quam 2, indicante w fractionem minorem quam $\frac{1}{2}$, evenit:

$$\sqrt{A}+J = D\alpha \pm Dw, \text{ sive } \sqrt{A} = J' \pm Dw;\ J' = \sqrt{A} \mp Dw.$$

Unde, quia $Dw < \sqrt{A}$, sequitur J' positivum esse atque minorem quam $2\sqrt{A}$.

Ut exemplum huiusmodi evolutionis proponatur, eligamus numerum $\sqrt{97}$. Invenitur:

$$\begin{aligned}
\sqrt{97} &= 10 - \\
\frac{10+\sqrt{97}}{3} &= 7 - \\
\frac{11+\sqrt{97}}{8} &= 3 - \\
\frac{13+\sqrt{97}}{9} &= 3 - \\
\frac{14+\sqrt{97}}{11} &= 2 + \\
\frac{8+\sqrt{97}}{3} &= 6 - \\
\frac{10+\sqrt{97}}{1} &= 20 - \text{ etc. etc.}
\end{aligned}$$

$$\sqrt{97} = 10 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{6 - \cfrac{1}{20 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{3 - \text{etc.}}}}}}}}}$$

Designetur per $\frac{p}{q}$ valor approximatus radicis v, aequationi

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = \pm D$$

satisfaciens, in qua signum numeri positivi D, minoris quam $\sqrt{A}$, datum est; evolvatur $\frac{p}{q}$ in fractionem continuam, admissis terminis negativis; iam duo casus distinguendi sunt: prior, quo fractionis continuae $\frac{p}{q}$ denominator extremus est numerus integer maior quam 2; alter, quo est $= 2$.

Sit $\frac{p^\circ}{q^\circ}$ valor fractionis continuae, reiecto denominatore extremo, iam habetur in casu priori sine ambiguitate:

$$pq^\circ - qp^\circ \text{ aut } = +1 \text{ aut } = -1.$$

Fractio $\frac{p}{q}$ ut inter eas fractiones convergentes reperiatur, quae per evolutionem radicis v a nobis propositam prodeunt, conditio necessaria atque sufficiens haec est, ut denominator completus insequens z cadat extra limites $+2$ et -2.

Jam habetur $v = \frac{pz+p^\circ}{qz+q^\circ}$, sive $z + \frac{q^\circ}{q} = \frac{pq^\circ - qp^\circ}{q^2\left(\frac{p}{q} - v\right)}$.

In quam formulam si substituatur valor ipsius $\frac{p}{q} - v$, qui est

$$\pm\frac{1}{a}\left[\sqrt{\left(A\pm\frac{aD}{q^2}\right)}-\sqrt{A}\right]=\frac{\pm D}{\pm q^2.\sqrt{\left(A\pm\frac{aD}{q^2}\right)}+\sqrt{A}},$$

evenit:

$$z+\frac{q^\circ}{q}=pq^\circ-qp^\circ\pm\frac{\left[\sqrt{A}+\sqrt{\left(A\pm\frac{aD}{q^2}\right)}\right.}{\pm D}.$$

In hac formula signum ipsius D datum esse supponitur; signum autem numeratoris pendet a signo numeri $\sqrt{A}$ in ea radice v obvio, ad cuius valorem $\frac{p}{q}$ appropinquat.

Unde nanciscimur, neglecto termino $\pm\frac{aD}{q^2}$, qui quovis dato minor accipi potest, sine ambiguitate, aut:

$$z+\frac{q^\circ}{q}=+\frac{2\sqrt{A}}{D},\quad\text{aut}\quad z+\frac{q^\circ}{q}=-\frac{2\sqrt{A}}{D}.$$

Jam quia $q=q^\circ\mu\pm q^{\circ\circ}$, $\mu>2$, $q^{\circ\circ}<q^\circ$, necessario est $\frac{q^\circ}{q}$ fractio positiva minor quam $\frac{1}{2}$.

Igitur si $z=-\frac{2\sqrt{A}}{D}-\frac{q^\circ}{q}$, $D<\sqrt{A}$, $-z$ necessario est maior quam 2. Quod si vero

$$z=+\frac{2\sqrt{A}}{D}-\frac{q^\circ}{q},\quad\text{colligitur}\quad z>\frac{2\sqrt{A}}{D}-\tfrac{1}{2};$$

igitur si $\frac{2\sqrt{A}}{D}-\frac{1}{2}>2$, $D<\frac{4}{5}\sqrt{A}$, conditioni quaesitae satisfactum est.

Altero casu, quo fractionis continuae terminus extremus $=2$, requiritur ut z sit positivus ac maior quam 2. Jam autem hoc in casu valor τοῦ $pq^\circ-qp^\circ$ pro libitu accipi potest sive $=+1$, sive $=-1$. Praeterea, aeque ac in casu praecedente, habetur $z+\frac{q^\circ}{q}=pq^\circ-qp^\circ+\frac{2\sqrt{A}}{\pm D}$. Accipiatur $\frac{p^\circ}{q^\circ}$ ita, ut valor τοῦ $z+\frac{q^\circ}{q}$ fiat positivus, sive $z+\frac{q^\circ}{q}=+\frac{2\sqrt{A}}{D}$. Habetur $q=q^\circ.2\pm q^{\circ\circ}$, unde $\frac{q^\circ}{q}$ nisi est minor quam $\frac{1}{2}$, certe minor quam 1. Quare z erit positivus et maior quam 2, si $\frac{2\sqrt{A}}{D}-1>2$, vel $D<\frac{2}{3}\sqrt{A}$.

Unde concludimus:

Quando proposita aequatione indeterminata: $ax^2+2bxy+cy^2=\pm D$, in qua $A=b^2-ac$ numerus positivus non quadratus, D minor est quam $\frac{2}{3}\sqrt{A}$; evolutione alterutrius radicis v aequationis $av^2+2bv+c=0$ in fractionem continuam, admissis terminis negativis quam celerrime convergentem, semper decidi potest, utrum proposita solutionem per integros admittat nec ne.

Hoc theorema ad aequationes in quibus $D=1$ (quas maximi momenti esse constat), applicari semper fere potest, quia paucis casibus exceptis, $\sqrt{A}>\frac{3}{2}$.

18.

Auflösung einer astronomischen Aufgabe.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

Die Aufgabe: „Aus dreien gemessenen Höhen dreier Sterne und den Zeiten der Uhr die Zeit, Polhöhe nnd die unbekannte Collimation des Instruments zu finden," ist meines Wissens noch nicht aufgelöst worden; weswegen die folgende Auflösung einiges Interesse haben dürfte.

Nach einigen sehr bekannten Transformationen der gegebenen Grösen reducirt sie sich auf folgende sphärisch-trigonometrische Aufgabe: „Aus den Unterschieden der Entfernungen eines Puncts von den drei Spitzen eines gegebenen Dreiecks, die Lage dieses Punctes zu finden."

Es seien die drei Seiten des Dreiecks l, l', l''; die resp. gegenüberstehenden Winkel a, a', a''; und die Entfernungen von den resp. Winkelspitzen $z+\delta$, $z'+\delta$, $z''+\delta$, wo also δ unbekannt ist. Nennt man nun die Winkel zwischen l und $z'+\delta$, zwischen l und $z''+\delta$, zwischen $z+\delta$ und l' resp. x', x'', x, und bemerkt, dafs allgemein, wenn α, α', α'' die drei Seiten und A, A', A'' die gegenüberstehenden Winkel eines Dreiecks sind,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha''-\alpha'+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha''+\alpha'-\alpha)}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A,$$

so hat man, wenn man noch aufserdem setzt:

$$g = \frac{\sin\frac{1}{2}(l''-z'+z)}{\sin\frac{1}{2}(l''+z'-z)},$$

$$g' = \frac{\sin\frac{1}{2}(l-z''+z')}{\sin\frac{1}{2}(l+z''-z')},$$

$$g'' = \frac{\sin\frac{1}{2}(l'-z+z'')}{\sin\frac{1}{2}(l'+z-z'')},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a'+x) = g\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-x),$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x'' = g'\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x',$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = g''\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a''+x'').$$

Substituirt man die zweite dieser Gleichungen in die dritte, so ergiebt sich:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \frac{g''\operatorname{tang}\frac{1}{2}a''+g'g''\operatorname{tang}\frac{1}{2}x'}{1-g'\operatorname{tang}\frac{1}{2}a''\operatorname{tang}\frac{1}{2}x'}.$$

Aus der ersten findet man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x = \frac{g\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a'+x')}{g + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a'+x')}.$$

Macht man nun

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a'' &= m\sin M, & g\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a &= m'\sin M',\\ g' &= m\cos M, & -1 &= m'\cos M',\\ 1 &= n\sin N, & g &= n'\sin N',\\ -g'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a'' &= n\cos N, & \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a &= n'\cos N', \end{aligned}$$

so wird:

$$\frac{g''m\sin(M+\tfrac{1}{2}x')}{n\sin(N+\tfrac{1}{2}x')} = \frac{m'\sin(M'+\tfrac{1}{2}a'+\tfrac{1}{2}x')}{n'\sin(N'+\tfrac{1}{2}a'+\tfrac{1}{2}x')},$$

oder

$$\begin{aligned} &g''mn'[\cos(M-N'-\tfrac{1}{2}a') - \cos(M+N'+\tfrac{1}{2}a'+x')]\\ &= m'n[\cos(M'-N+\tfrac{1}{2}a') - \cos(M'+N+\tfrac{1}{2}a'+x')], \end{aligned}$$

setzt man daher:

$$\begin{aligned} g''mn'\cos(M+N') - m'n\cos(M'+N) &= h\cos H,\\ g''mn'\sin(M+N') - m'n\sin(M'+N) &= h\sin H, \end{aligned}$$

so erhält man

$$h\cos(h+\tfrac{1}{2}a'+x') = g''mn'\cos(M-N'-\tfrac{1}{2}a') - m'n\cos(M'-N+\tfrac{1}{2}a'),$$

wodurch also die Aufgabe gelöst ist, da nach der Bestimmung von x' die übrigen Grösen sich sehr leicht ergeben.

München, den 20. Februar 1831.

19.

Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes.

(Par MM. *Lamé* et *Clapeyron*, Colonels du Génie au service de Russie.)

Rapport

fait par MM. Poinsot et Navier à l'académie des sciences de Paris dans la séance du 29. Septembre 1828, sur un mémoire de MM. Lamé et Clapeyron, concernant l'équilibre intérieur des corps solides homogènes.

L'académie nous a chargés, M. Poinsot et moi, de lui rendre compte d'un mémoire présenté par MM. Lamé et Clapeyron, anciens élèves de l'École Polytechnique, ingénieurs des mines, actuellement au service de Russie. Ce mémoire, qui n'est pas le premier ouvrage qui lui ait été soumis par ces jeunes savans, a pour objet la recherche des conditions de l'équilibre des corps solides élastiques, lorsque ces corps sont exposés à l'action de diverses forces qui tendent à en changer la figure. On sait que les questions de ce genre ont attiré l'attention de plusieurs illustres géomètres, parmi lesquels on peut citer Leibnitz, Jacques Bernoulli, Euler et Lagrange. Néanmoins elles n'ont été traitées jusqu'à présent qu'en admettant certaines hypothèses qui conviennent seulement à des cas particuliers et fort restreints, et d'après lesquelles on n'a pu se former des notions suffisamment exactes et étendues sur la nature des phénomènes qui sont dus à cette propriété physique des corps solides désignée sous le nom d'élasticité. MM. Lamé et Clapeyron ont voulu traiter les mêmes questions d'une manière générale, et exprimer au moyen du calcul les loix de ces phénomènes, qui sont du domaine de la physique et de l'art des constructions, et qu'il importe beaucoup aux ingénieurs de connaitre et d'apprécier avec précision.

Les recherches de ce genre, dont on trouve des modèles dans les théories du mouvement des fluides et de la distribution de la chaleur, comprennent ordinairement deux parties principales. On exprime d'abord par les formules analytiques des conditions générales qui conviennent à un corps d'une figure arbitraire, sollicité par des forces également indétermi-

nées; conditions qui dépendent seulement des loix connues de l'équilibre des forces, et de la nature physique du système que l'on considère. Il faut ensuite particulariser ces résultats généraux, en les appliquant aux divers cas qui peuvent se présenter, et obtenir, pour chacun de ces cas, la connaissance des effets qui sont l'objet de la recherche, en ayant égard en même temps aux conditions générales, à la figure particulière du corps, et aux forces données auxquelles il est soumis. Si l'on veut employer les expressions usitées par les géomètres, les deux opérations que nous venons d'indiquer consistent dans la recherche des équations différentielles propres à la question, et dans l'intégration de ces équations.

Quant à l'établissement des équations différentielles destinées à représenter les conditions générales de l'équilibre des parties des solides élastiques MM. Lamé et Clapeyron ont admis le même principe, et procédé de la même manière que l'un de nous l'avait fait dans un mémoire qui a été présenté à l'Académie en 1821, publié par extrait dans le *Bulletin des sciences de la société philomatique* en 1822, et imprimé en entier l'année dernière dans le tome VII. de nos mémoires. Ils parviennent à des équations semblables à celles qui avaient été données dans cet écrit. On doit seulement remarquer qu'ils ont déduit directement du principe dont il s'agit les équations déterminées relatives aux points de la surface du corps, et qui font connaître aussi les pressions ou tensions intérieures; tandis que, dans le mémoire de 1821, ces équations avaient été obtenues par les méthodes de la mécanique analytique. Nous sommes obligés de rappeler ici que ce dernier mémoire contient la première idée de la question, et les fondements des recherches relatives aux corps élastiques. MM. Lamé et Clapeyron n'en faisant aucune mention, on doit penser qu'ils n'en avaient pas connaissance, et qu'ils sont parvenus de leur côté aux mêmes résultats. Ils ont d'ailleurs poursuivi avec succès le genre de recherches qui étoit l'objet de cet écrit.

Les auteurs nomment dilatation le rapport de la variation que subit le volume d'un élément du corps par l'effet du changement de figure, au volume primitif ou naturel de cet élément. Ils donnent l'expression de ce rapport en fonction des déplacemens des molécules, et une équation différentielle générale à laquelle cette expression doit satisfaire. On remarque que cette équation, dans le cas particulier où les forces appliquées aux points intérieurs du corps sont constantes ou nulles, ne diffère pas de

l'équation à laquelle doit satisfaire l'expression de la température des points d'un corps solide, lorsque le mouvement de la chaleur est devenu constant, et que cette température ne varie plus avec le tems.

MM. Lamé et Clapeyron ont étudié les loix générales des déplacements des molécules intérieures des corps élastiques, et des pressions ou tensions qui s'établissent entre leurs parties. Ils ont reconnu, d'une part qu'un élément du volume, dont la figure serait, dans l'état naturel du corps, une sphère d'un rayon très petit, se changeait toujours en un ellipsoïde; d'autre part, qu'il existoit toujours parmi les pressions intérieures trois pressions principales perpendiculaires entre elles, données par les racines d'une équation du troisième degré, et qui correspondent aux demi-diamètres d'un autre ellipsoïde construit sur les mêmes axes que le premier. Les rayons vecteurs de ce dernier ellipsoïde représentent les pressions qui ont lieu autour du centre dans toutes les directions. Il existe de plus une troisième surface du second degré, construite sur les mêmes axes que ces deux ellipsoïdes, et telle que si l'on mène à cette surface un plan tangent, le rayon vecteur dirigé sur le point de tangence, et considéré comme appartenant au second ellipsoïde, représente la pression ou tension qui est exercée au centre commun sur un élément superficiel parallèle à ce plan tangent. Le mémoire contient les équations de ces surfaces, et la discussion des cas où les parties du corps étant pressées dans tous les sens, ou tirées dans un sens et pressées dans un autre, la dernière surface du second degré est un ellipsoïde, ou la réunion de deux hyperboloïdes conjuguées à une et à deux nappes. On voit ici des effets assujettis à la loi de continuité liés entre eux, et représentés au moyen des propriétés des surfaces du second degré. Ces résultats, dont diverses théories appartenant à la géométrie et à la mécanique ont déjà donné des exemples, ont l'avantage de faire connaître completement, et sous des formes que l'esprit saisit avec facilité, les modifications subies par les parties intérieures des corps.

La partie des *Exercices de mathématiques* de Mr. Cauchy qui a été publiée l'année dernière contient plusieurs propositions relatives aux pressions intérieures qui ont lieu dans un corps solide, analogues aux précédentes, et dont quelques-unes avaient été données antérieurement par Mr. Fresnel. MM. Lamé et Clapeyron remarquent que la théorie exposée dans leur ouvrage diffère essentiellement de celle qu'avait adoptée

Mr. Cauchy. Nous nous abstenons de parler des recherches qui ont été publiées après la présentation du mémoire qui est l'objet de ce rapport.

Après avoir donné les équations et les propositions générales qui appartiennent à la théorie des corps élastiques, les auteurs traitent diverses questions spéciales. Ils considèrent successivement un prisme soumis à une pression extérieure constante, et tiré dans le sens de sa longueur; un corps de forme quelconque pressé extérieurement; un cylindre soumis également à une pression extérieure constante, et tordu par des forces appliquées aux extrémités, que l'on suppose infiniment éloignées; un cylindre creux pressé en dehors et en dedans avec des forces différentes; une sphère pleine, dont tous les points s'attirent en raison inverse du quarré des distances; enfin une sphère creuse soumise en dedans et en dehors à des pressions inégales. Les solutions de ces questions dans lesquelles les déplacemens des points sont donnés par des expressions très simples, et qui se présentent en quelque sorte d'elles-mêmes, offrent les moyens de déterminer de plusieurs manières, d'après les résultats des expériences connues, la valeur d'une constante qui entre dans toutes les formules, et qui peut réprésenter l'intensité de la résistance que les corps de chaque espèce opposent au changement de figure. Ces solutions conduisent à diverses conséquences remarquables. On trouve, par exemple, que lorsque la pression intérieure qui a lieu dans un cylindre creux (qui est supposé d'une longueur infinie) dépasse une certaine limite, il n'est pas possible, quelle que soit l'épaisseur donné à ce cylindre, de le rendre capable de résister à la rupture. Dans le cas d'une sphère pleine dont les points s'attirent en raison inverse du quarré des distances, on trouve qu'au centre la pression intérieure est égale au poids qu'auroit à la surface de la sphère une colonne de la matière dont cette sphère est formée, la longueur de cette colonne étant les $\frac{11}{30}$ du rayon. A une petite profondeur au dessous de la surface, la pression dans le sens du plan tangent est égale au poids d'une semblable colonne dont la hauteur seroit les $\frac{2}{15}$ du rayon de la sphère. Les parties d'un semblable globe voisines de la surface sont donc comprimées latéralement avec une force extrêmement grande comparativement au poids de la colonne de matière dont elles sont chargées dans le sens du rayon.

MM. Lamé et Clapeyron ont reservé pour le dernier chapitre de leur mémoire plusieurs questions dont la solution comporte une ana-

lyse d'un ordre plus élevé. Ils s'occupent en premier lieu d'un corps cylindrique pesant, d'une longueur infinie, aux points de la surface duquel sont appliquées des forces distribuées d'une manière arbitraire; puis d'un espace solide d'une étendue indéfinie terminée par un plan ou par deux plans parallèles, en supposant également des forces quelconques appliquées aux points des plans qui forment la surface des corps. La première de ces recherches donne une solution générale des problèmes de la tension et de la torsion d'un corps cylindrique. La seconde conduit à une relation remarquable, et fort simple, entre la condensation et la dilatation qui a lieu près de la surface d'un corps solide, et la pression ou tension appliquée à cette surface, et qui est la cause de l'effet dont il s'agit. On voit reparaître dans ces recherches les formes analytiques au moyen desquelles les questions les plus difficiles de la théorie de la chaleur ont été résolues, et qui semblent destinées désormais à donner aux géomètres les expressions des loix mathématiques des phénomènes naturels les plus importants et les plus divers.

La théorie qui est l'objet de ce mémoire est nouvelle. Cette théorie a depuis quelque tems attiré l'attention de plusieurs géomètres, qui ont présenté sur ce sujet des notions qui ne s'accordent pas entièrement entre elles. Quant aux principes adoptés par les auteurs l'opinion de l'un de vos commissaires, au moins, ne peut être douteuse à cet égard, puisque ces principes ne diffèrent point de ceux qu'il avoit établis depuis longtems dans un écrit, dont il a été question ci dessus. Cependant, comme le tems et l'assentiment général sont nécessaires pour fixer entièrement les idées sur des objets de cette nature, il ne conviendroit pas de proposer ici à l'académie de prononcer sur ce point un jugement positif. Mais, nonobstant cette reserve, nous n'hésiterons pas à reconnaître un mérite distingué dans le travail de MM. Lamé et Clapeyron, et à demander que ce travail soit approuvé par l'académie, et imprimé dans le recueil des savans étrangers. Signé à la minute: Poinsot, Navier, rapporteur.

L'Académie adopte les conclusions de ce rapport.

Certifié conforme:

Le sécrétaire perpétuel pour les sciences mathématiques.

B^on^. Fourier.

Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides.

Introduction.

1.

Les géomètres qui ont étudié la théorie de l'équilibre des corps solides, se sont bornés jusqu'ici à la recherche des relations qui doivent exister entre les forces qui leur sont appliquées, pour qu'elles se contre-balancent exactement. La nature de ces relations est indépendante de la constitution intime du corps; elles résultent de ce que la distance relative des points d'application est supposée invariable.

Mais cette manière d'envisager la question, laisse dans une ignorance complette sur la loi suivant laquelle se transmet, d'un point à l'autre d'un corps solide, l'influence réciproque en vertu de laquelle l'action de l'une des forces est détruite par celle de toutes les autres. L'étude de ce phénomène est pourtant d'une grande importance, puisque nous voyons que, lorsque les forces qui se font équilibre, acquièrent un degré suffisant d'intensité, le corps solide, après avoir changé de forme d'une manière plus ou moins sensible, finit par se briser.

Les ingénieurs, dans la pratique de leur art, devant proportionner la force de leurs constructions, aux efforts qu'elles doivent supporter, ont sans cesse à s'occuper de considérations de ce genre; aussi ont elles fixé depuis longtems l'attention des géomètres, et la science s'est successivement enrichi de formules importantes sur la résistance des solides; mais toutes celles qui sont parvenues à notre connaissance, fondées sur des hypothèses plus ou moins gratuites, et présentées comme l'expression empyrique des expériences faites par leurs auteurs, occuperaient dans une théorie complette de l'équilibre des corps solides, la place qu'on pourroit assigner aux formules usitées sur le jaugeage des eaux courantes, parmi les loix générales de l'hydrostatique, c'est-à-dire qu'elles seront longtems utiles aux gens de l'art mais qu'une théorie rigoureuse doit leur servir de base.

2.

Un corps solide peut être considéré comme le lieu géométrique d'un nombre infini de points materiels, qui se distinguent du reste de l'espace par plusieurs propriétés, parmi lesquelles nous citerons celles qui ont trait aux phénomènes mécaniques dont nous recherchons la loi.

Lorsqu'un corps solide est à l'état de repos, les points matériels qui le composent, sont sollicités par des forces ou nulles, ou qui se font équilibre; mais lorsqu'on exerce une pression à sa surface, celle-ci entre en mouvement, l'ébranlement se communique aux molécules intérieurs, le corps solide se déforme légèrement, et se constitue bientôt dans un nouvel état d'équilibre. Ce phénomène, sensible dans certains corps, exige des instruments très délicats pour être reconnu dans d'autres, mais il existe pour tous.

Les points matériels placés à la surface, et qui reçoivent l'action immédiate de la pression, transmettent cette pression aux molécules intérieures du corps solide, et éprouvent de leur part une pression égale, qui maintient l'équilibre; ces nouvelles molécules exercent sur des molécules, placées à une plus grande distance de la surface, une action analogue à celle que les molécules de la surface exercent sur elles. Ainsi se propage, suivant une loi inconnue, la pression exerçée à la surface, jusqu'à ce qu'elle soit détruite par un obstacle contre lequel s'appuie le corps solide.

Si la pression extérieure cesse, tout rentre dans l'état primitif, et les pressions intérieures cessent en même tems.

3.

Soit, par exemple, un corps cylindrique, aux deux bases duquel on applique des tractions égales et opposées, il s'alonge légèrement, et l'équilibre se rétablit ensuite. La traction exercée aux extrémités s'est propagée dans l'intérieur du cylindre, d'une extrémité à l'autre: en effet, si l'on imagine une section perpendiculaire aux arêtes, il est nécessaire, pour le nouvel état de l'équilibre, que la partie du corps placée d'un côté de la section, attire celle qui est placée de l'autre côté, et soit attirée par elle par une force égale à la traction exercée aux extrémités.

Si celle ci étoit remplacée par une compression, le cylindre, au lieu de s'alonger, se raccourcirait, et la partie du corps placée d'un des côtés de la section, exercerait sur l'autre, et éprouverait de sa part, une force répulsive égale à la pression qui s'exerce sur les deux extrémités.

Enfin, si l'on fait cesser les tractions ou les pressions extérieures, les attractions ou répulsions intérieures cessent également, et le cylindre reprend sa forme primitive.

4.

Les changemens de forme d'un corps solide, c'est-à-dire les variations dans les distances respectives des points matériels qui le compo-

sent, sont donc toujours accompagnés du développement de forces attractives ou répulsives, entre les parties qui le composent; elles naissent, croissent et s'annullent ensemble; ces variations et ces forces sont donc dans une dépendance mutuelle.

Or les propriétés d'un corps solide, ne devant dépendre que de celles des points matériels qui le composent, eux seuls peuvent être considérés comme les foyers d'où émanent les forces dont nous venons de parler; se rappelant en outre que les tractions, exercées sur les extrémités d'un cylindre, donnent naissance à une force attractive dans le sens où les points matériels s'éloignent les uns des autres; et qu'au contraire, une compression donne lieu à une force répulsive, dans le sens où ces points se rapprochent, on est conduit rigoureusement au résultat important dont l'énoncé va suivre, et qui est le fondement de notre théorie.

5.

Un corps solide en repos, homogène dans toutes ces parties, à la surface duquel ne s'exerce aucune pression, et dont les molécules ne sont sollicitées par aucune force accélératrice, est le lieu d'un nombre infini de points matériels, équidistants, infiniment rapprochés, mais qui ne se touchent pas, et qui jouissent les uns à l'égard des autres de la propriété suivante:

Si en vertu d'une pression extérieure ou d'une force accélératrice qui vient à naître tout-à-coup, deux points pris au hazard se rapprochent ou s'éloignent l'un de l'autre, il en résulte entre ces deux molécules une action ou force répulsive dans le premier cas, et attractive dans le second, qui est une fonction de la distance primitive des deux points et de l'écartement, c'est-à-dire de la quantité dont ils se sont rapprochés ou éloignés.

Cette fonction pour un même corps est nulle, quelle que soit la distance, lorsque l'écartement est nul; elle décroit très rapidement, quel que soit l'écartement, quand la distance augmente, en sorte que cette fonction devient insensible, dès que la distance acquiert une valeur sensible, car toute adhésion cesse entre deux parties d'un même corps séparées l'un de l'autre par une distance appréciable.

Selon que cette fonction variera plus ou moins rapidement avec l'écartement, une même pression produira un changement de forme, moins sensible dans le premier cas, et plus sensible dans le second; le premier

est celui des corps rigides, tels que les pierres, les métaux; le second est celui des corps élastiques tels que le caoutchouk.

6.

La théorie qui va suivre s'applique au cas où le changement de forme, résultant de l'action des pressions extérieures, ou des forces accélératrices, est très petit; soit que ces pressions ou ces forces soient elles-mêmes très petites, soit que le corps que l'on considère ait une grande rigidité. Alors la fonction de l'écartement et de la distance primitive, qui représente l'attraction ou la répulsion, se réduit au produit de la première puissance de l'écartement, multipliée par une fonction de la distance primitive, qui, ainsi que nous l'avons remarqué, est insensible dès que la distance acquiert une valeur appréciable.

Première section. Equations différentielles.

7.

Soient x, y, z les coordonnées orthogonales du lieu occupé par le centre de gravité d'une molécule quelconque M, située dans l'intérieur d'un corps solide homogène; si des forces accélératrices ou des pressions, variables d'une molécule à une autre, viennent à troubler l'homogénéité de ce corps, chaque molécule M s'éloignera de sa première position, en décrivant un espace dont les projections u, v, w seront variables d'une molécule à l'autre. Le problème général dont on s'occupe dans ce mémoire, consiste à déterminer les fonctions u, v, w de x, y, z, lorsque les circonstances qui ont troublé l'homogénéité sont données, et que le corps soit assez peu déformé, pour que l'on puisse considérer, dans toute son étendue, u, v, w, comme très petits par rapport aux dimensions de ce corps.

8.

En exprimant qu'une molécule quelconque M, dans sa nouvelle position, est en équilibre, c'est-à-dire que toutes les forces attractives ou répulsives, qui naissent du changement de position de cette molécule M, relativement à toutes les autres molécules du corps, font équilibre à la force accélératrice, ayant pour composantes orthogonales X_1, Y_1, Z_1, et qui agit sur cette même molécule, on est conduit aux trois équations différentielles:

$$A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial x}\right)+X_1=0,$$

$$A\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial y}\right)+Y_1=0,$$

$$A\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial z}\right)+Z_1=0,$$

A étant un coëfficient constant pour un même corps.

Telles sont les équations générales du problème proposé. (Voyez pour leur démonstration la note première (§. 15. 16. 17.) à la fin de cette première section.)

9.

La densité du corps proposé augmente ou diminue en chacun de ses points, lorsqu'il passe de l'état d'équilibre homogène au nouvel état d'équilibre que nous considérons. Or si l'on désigne par θ le rapport de l'accroissement d'un volume infiniment petit $(\partial x\,\partial y\,\partial z)$, occupé par un certain nombre de molécules, à ce volume lui même; cette quantité θ, qu'on peut appeler la dilatation, sera variable d'un point à un autre; de plus elle sera liée aux fonctions u, v, w par l'équation:

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z};$$

(voyez §. 18. la note seconde). Les parties du corps où cette fonction θ sera positive se seront dilatées; celles pour lesquelles θ sera négative se seront contractées; enfin le lieu de tous les points où la densité du corps n'aura pas changé ou sera restée la même que dans le cas de l'homogénéité, sera représenté par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

10.

Les équations (1.) pouvant s'écrire ainsi:

$$3.\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{X_1}{A}=0,$$

$$3.\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{Y_1}{A}=0,$$

$$3.\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{Z_1}{A}=0,$$

on obtient en les différentiant, la première par rapport à x, la seconde

par rapport à y, la troisième par rapport à z, et les ajoutant:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\frac{1}{3A}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial Y_1}{\partial y}+\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)=0.$$

Cette équation pourra servir à déterminer directement θ, ou la loi de la dilatation, lorsque les composantes X_1, Y_1, Z_1 seront données en x, y, z.

Lorsque la force accélératrice agissant sur chaque molécule sera constante dans toute l'étendue du corps, et y aura constamment la même direction, ce qui comprend le cas d'un corps pesant, situé à la surface de la terre, et peu étendu relativement au rayon terrestre, l'équation précédente se réduit à:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0.$$

On conclût de là que les dilatations ou contractions qu'un corps solide, homogène et pesant, éprouve intérieurement, lorsque sa surface est soumise à des pressions quelconques, mais non assez fortes pour le déformer d'une manière très sensible, satisfont à l'équation différentielle qui lie les températures permanentes des différents points d'un corps solide, exposé à des foyers constants de chaleur, ou même les dilatations ou contractions qui doivent résulter de ces températures.

11.

Pour intégrer généralement les équations du §. 8., il convient de chercher d'abord l'intégrale générale θ (§. 10.), et de la substituer dans ces équations, mises sous la forme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2.\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{X_1}{A}=0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2.\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{Y_1}{A}=0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2.\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{Z_1}{A}=0;$$

on intégrera ensuite généralement ces équations différentielles, et il ne restera plus qu'à exprimer que les valeurs générales de u, v, w, θ, satisfont à l'équation:

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ces intégrations n'offrent par elles mêmes aucune difficulté nouvelle; mais les fonctions arbitraires qui entreront dans les intégrales générales obtenues, doivent être déterminées d'après les conditions données du nouvel état d'équilibre, et cette détermination exige des recherches particuliè-

res. Pour la faciliter il convient d'envisager la question sous un autre point de vue, et de démontrer les équations du §. 8. d'une autre manière.

12.

Imaginons un plan P, parallèle au plan coordonné des yz, situé à une distance x de ce dernier, et coupant le corps solide proposé. Considérons un cylindre très délié, situé en deça du plan P, ayant une base très petite w sur ce plan, et ses arêtes parallèles aux x; les molécules du corps situées au delà du plan P, ayant changé de position relativement à toutes les molécules situées en deça dans l'intérieur du cylindre à base w, il naîtra de ces changemens des forces attractives ou répulsives, qui tendront à déplacer le cylindre; si l'on désigne par wX, wY, wZ les composantes de la résultante de ces actions, on trouve, en se fondant sur les principes précédemment développés:

$$X = A\left(3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),\quad Y = A\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad Z = A\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right);$$

A étant toujours un coëfficient numérique dépendant de la nature du corps. Si les composantes wX, wY, wZ sont positives, c'est que le cylindre tend à être entrainé dans le sens des x, y, ou z positifs; si elles sont négatives au contraire, c'est que ce cylindre tend à marcher du côté des x, y, z négatifs. On pourra dire que dans le premier cas la portion du corps située au delà du plan P attire la base w, et que dans le second elle la presse ou la repousse. (Voyez la note 3. (§. 19. et 20.) pour la démonstration des équations précédentes.)

13.

Si le plan P est parallèle au plan des zx, et situé à une distance y de l'origine, que le cylindre à base w ait ses arêtes parallèles aux y, et que wX', wY', wZ' représentent les composantes de la résultante des actions exercées sur les molécules intérieures à ce cylindre, par toutes celles situées au delà du plan P, on trouve pareillement:

$$X' = A\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad Y' = A\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),\quad Z' = A\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Enfin si le plan P est parallèle au plan de xy, et situé à une distance z de l'origine, que le cylindre ait ses arêtes parallèles aux z, et que wX'', wY'', wZ'' représentent les composantes de la résultante des actions exercées sur le cylindre par les molécules du corps situées au dessus du plan P, on trouve:

$$X''=A\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad V''=A\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad Z''=A\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+3\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

On trouverait les mêmes valeurs, mais affectées de signes contraires, si, dans ces trois cas différens, on supposait que le cylindre, s'appuyant toujours sur la même base w, fut situé au dessus du plan P, et que l'on cherchât les actions exercées sur ce cylindre, par les molécules situées au dessous de ce plan.

14.

Les équations des paragraphes précédens conduisent aux équations différentielles du §. 8. Pour le faire voir, considérons, dans l'intérieur du corps proposé, un parallelepipède hkl, dont les cotés h, k, l soient parallèles aux axes coordonnés et très petits; les molécules intérieures à ce parallèlepipède, ayant changé de position relativement à toutes les autres molécules du corps, ces changemens ont fait naître des attractions ou des répulsions, tendant à faire mouvoir le parallèlepipède, et faisant équilibre aux forces accélératrices, étrangères au corps, qui peuvent lui être appliquées; proposons nous de chercher les équations qui expriment que cet équilibre a lieu.

Représentons par x, y, z les coordonnées du sommet du prisme hkl, le plus voision de l'origine, et soient x', y', z' les coordonnées courantes; la portion du corps, inférieure au plan $x'=x$, exercera sur la base kl du prisme, située dans ce plan, une traction ou pression ayant pour composantes klx, kly, klz; la portion du corps supérieuré au plan $x'=x+h$ exercera sur la surface kl du prisme située dans ce plan, une traction ou pression ayant pour composante $\left(X+\frac{\partial X}{\partial x}h\right)kl$, $\left(Y+\frac{\partial Y}{\partial x}h\right)kl$, $\left(Z+\frac{\partial Z}{\partial x}h\right)kl$; ainsi la résultante des actions exercées sur les deux bases kl du parallèlepipède hkl, aura pour composantes:

$$\frac{\partial X}{\partial x}hkl,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}hkl,\quad \frac{\partial Z}{\partial x}hkl;$$

on trouvera de la même manière que les actions exercées sur les deux faces hl, ont pour composantes:

$$\frac{\partial X'}{\partial y}hkl,\quad \frac{\partial Y'}{\partial y}hkl,\quad \frac{\partial Z'}{\partial z}hkl;$$

et qu'enfin les actions exercées sur les deux faces hk conduisent aux composantes:

$$\frac{\partial X''}{\partial z}hkl,\quad \frac{\partial Y''}{\partial y}hkl,\quad \frac{\partial Z''}{\partial z}hkl.$$

Toutes ces tractions ou pressions font équilibre aux résultantes des forces accélératrices agissant sur le parallèlepipède hkl, et qui sont:

$$X_1 hkl, \quad Y_1 hkl, \quad Z_1 hkl;$$

on a donc nécessairement les trois équations:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X'}{\partial y} + \frac{\partial X''}{\partial z} + X_1 = 0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial Y''}{\partial z} + Y_1 = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z'}{\partial y} + \frac{\partial Z''}{\partial z} + Z_1 = 0,$$

Si l'on substitue dans ces dernières équations les valeurs de X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z'', trouvées précédemment (§. 12. et 13.), elles deviennent identiques avec les équations du §. 8.

Note première. Démonstration des équations différentielles.

15.

Soient M et M' deux molécules très voisines l'une de l'autre, d'un corps solide homogène, occupant, avant toute espèce de dérangement de la part de forces accélératrices ou de pressions extérieures, les points dont les coordonnées, rapportées à trois axes rectangulaires, sont x, y, z, x', y', z'; soit z leur distance. Si des forces accélératrices ou des pressions extérieures viennent à agir sur le corps, chacune des deux molécules M et M' décrira des espaces très petits, dont les projections sur les trois axes seront u, v, w pour le premier, u', v', w' pour le second. Après ce mouvement, et lorsque le nouvel état d'équilibre sera rétabli, les deux molécules M et M' occuperont des points m et m'; appelant alors $\triangle z$ la quantité très petite dont elles se seront écartées, il naîtra entr'elles une force attractive égale à la somme de leurs masses, multipliée par $\triangle z$, et par une fonction de la distance primitive ζ, ou $F(\zeta)$, assujétie à devenir insensible, dès que ζ acquiert une valeur appréciable.

La distance MM' ou ζ, avoit pour projections sur les trois axes $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$; la distance mm' ou $\zeta+\triangle\zeta$ aura pour projections: $x'-x+u'-u$, $y'-y+v'-v$, $z'-z+w'-w$. Si par le point m on mène une droite $m\mu'$, égale et parallèle à MM', la distance $\mu' m'$ aura évidemment pour projections $u'-u$, $v'-v$, $w'-w$; or en vertu de la petitesse des mouvements Mm, $M'm'$, relativement à $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, la ligne mm', peut être considérée comme faisant un angle infiniment pe-

tit avec MM ou $m\mu'$, car les cosinus $\frac{x'-x+u'-u}{\zeta+\Delta\zeta}$, $\frac{y'-y+v'-v}{\zeta+\Delta\zeta}$, $\frac{z'-z+w'-w}{\zeta+\Delta\zeta}$, des angles formés avec les axes par la direction mm', diffèrent très peu des cosinus $\frac{x'-x}{\zeta}$, $\frac{y'-y}{\zeta}$, $\frac{z'-z}{\zeta}$ des angles correspondans à la direction MM' ou $m\mu'$; il suit delà que la différence des distances $m\mu'$ ou ζ, et mm' ou $\zeta+\Delta\zeta$ peut être considérée comme égale à la projection de $\mu' m'$ sur mm' ou sur MM', puisque ces deux lignes peuvent être considérées comme parallèles. On aura donc $\Delta\zeta$, en multipliant respectivement les projections $u'-u$, $v'-v$, $w'-w$, de $\mu' m'$, par les cosinus des angles que MM' fait avec les axes; ainsi on peut poser:

$$\Delta\zeta = (u'-u)\frac{x'-x}{\zeta} + (v'-v)\frac{y'-y}{\zeta} + (w'-w)\frac{z'-z}{\zeta}.$$

16.

Soient $x'-x=h$, $y'-y=k$, $z'-z=l$; h, k, l seront des quantités insensibles, puisque la distance $M'M$ est très petite; or u', v', w' n'étant autre chose que ce que deviennent u, v, w, lorsqu'on substitue dans ces fonctions $x+h$, $y+k$, $z+l$, au lieu de x, y, z, on aura, d'après le théorème de **Taylor**:

$$u'-u = \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k + \frac{\partial u}{\partial z}l + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{h^2}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\cdot\frac{k^2}{2} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z^2}\cdot\frac{l^2}{2}$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}hk + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}kl + \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}lh + \text{etc.},$$

et de la même manière:

$$v'-v = \frac{\partial v}{\partial x}h + \frac{\partial v}{\partial y}k + \frac{\partial v}{\partial z}l + \text{etc.},$$
$$w'-w = \frac{\partial w}{\partial x}h + \frac{\partial w}{\partial y}k + \frac{\partial w}{\partial z}l + \text{etc.}$$

Ces valeurs substituées dans $\Delta\zeta$, donneront cette quantité en fonction des accroissemens variables h, k, l et des coëfficiens différentiels de u, v, w, qui pourront être regardés comme constants lorsque h, k, l varieront.

La force qui agit sur la molécule m pour la ramener vers m', a donc pour composantes suivant les trois axes:

$$\left[(u'-u)\frac{h}{\zeta} + (v'-v)\frac{k}{\zeta} + (w'-w)\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta)\frac{h}{\zeta},$$
$$\left[(u'-u)\frac{h}{\zeta} + (v'-v)\frac{k}{\zeta} + (w'-w)\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta)\frac{k}{\zeta},$$
$$\left[(u'-u)\frac{h}{\zeta} + (v'-v)\frac{k}{\zeta} + (w'-w)\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta)\frac{l}{\zeta},$$

Pour simplifier nous pourrons supposer que les masses des molécules M et M' entrent comme facteurs dans $F(\zeta)$, puisque ne considérant que des corps homogènes, nous n'aurons jamais besoin de dégager ce facteur constant.

La force dont nous venons d'évaluer les projections n'est pas la seule qui agisse sur la molécule M, suivant la direction MM' et à distance ζ; si l'on considère la molécule M'' située sur $M'M$, à une distance $M''M = \zeta$ de l'autre coté du point M, la distance $M''M$ ayant changé, et étant devenue $\zeta + \Delta\zeta$, il en résultera une force nouvelle, qui tendra à faire marcher M vers M'', et qui aura pour composantes:

$$-\left[(u-u'')\frac{h}{\zeta}+(v-v'')\frac{k}{\zeta}+(w-w'')\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta)\frac{h}{\zeta},$$

$$-\left[(u-u'')\frac{h}{\zeta}+(v-v'')\frac{k}{\zeta}+(w-w'')\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta)\frac{k}{\zeta},$$

$$-\left[(u-u'')\frac{h}{\zeta}+(v-v'')\frac{k}{\zeta}+(w-w'')\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta)\frac{l}{\zeta},$$

u'', v'', w'' étant ce que deviennent, lorsqu'on y change x, y, z en $x-h$, $y-k$, $z-l$.

En vertu des actions réunies des molécules M' et M'' sur M, elle tendra à marcher dans la direction MM', en vertu d'une force dont les composantes seront:

$$\left[(u+u''-2u)\frac{h}{\zeta}+(v'+v''-2v)\frac{k}{\zeta}+(w'+w''-2w)\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta)\frac{h}{\zeta},$$

$$\left[(u+u''-2u)\frac{h}{\zeta}+(v'+v''-2v)\frac{k}{\zeta}+(w'+w''-2w)\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta)\frac{k}{\zeta},$$

$$\left[(u+u''-2u)\frac{h}{\zeta}+(v'+v''-2v)\frac{k}{\zeta}+(w'+w''-2w)\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta)\frac{l}{\zeta}.$$

On peut obtenir les valeurs de $(u''-u)$, $(v''-v)$, $(w''-w)$, en changeant les signes de h, k, l dans les valeurs de $u'-u$, $v'-v$, $w'-w$, déduites précédemment du théorème de Taylor; c'est ce qui permettra de trouver les valeurs de $u'+u''-2u$, $v'+v''-2v$, $w'+w''-2w$, en fonction de h, k, l; si on substitue ces valeurs dans les expression précédentes, en négligeant les produits de trois dimensions de h, k, l devant ceux de deux dimensions seulement, on aura:

$$\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}h^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}k^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}l^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}k\,l+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}l\,h+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}h\,k\right)\frac{h}{\zeta}\right.$$
$$+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}h^2+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}k^2+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}l^2+2\frac{2\,\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}k\,l+2\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial x}l\,h+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}h\,k\right)\frac{k}{\zeta}$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}h^2+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}k^2+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}l^2+2\frac{2\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}k\,l+2\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}l\,h+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}h\,k\right)\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta)\frac{h}{\zeta},$$

pour la composante suivant l'axe des x, de la résultante des actions des molécules M' et M'' sur M; les composantes de cette même résultante sur les axes des y et des z seront évidemment égales à la précédente, respectivement multipliée par $\frac{k}{h}$ et $\frac{l}{h}$.

17.

Soient φ l'angle à l'horizon de la direction MM', et ψ l'angle que le plan vertical, dans lequel elle se trouve, fait avec celui des zx, on aura $h=\zeta\cos\varphi\cos\psi$, $k=\zeta\cos\varphi\sin\psi$, $l=\zeta\sin\varphi$. Toutes les molécules voisines de M', et situées dans l'élément sphérique $[\zeta^2\cos\varphi\,\partial\zeta\,\partial\varphi\,\partial\psi]$, pouvant être considérées comme agissant de la même manière sur la molécule M, il suffira de multiplier les composantes, dont l'expression est indiquée à la fin du paragraphe précedent, par cet élément sphérique et d'intégrer chacune d'elles trois fois: l'une par rapport à φ depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=\frac{\pi}{2}$; la seconde par rapport à ψ, de $\psi=0$ à $\psi=2\pi$; la troisième depuis $\zeta=0$ jusqu'à $\zeta=\infty$, car $F(\zeta)$ devenant nulle, lorsque ζ a une valeur sensible, on peut prendre ces deux limites pour ζ; on aura alors, par toutes ces intégrations, les composantes de la résultante de toutes les forces qui tendent à faire marcher la molécule M ou à s'éloigner de sa seconde position d'équilibre.

Si l'on effectue toutes ces intégrations, que l'on représente $\left[\frac{2}{15}\pi\int_0^\infty\zeta^4F(\zeta)\,\partial\zeta\right]$ par une constante A, les composantes de la résultante dont nous venons de parler seront, après toute réduction faite:

$$A\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+2\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial x}\right),$$

$$A\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}+2\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial y}\right),$$

$$A\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2w}{\partial z^2}+2\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial z}\right).$$

Si en passant du premier au second état d'équilibre, les molécules du corps solide proposé deviennent soumises à l'action de forces accélératrices dont les composantes sont X_1, Y_1, Z_1, pour la molécule M, son équilibre exigera que l'on ait:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2.\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial x}+\frac{X_1}{A}=0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2.\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial y}+\frac{Y_1}{A}=0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2.\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial z}+\frac{Z_1}{A}=0.$$

Dans ces équations, on peut supposer que la masse de la molecule M, ou la densité du corps homogène proposé, n'entre pas, parcequ'elle aurait dû entrer comme facteur dans X_1, Y_1, Z_1 et A, et conséquemment disparaître comme facteur commun. La seule quantité qui puisse varier d'un corps à l'autre dans les équations précédentes est $A=\frac{2}{15}\pi\int_0^\infty \zeta^4 F(\zeta)\partial\zeta$; on voit que plus cette quantité sera petite, plus u, v, w seront grands; A est une constante qui dépend de l'élasticité du corps.

Note seconde. Expression de la dilatation.

18.

Soient deux molécules M et M', situées dans le corps solide homogène, sur une même ligne parallèle à l'axe des x, et très voisines l'une de l'autre, en sorte que la distance h, qui les sépare soit insensible; les coordonnées du point M étant x, y, z, celles du point M' seront $x+h$, y, z; lors du second état d'équilibre, la molécule M prendra une autre position m, et aura pour coordonnées $x+u$, $y+v$, $z+w$; la molécule M' prendra la position m' et aura pour coordonnées $x+h+u+\frac{\partial u}{\partial x}h$, $y+v+\frac{\partial v}{\partial x}h$, $z+w+\frac{\partial w}{\partial x}h$; mais, d'après les considérations de la note précédente, les lignes MM', mm', faisant un angle infiniment petit, mm' pourra encore être considérée comme parallèle à l'axe des x, et sa longueur sera simplement $h\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Si l'on considère un point M'' situé à une distance insensible k de M, sur la parallèle à l'axe des y menée par M, on démontrera de la même manière, que du premier au second état d'équilibre, la distance $MM''=k$ deviendra $mm'=k\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$. Enfin si l'on considère une molécule M''', située à une distance l de M sur une

parallèle à l'axe des z, la distance $MM'''=l$ deviendra $mm''=l\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$. Il suit delà que le parallèlepipède hkl deviendra lors du second état d'équilibre $hkl\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$, ou simplement $hkl\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$, si on néglige les rectangles des coëfficiens différentiels $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$, comme disparaissant devant leur somme, puisque u, v, w sont très petits par rapport à x, y, z, ou plutôt ∂u, ∂v, ∂w, par rapport à ∂x, ∂y, ∂z. Le volume primitif du parallèlepipède rectangle hkl, augmente donc, dans le second état d'équilibre de $hkl\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$, ainsi $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ est le rapport de l'augmentation de volume de ce parallèlepipède à ce volume, c'est ce qu'on peut appeler la dilatation de ce volume même; soit θ cette quantité ou cette dilatation, qui sera fonction de x, y, z, on aura identiquement:

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Note troisième. Démonstration des formules relatives aux pressions intérieures.

19.

Imaginons: par la molécule M un plan P'' perpendiculaire aux ζ, et conséquemment parallèle au plan des xy; sur ce plan une base très petite w, comprenant le point M, et enfin un cylindre infiniment délié, ayant pour base w et ses arêtes parallèles aux ζ, et dirigées vers l'origine. Proposons nous de trouver la résultante des actions que les molécules du corps, situées au dessus du plan P'' exercent sur celles, situées dans l'intérieur du cylindre infiniment délié dont nous venons de parler, en vertu du dérangement qu'a occasionné le second état d'équilibre.

Une molécule M' devenue m' exercera sur la molécule M devenue m, une action dirigée suivant MM' ou mm' égale à:

$$\left[(u'-u)\frac{h}{\zeta}+(v'-v)\frac{k}{\zeta}+(w'-w)\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta),$$

d'après ce qui a été dit (Note première §. 15. et 16.), ζ étant la distance MM'; h, k, l les projections de cette distance sur les trois axes; u, v, w les projections de Mm; u', v', w' celles de $M'm'$; enfin $F(\zeta)$ une fonction de ζ, qui décroit très rapidement, lorsque ζ croit, et qui est insensible ou nulle pour des valeurs sensibles de ζ. D'après cela, on pourra poser:

$$u'-u=\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k+\frac{\partial u}{\partial z}l;\quad v'-v=\frac{\partial v}{\partial x}h+\frac{\partial v}{\partial y}k+\frac{\partial v}{\partial z}l;$$
$$w'-w=\frac{\partial w}{\partial x}h+\frac{\partial w}{\partial y}k+\frac{\partial w}{\partial z}l;$$

la force dirigée suivant $M'M$, aura ainsi pour expression nouvelle:

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k+\frac{\partial u}{\partial z}l\right)\frac{h}{\zeta}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}h+\frac{\partial v}{\partial y}k+\frac{\partial v}{\partial z}l\right)\frac{k}{\zeta}+\left(\frac{\partial w}{\partial x}h+\frac{\partial w}{\partial y}k+\frac{\partial w}{\partial z}l\right)\frac{l}{\zeta}\right]F(\zeta).$$

Soit, comme dans la note première: $h=\zeta\cos\varphi\cos\psi$, $k=\zeta\cos\varphi\sin\psi$, $l=\zeta\sin\varphi$; toutes les molécules situées dans l'espace infiniment petit ou élément sphérique $[\zeta^2\cos\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi\,\partial\zeta]$, dont M' fait partie, pourront être considérées comme agissant chacune, sur chacune des molécules de l'élément infiniment petit $w\,\partial p$ du cylindre proposé qui contient M, avec une force de même intensité et de même direction que la force exercée par M' sur M; ainsi l'action totale de l'élément sphérique $[\zeta^2\cos\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi\,\partial\zeta]$ sur l'élément cylindrique $w\,\partial p$ sera égale à:

$$a.\ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi\cos\psi+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\sin\psi+\frac{\partial u}{\partial z}\sin\varphi\right)\cos\varphi\cos\psi\right.$$
$$+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi\cos\psi+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi\sin\psi+\frac{\partial v}{\partial z}\sin\varphi\right)\cos\varphi\sin\psi$$
$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\varphi\cos\psi+\frac{\partial w}{\partial y}\cos\varphi\sin\psi+\frac{\partial w}{\partial z}\sin\varphi\right)\sin\varphi\right]\zeta^3F(\zeta)\cos\varphi\,\partial\varphi\,\partial\psi\,\partial\zeta w\,\partial p;$$

les composantes de cette action s'obtiendront en multipliant successivement cette expression par $\cos\varphi\cos\psi$, $\cos\varphi\sin\psi$, $\sin\varphi$.

20.

Soit M_1 une molécule du cylindre proposé située à une distance p de la molécule M, et dont les coordonnées seront x, y, $z-p$; soit une molécule M'_1, située sur une parallèle aux ζ menée par M', à une distance p au dessous de M', ses coordonnées seront: $x+h$, $y+k$, $z+l-p$; la ligne $M_1M'_1$ sera évidemment parallèle à MM', et lui sera égale en longueur. Si l'on désigne par u_1, v_1, w_1 les projections de l'élément parcouru par la molécule M_1, lorsqu'elle passe à la seconde position d'équilibre, par u'_1, v'_1, w'_1, les mêmes choses pour M'_1, on aura évidemment ces quantités en substituant dans u, v, w: x, y, $\zeta-p$ au lieu de x, y, z, et dans u', v', w': $x+h$, $y+k$, $z+l-p$ au lieu de $x+h$, $y+k$, $z+l$; or comme la molécule M'_1, quoique au dessous de M', doit être au dessus du plan P'', p doit être plus petit que ζ, et du même ordre de grandeur que h, k, l, en sorte que p^2 devra être négligé devant p; on aura donc:

$$u_1=u-\frac{\partial u}{\partial z}p,\quad u'_1=u+\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k+\frac{\partial w}{\partial z}(l-p),$$

et par suite:

$$u'_1 - u_1 = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + \frac{\partial u}{\partial z} l = x' - u.$$

On démontrera de la même manière que $v'_1 - v_1 = v' - v$, que $w'_1 - w_1 = w' - w$; il suit delà, que l'action d'un élément sphérique, dont M'_1, fera partie, sur un élément cylindrique $w\partial p$, dont M_1 fera partie, aura identiquement la même expression que celle (*a.*) trouvée plus haut; ainsi, en intégrant cette expression (*a.*) par rapport à p, depuis $p=0$ jusqu'à $p=\zeta \sin\varphi$, on aura la somme des actions dirigées suivant la direction $(\varphi\psi)$ et exercées a la distance ζ, par les molécules situées sur la ligne $M'M'_1$ au dessus du plan P'', sur les molécules du cylindre infiniment délié proposé. Si l'on intègre ensuite cette expression, successivement multipliée par $\cos\varphi\cos\psi$, $\cos\varphi\sin\psi$, $\sin\varphi$, par rapport à ζ, de $\zeta=0$ à $\zeta=\infty$, par rapport à φ, de $\varphi=0$ à $\varphi=\frac{\pi}{2}$, et par rapport à ψ, de $\psi=0$ à $\psi=2\pi$, on aura les trois composantes $X''w$, $Y''w$, $Z''w$ de l'action demandée. On trouve ainsi:

$$X''=A\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad Y''=A\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad Z''=A\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+3.\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

A représentant ici, comme dans la note première l'expression

$$\left[\frac{2}{15}\pi\int_0^\infty \zeta^4 F(\zeta)\partial\zeta\right].$$

Seconde section. Théorèmes sur les pressions.

21.

Parmi les 9 composantes X, Y, Z, X', Y', Z', X'', Y'', Z'' données dans les paragraphes 12. et 13., il est bon de distinguer les composantes X, Y', Z'', respectivement normales aux élémens plans correspondans, forces que nous désignerons par N_1, N_2, N_3, et les six autres composantes égales deux à deux: $Z'=Y''$, $X''=Z$, $Y=Z'$, que nous nommerons forces tangentielles, et que nous désignerons pareillement par T_1, T_2, T_3. Les égalités qui précèdent, sont autant de théorèmes remarquables, mais qui ne sont que des cas particuliers d'un théorème plus général qui sera bientôt démontré.

22.

Si on change d'axes coordonnés, on aura à considérer six nouvelles forces N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3. On pourra les exprimer en fonc-

tion des premières forces N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, et des angles de direction des nouveaux axes relativement aux anciens.

Pour trouver les relations qui existent entre ces systèmes différens, soient x', y', z' les nouvelles coordonnées; m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3; p_1, p_2, p_3 les cosinus des angles que chacune fait avec les axes des x, des y et des z; enfin soient u', v', w' les projections sur les nouveaux axes de l'espace qui sépare une molécule M de la position qu'elle occuperoit, si l'homogénéité du corps n'avait pas été troublée. On aura:

$$1.\quad \begin{cases} x = m_1 x' + n_1 y' + p_1 z', \quad y = m_2 x' + n_2 y' + p_2 z', \\ z = m_3 x' + n_3 y' + p_3 z'; \\ u' = m_1 u + m_2 v_1 + m_3 w, \quad v' = n_1 u + n_2 v + n_3 w, \\ w' = p_1 u + p_2 v + p_3 w; \end{cases}$$

les cosinus m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2; m_3, n_3, p_3 étant liés entr'eux par les six équations:

$$2.\quad \begin{cases} m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 = 1, \quad m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 = 1, \quad m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 = 1, \\ m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 = 0; \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0; \quad m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 = 0. \end{cases}$$

On déduit des équations (1.) par des différentiations convenables, et en ayant égard aux équations (2.):

$$3.\quad \begin{cases} N_1^1 = A\left(3.\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) = m_1^2 N_1 + m_2^2 N_2 + m_3^2 N_3 + 2 m_2 m_3 T_1 + 2 m_1 m_3 T_2 \\ \qquad + 2 m_1 m_2 T_3; \\ N_2^1 = A\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + 3.\frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) = n_1^2 N_1 + n_2^2 N_2 + n_3^2 N_3 + 2 n_2 n_3 T_1 + 2 n_1 n_3 T_2 \\ \qquad + 2 n_1 n_2 T_3; \\ N_3^1 = A\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + 3.\frac{\partial w'}{\partial z'}\right) = p_1^2 N_1 + p_2^2 N_2 + p_3^2 N_3 + 2 p_2 p_3 T_1 + 2 p_1 p_3 T_2 \\ \qquad + 2 p_1 p_2 T_3; \\ T_1^1 = A\left(\frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'}\right) = p_1 n_1 N_1 + p_2 n_2 N_2 + p_3 n_3 N_3 + (p_2 n_3 + n_2 p_3) T_1 \\ \qquad + (p_1 n_3 + n_1 p_3) T_2 + (p_1 n_2 + n_1 p_2) T_3; \\ T_2^1 = A\left(\frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'}\right) = m_1 p_1 N_1 + m_2 p_2 N_2 + m_3 p_3 N_3 + (m_2 p_3 + p_2 m_3) T_1 \\ \qquad + (m_1 p_3 + p_1 m_3) T_2 + (m_1 p_2 + p_1 m_2) T_3; \\ T_3^1 = A\left(\frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial u'}{\partial x'}\right) = n_1 m_1 N_1 + n_2 m_2 N_2 + n_3 m_3 N_3 + (n_2 m_3 + m_2 n_3) T_1 \\ \qquad + (n_1 m_3 + m_1 n_3) T_2 + (n_1 m_2 + m_1 n_2) T_3. \end{cases}$$

Et enfin:

$$4.\quad \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta.$$

Cette équation (4.) démontre un théorème que l'on peut enoncer ainsi: En un point quelconque d'un corps solide dont l'homogé-

néité est troublée, la dilatation cubique est égale à la somme des dilatations linéaires, prises en ce point, dans trois directions quelconques perpendiculaires entr'elles.

Car $\frac{\partial u}{\partial x}\partial x$ peut être regardé comme l'augmentation de la ligne ∂x parallèle à l'axe des x, passant par le point M, et $\frac{\partial u}{\partial x}$ comme le rapport de cette augmentation à la ligne elle même, ou comme sa dilatation.

Les équations (3.) donnent immédiatement:

$$N_1^1 + N_2^1 + N_3^1 = N_1 + N_2 + N_3 = 5A\theta;$$

d'où résulte cet autre théorème que: la somme des composantes normales des tractions ou pressions exercées sur trois élémens plans, menés perpendiculairement entr'eux, en un méme point du corps solide, est constante, quelque soit le système de ces trois plans, et est de plus égale à la dilatation multipliée par un coëfficient constant dans toute l'étendue du corps.

23.

Soient P_1, P_2, P_3 les tractions ou pressions obliques dont les composantes sont N_1, T_3, T_2; T_3, N_2, T_1; T_2, T_1, N_3; et soient α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3; γ_1, γ_2, γ_3 les angles que ces forces font avec les axes; on aura:

$$5.\quad \begin{cases} N_1 = P_1\cos\alpha_1, & T_3 = P_2\cos\alpha_2, & T_2 = P_3\cos\alpha_3, \\ T_3 = P_1\cos\beta_1, & N_2 = P_2\cos\beta_2, & T_1 = P_3\cos\beta_3, \\ T_2 = P_1\cos\gamma_1, & T_1 = P_2\cos\gamma_2, & N_3 = P_3\cos\gamma_3. \end{cases}$$

Dans ces équations les quantités N_1, N_2, N_3; T_1, T_2, T_3 données en nombres par les équations des paragraphes 12. et 13., sont ou positives ou négatives; leurs grandeurs et leur signes seront connues en chaque point du corps solide, lorsque les fonctions u, v, w, correspondantes aux circonstances données, seront déterminées; alors les équations (5.) feront connaître en grandeur et en direction les forces P_1, P_2, P_3; suivant qu'elles feront avec les normales qui leur correspondent, ou les axes des x, des y et des z, des angles surpassant, également l'angle droit, ou étant moindre que lui, ces forces P_1, P_2, P_3 seront des pressions des forces tangentielles, ou des tractions.

On conclut des équations (5.):

$$6.\quad P_1^2 = N_1^2 + T_3^2 + T_2^2, \quad P_2^2 = T_3^2 + N_2^2 + T_1^2, \quad P_3^2 = T_2^2 + T_1^2 + N_3^2;$$

6. $N_1 T_3 + N_2 T_3 + T_1 T_2 = P_1 P_2 \cos[P_1, P_2]$; $N_1 T_2 + T_1 T_3 + N_3 T_2 = P_1 P_3 \cos[P_1, P_3]$;
$T_2 T_3 + N_2 T_1 + N_3 T_1 = P_2 P_3 \cos[P_2, P_3]$.

24.

Soient pareillement P_1^I, P_2^I, P_3^I les tractions ou pressions obliques aux élémens plans, passant par le point M, et parallèles aux nouveaux axes, on aura pour déterminer P_1^I et sa direction relativement aux anciens axes, les équations:

$$P_1^I \cos[P_1^I, x] = m_1 N_1^I + n_1 T_3^I + p_1 T_2^I,$$
$$P_1^I \cos[P_1^I, y] = m_2 N_1^I + n_2 T_3^I + p_2 T_2^I,$$
$$P_1^I \cos[P_1^I, z] = m_3 N_1^I + n_3 T_3^I + p_3 T_2^I;$$

or les équations (3.) donnent:

$$m_1 N_1^I + n_1 T_3^I + p_1 T_2^I = m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2 = P_1 \cos[P_1, x'],$$
$$m_2 N_1^I + n_2 T_3^I + p_2 T_2^I = m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1 = P_2 \cos[P_2, x'],$$
$$m_3 N_1^I + n_3 T_3^I + p_3 T_2^I = m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3 = P_3 \cos[P_3, x'].$$

On a donc simplement

7. $P_1^I \cos(P_1^I, x) = P_1 \cos(P_1, x')$; $P_1^I \cos(P_1^I, y) = P_2 \cos(P_2, x')$;
$P_1^I \cos(P_1^I, z) = P_3 \cos(P_3, x')$;

et par suite:

$$P_1^{I\,2} = P_1^2 \cos^2[P_1, x'] + P_2^2 \cos^2[P_2, x'] + P_3^2 \cos^2[P_3, x'];$$

on trouveroit de la même manière:

$$P_2^{I\,2} = P_1^2 \cos^2[P_1, y'] + P_2^2 \cos^2[P_2, y'] + P_3^2 \cos^2[P_3, y'];$$
$$P_3^{I\,2} = P_1^2 \cos^2[P_1, z'] + P_2^2 \cos^2[P_2, z'] + P_3^2 \cos^2[P_3, z'];$$

d'où, en ajoutant les trois équations précédentes:

$$P_1^{I\,2} + P_2^{I\,2} + P_3^{I\,2} = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2.$$

25.

Les équations (7.) démontrent ce théorème, que: **Si en un même point d'un corps solide homogène, soumis à des forces quelconques, on conçoit deux élémens plans w, w', ayant pour perpendiculaires n et n', les tractions ou pressions, en général obliques ϖ, ϖ', exercées sur ces plans, jouiront de cette propriété que la composante de ϖ sur n', et celle de ϖ' sur n seront égales.**

L'équation (8.) démontre que: **la somme des quarrés des pressions ou tractions exercées sur trois élémens plans rectangulaires, est constante pour un même point du corps so-**

lide proposé, quelle que soit la position du systême de ces trois élémens.

Il suit encore des équations (7.) que si, connoissant en grandeur et en direction, les pressions obliques ϖ', ϖ'', ϖ''', exercées en un point d'un corps solide, sur trois élémens plans ω', ω'', ω''', perpendiculaires entr'eux, et ayant respectivement pour normales les droites ν', ν'', ν''', on veut determiner la grandeur et la direction de la pression ϖ exercée sur un quatrième élément plan ω, ayant pour normale ν, il faut projeter chacune des pressious connues ϖ', ϖ'', ϖ''', sur la normale ν; ces trois projections portées, à partir du point M, sur les normales correspondantes ν', ν'', ν''', seront les composantes de la pression ϖ sur ces mêmes droites et la diagonale du parallèlepipède rectangle ayant ces composantes pour cotés, donnera en grandeur et en direction la pression demandée.

(La suite dans le cahier prochain.)

20.

Nouvelle théorie de l'action capillaire*).

(Par Mr. le Baron *de Poisson.*)

L'élévation de l'eau et l'abaissement du mercure dans un tube de verre d'un très petit diamètre sont des phénomènes très anciennement connus, qui se présentent, au premier aspect, comme des exceptions aux lois de l'Hydrostatique, et dont on a donné pendant long-temps des explications qu'il serait inutile de rappeler. Les théories qui ne sont pas fondées sur le calcul et l'observation doivent maintenant être bannies de la Physique, comme elles le sont de l'Astronomie. Lors même que la véritable cause des phénomènes est connue, il n'y a que l'analyse mathématique qui puisse découvrir leur liaison réciproque, et les déduire les uns des autres, en employant les seules données indispensables de l'expérience. Les effets, si nombreux et si variés, qui se rapportent à l'action capillaire, en offrent l'exemple le plus remarquable; car, sans le secours de l'analyse, ils seraient restés isolés, et l'on ne serait pas parvenu à les prévoir ou à les expliquer tous avec précision, et encore moins à en déterminer la grandeur, au moyen de deux données spéciales empruntées à l'observation, l'une relative à la matière du liquide, et l'autre dépendante de cette matière et de celle du corps dont le contact donne naissance aux différens effets dont il s'agit.

Quoique l'ascension d'un liquide au-dessus de son niveau soit produite par l'action du tube dans lequel elle a lieu, on sait cependant qu'elle ne dépend pas de son épaisseur, et Jurin a fait voir que, pour un même liquide, l'ascension ou la dépression dans des tubes capillaires formés d'une même matière suit la raison inverse de leurs diamètres intérieurs. Ces deux faits importans étaient constatés par l'expérience, lorsque Clairaut essaya, le premier, de ramener les phénomènes de la capillarité aux lois de l'équilibre des fluides, dont il venait de trouver les équations générales**). Il considère un canal infiniment étroit, situé dans l'axe du tube, et se pro-

*) Cet article et le préambule d'un ouvrage qui paroîtra incessamment à Paris chez Mr. Bachelier et à Berlin chez Mr. Schlesinger.

**) *Théorie de la figure de la Terre*, première partie, chapitre X.

longeant au-dessous de son extrémité inférieure, pour se relever ensuite en-dehors et aboutir à la surface plane et horizontale du liquide; il montre que l'action du liquide sur la partie inférieure et sur les deux branches ascendantes de ce canal se détruit en partie, et qu'il ne subsiste que l'action du ménisque qui termine le liquide dans l'intérieur du tube; et, selon Clairaut, cette force, jointe à celle qui provient de l'action directe du tube, doit faire équilibre au poids de la partie du canal élevée au-dessus du niveau extérieur. Cette conclusion est exacte; mais il aurait dû ajouter que la seconde force, qu'il regardait comme la principale, était au contraire insensible, et ne conserver, en conséquence, que la seule action du ménisque. En effet, si l'action du tube ne dépend pas de son épaisseur, il en faut conclure qu'elle n'émane que de sa couche intérieure, d'une épaisseur insensible, en sorte que les points du tube qui sont à une distance sensible du liquide n'agissent pas sur ses molécules, ni par conséquent sur les points du canal dont la distance au tube est égale à son demi-diamètre. Faute d'avoir fait cette remarque et de l'avoir étendue à l'action du liquide sur lui-même, Clairaut a seulement ouvert la route, et n'a pas pu déduire de son analyse la loi expérimentale que Jurin avait trouvée. Mais quoique ces idées nous paraissent aujourd'hui très naturelles, et qu'on trouvât déjà un exemple du calcul de ce genre de forces dans la manière dont Newton avait déterminé l'action des corps sur la lumière, il s'est néanmoins écoulé un long intervalle de temps avant que nous eussions une théorie de l'action capillaire où l'action du tube et celle du liquide fussent envisagées sous ce point de vue.

Dans cette théorie, que Laplace a publiée en 1806 et 1807, il considère l'action des molécules du tube sur celles du liquide et l'action mutuelle des molécules du liquide, comme des forces attractives, décroissantes très rapidement suivant une loi inconnue, depuis le contact jusqu'à une distance insensible, où elles disparaissent entièrement. Ces forces ont lieu en même tems que l'attraction newtonienne qui suit la raison inverse du carré des distances; mais l'effet de celle-ci n'est sensible que dans des masses très grandes, qui peuvent balancer l'action de la terre entière sur le fil-à-plomb placé dans leur voisinage, ou bien encore, quand on l'oppose à une force de torsion très délicate, comme dans l'expérience de Cavendish pour mesurer l'attraction d'un globe de plomb d'une assez petite étendue. Les phénomènes de la capillarité ne dépendent donc pas

de l'attraction qui s'étend à de grandes distances, et qu'il sera permis de négliger, sans aucune erreur, pour ne s'occuper que de celle dont la sphère d'activité est supposée tout-à fait insensible, et qu'on appelle proprement *l'attraction moléculaire.* En partant de cette hypothèse, Laplace obtient l'équation de la surface d'un liquide dans son état d'équilibre, soit en considérant son action normale sur un canal infiniment étroit et prolongé indéfiniment, soit d'après l'action tangentielle qu'il exerce sur chaque molécule superficielle; méthodes qui ne sont pas essentiellement différentes, et dont l'une doit conduire à la différentielle de l'équation donnée par l'autre, ainsi que Laplace l'a fait voir *à priori.* Il regarde l'angle sous lequel la surface intérieure du tube est coupée par celle du liquide, comme ne dépendant uniquement que de la matière du liquide et de celle du tube; en sorte que cet angle est constant et donné, dans chaque cas, pour tous les points du contour de la surface capillaire; le liquide étant supposé homogène, aussi bien que la matière du tube. L'équation qui résulte de cette considération et celle qui appartient à la surface entière sont les deux équations du problème; elles renferment les deux constantes spéciales dont j'ai parlé tout à l'heure; et c'est de ces deux équations que Laplace a déduit l'explication des différens phénomènes observés par les physiciens.

Un ou deux ans avant Laplace, Th. Young s'était déjà occupé de ces questions *). Des idées ingénieuses l'avaient conduit à reconnaître l'invariabilité de l'angle sous lequel la surface capillaire vient couper celle du tube, et le rapport qui existe entre l'élévation d'un liquide dans un tube d'un très petit diamètre et son adhésion à un disque formé de la même matière que le tube; mais il s'appuyait sur l'identité de la surface du liquide avec celle d'une membrane également tendue en tous ses points; identité qui ne peut être que la conséquence, et non le principe, de la solution du problème. Lorsque le travail de Laplace eut paru, Th. Young éleva contre sa théorie plusieurs objections, parmi lesquelles il n'y en a que deux qui me paraissent fondées: l'une, que Laplace n'a pas eu égard à l'action de la chaleur dans le calcul des forces moléculaires **), et l'autre, tirée de l'expérience, qui se rapporte au cas de plusieurs liquides superposés dans un même tube ***). J'examinerai celle-ci lorsqu'il

*) *Transactions philosophiques*, année 1805.
**) *Supplément à la Théorie de l'Action capillaire*, page 75.
***) *Supplément à l'Encyclopédie britannique*, article *Cohésion de liquides.*

sera question, dans cet ouvrage, de l'équilibre de ces liquides; quant à la nécessité de tenir compte de la répulsion calorifique, il ne peut rester aucun doute à ce sujet: mais, pour cela, il suffit de prendre pour l'action mutuelle de deux molécules, l'excès de l'attraction de leurs matières pondérables sur la répulsion de leurs quantités de chaleur, et de considérer, en conséquence, la fonction qui l'exprime comme une quantité qui peut changer de signe dans l'étendue de ses valeurs sensibles. Mais Laplace a omis, dans ses calculs, une circonstance physique dont la considération était essentielle: je veux parler de la variation rapide de densité que le liquide éprouve près de sa surface libre et près de la paroi du tube, sans laquelle le phénomènes capillaires n'auraient pas lieu, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer dans mon Mémoire sur l'équilibre des liquides *).

En effet, dans l'état d'équilibre, chaque couche infiniment mince d'un liquide est comprimée également sur ses deux faces par l'action répulsive des molécules voisines, diminuée de leur force attractive, ou, ce qui est la même chose, on peut la considérer comme appuyée sur la partie du liquide située d'un côté, et comprimée par la partie située du côté opposé; et son degré de condensation est déterminé par la grandeur de la force comprimante. A une distance sensible de la superficie du liquide, cette force provient d'une couche du liquide adjacente à la couche infiniment mince, dont l'épaisseur est complète et partout la même, c'est-à-dire égale au rayon d'activité des molécules fluides; et, pour cette raison, la densité intérieure du liquide est aussi constante, abstraction faite de la petite condensation due à la pesanteur, qui varie avec la distance à la surface supérieure. Mais quand cette distance est moindre que le rayon d'activité moléculaire, l'épaisseur de la couche située au-dessus de celle que l'on considère est aussi plus petite que ce rayon: la force comprimante qui provient de cette couche supérieure décroît alors très rapidement avec la distance à la surface, et s'évanouit entièrement à la surface même, où la couche infiniment mince n'est plus comprimée que par la pression atmosphérique. Par conséquent, la condensation du liquide décroît de même, suivant une loi inconnue, à mésure que l'on s'approche de sa surface libre, et sa densité est très différente à cette surface et à une profondeur qui excède un tant soit peu le rayon d'activité de ses molécules, ce qui suffit

*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome IX. page 76. et suivantes.

pour qu'elle soit égale à la densité intérieure du liquide. Or, on démontrera, dans le premier chapitre de cet ouvrage, que si l'on négligeait cette variation rapide de la densité dans l'épaisseur de la couche superficielle *), la surface capillaire demeurerait plane et horizontale, et il n'y aurait ni élévation ni abaissement du liquide. On fera voir de même la nécessité d'avoir égard à la compression variable que le liquide éprouve près de la paroi du tube, et qui s'étend jusqu'à la limite de l'action exercée par ce corps solide.

En ayant donc égard à ces données physiques de la question, je suis parvenu à former, dans les chapitre II. et III., l'équation commune à tous les points de la surface de contact de deux liquides superposés et contenus dans un tube quelconque, et l'équation particulière aux points de son contour, ce qui comprend, comme cas particulier, les équations relatives à la surface libre d'un seul liquide. Leur forme est la même que celle des équations de la *Mécanique céleste;* mais les expressions en intégrales définies des deux constantes spéciales qu'elles renferment sont très différentes, de sorte que leurs valeurs numériques le seraient également si, au lieu de les déterminer par l'expérience, on pouvait les calculer directement d'après leurs expressions analytiques, ce qui exigerait que l'on connût les lois des actions du tube sur le liquide et du liquide sur lui-même. On trouvera, dans les chapitres suivans, les applications de ces équations générales à l'équilibre des liquides dans les tubes d'un très petit diamètre et à d'autres questions analogues, et l'on y pourra remarquer l'usage que j'ai fait des tables elliptiques de M. Legendre, pour la solution rigoureuse de problèmes qui n'auraient pu, sans ce secours, être résolus que par approximation.

Depuis que cet ouvrage est écrit, j'ai eu connaissance d'un Mémoire de M. Gauss, qui paraît en ce moment sous le titre de *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii* **). Pour former les équations de cet équilibre, l'auteur a recours au principe des vitesses virtuelles, qu'il

---

*) Cette épaisseur doit être de grandeur finie, mais absolument insensible, d'après l'hypothèse qu'on a faite sur le peu d'étendue de la sphère d'activité moléculaire. Cela est confirmé par une expérience de M. Gay-Lussac. Ayant réduit un corps en poussière très fine, il a trouvé sa pesanteur spécifique sensiblement la même avant et après cette opération; d'où il faut conclure que l'épaisseur de la couche dilatée qui termine chacune des parcelles de poussière, est insensible eu égard à leurs dimensions.

**) Gottingue, 1830.

applique à la masse entière du liquide, et non pas, comme dans la *Mécanique analytique*, à un élément différentiel de cette masse. Il trouve, de cette manière, qu'une certaine intégrale sextuple, étendue à toute cette masse, doit être un *minimum*. Dans le cas d'un liquide homogène et incompressible, il réduit d'abord cette quantité à une intégrale quadruple; et en considérant spécialement le cas où les forces appliquées au liquide sont la pesanteur et l'attraction mutuelle de ses molécules, dont la sphère d'activité est insensible, il réduit de nouveau la quantité dont il s'agit, qui est ensuite composée de trois termes, savoir, le produit du poids du liquide et de l'ordonnée verticale de son centre de gravité, l'aire de sa surface libre multipliée par une constante qui ne dépend que de la matière du liquide, et l'aire des parois fixes contre lesquelles il s'appuie, multipliée par une seconde constante dépendante de la matière du liquide et de celle de la partie solide du système. Par les règles connues du calcul des variations, on détermine la surface inconnue du liquide qui rend cette somme un *minimum*, et, comme on sait, on trouve à la fois l'équation générale de cette surface et l'équation particulière de son contour, ce qui est l'avantage caractéristique de la méthode que M. Gauss a suivie. Mais cet illustre géomètre étant parti des mêmes données physiques que Laplace, et n'ayant pas non plus considéré la variation de densité aux extrémités du liquide, qu'il a regardé, au contraire, comme incompressible dans toutes ses parties, les objections qui s'élèvent contre la théorie de Laplace s'appliquent également à la sienne, qui ne diffère de l'autre que par la manière de former les équations d'équilibre. On peut, à cet égard, employer différens moyens; mais, sans craindre de compliquer le calcul et d'en augmenter les difficultés, il importe de ne négliger aucune des circonstances essentielles de la question, parmi lesquelles il faut compter surtout la dilatation du liquide près de sa surface libre et la condensation qui peut être produite par l'attraction du tube.

La conséquence générale que l'on tirera de notre théorie, c'est que les phénomènes de la capillarité sont dus à l'action moléculaire, modifiée, non-seulement par la courbure des surfaces, comme Laplace l'avait dit, mais aussi par l'état particulier des liquides à leurs extrémités.

21.

Potenzial- oder cyklisch-hyperbolische Functionen.

(Von Hrn. Prof. *Gudermann* zu Cleve.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1., 14. und 28. im vorigen, und No. 9. in diesem Bande.)

I.

Tabelle der Längezahlen (mit sieben Decimalziffern) aller Kreisbogen für den Radius = 1 von Minute zu Minute nach beiden Kreis-Eintheilungen, behufs der Zurückführung der hyperbolischen Functionen auf die cyklischen und umgekehrt.

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=24°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			
24,00	0,386 2519	16 90	21 36 00 0	52 16		
24,01	0,386 4209	16 89	21 36 32 4	52 13		
02	86 5898	16 90	37 04 8	52 16		
03	86 7588	16 90	37 37 2	52 16		
04	86 9278	16 90	38 09 6	52 16		
05	87 0968	16 90	38 42 0	52 16		
24,06	0,387 2658	16 90	21 39 14 4	52 16		
07	87 4348	16 90	39 46 8	52 16		
08	87 6038	16 90	40 19 2	52 16		
09	87 7728	16 91	40 51 6	52 19		
10	87 9419	16 90	41 24 0	52 16		
24,11	0,388 1109	16 91	21 41 56 4	52 19		
12	88 2800	16 91	42 28 8	52 19		
13	88 4491	16 91	43 01 2	52 19		
14	88 6182	16 90	43 33 6	52 16		
15	88 7872	16 92	44 06 0	52 22		
24,16	0,388 9564	16 91	21 44 38 4	52 19		
17	89 1255	16 91	45 10 8	52 19		
18	89 2946	16 91	45 43 2	52 19		
19	89 4637	16 92	46 15 6	52 22		
20	89 6329	16 92	46 48 0	52 22		
24,21	0,389 8021	16 91	21 47 20 4	52 19		
22	89 9712	16 92	47 52 8	52 22		
23	90 1404	16 92	48 25 2	52 22		
24	90 3096	16 92	48 57 6	52 22		
25	90 4788	16 92	49 30 0	52 22		
24,26	0,390 6480	16 92	21 50 02 4	52 22		
27	90 8172	16 93	50 34 8	52 25		
28	90 9865	16 92	51 07 2	52 22		
29	91 1557	16 93	51 39 6	52 25		
30	91 3250	16 92	52 12 0	52 22		
24,31	0,391 4942	16 93	21 52 44 4	52 25		
32	91 6635	16 93	53 16 8	52 25		
33	91 8328	16 93	53 49 2	52 25		
34	92 0021	16 93	54 21 6	52 25		
35	92 1714	16 93	54 54 0	52 25		
24,36	0,392 3407	16 94	21 55 26 4	52 28		
37	92 5101	16 93	55 58 8	52 25		
38	92 6794	16 94	56 31 2	52 28		
39	92 8488	16 93	57 03 6	52 25		
40	93 0181	16 94	57 36 0	52 28		
24,41	0,393 1875	16 94	21 58 08 4	52 28		
42	93 3569	16 94	58 40 8	52 28		
43	93 5263	16 94	59 13 2	52 28		
44	93 6957	16 94	21 59 45 6	52 28		
45	93 8651	16 94	22 00 18 0	52 28		
24,46	0,394 0345	16 95	22 00 50 4	52 31		
47	94 2039	16 94	01 22 8	52 28		
48	94 3734	16 95	01 55 2	52 31		
49	94 5429	16 94	02 27 6	52 28		
50	94 7123		03 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=24°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			
24,50	0,394 7123	16 95	22 03 00 0	52 31		
24,51	0,394 8818	16 95	22 03 32 4	52 31		
52	95 0513	16 95	04 04 8	52 31		
53	95 2208	16 95	04 37 2	52 31		
54	95 3903	16 95	05 09 6	52 31		
55	95 5598	16 95	05 42 0	52 31		
24,56	0,395 7293	16 96	22 06 14 4	52 35		
57	95 8989	16 96	06 46 8	52 35		
58	96 0685	16 96	07 19 2	52 35		
59	96 2381	16 95	07 51 6	52 31		
60	96 4076	16 96	08 24 0	52 35		
24,61	0,396 5772	16 96	22 08 56 4	52 35		
62	96 7468	16 96	09 28 8	52 35		
63	96 9164	16 97	10 01 2	52 38		
64	97 0861	16 96	10 33 6	52 35		
65	97 2557	16 96	11 06 0	52 35		
24,66	0,397 4253	16 97	22 11 38 4	52 38		
67	97 5950	16 97	12 10 8	52 38		
68	97 7647	16 97	12 43 2	52 38		
69	97 9343	16 97	13 15 6	52 38		
70	98 1040	16 97	13 48 0	52 38		
24,71	0,398 2737	16 97	22 14 20 4	52 38		
72	98 4434	16 97	14 52 8	52 38		
73	98 6131	16 98	15 25 2	52 41		
74	98 7829	16 97	15 57 6	52 38		
75	98 9526	16 98	16 30 0	52 41		
24,76	0,399 1224	16 97	22 17 02 4	52 38		
77	99 2921	16 98	17 34 8	52 41		
78	99 4619	16 98	18 07 2	52 41		
79	99 6317	16 98	18 39 6	52 41		
80	99 8015	16 98	19 12 0	52 41		
24,81	0,399 9713	16 98	22 19 44 4	52 41		
82	0,400 1411	16 98	20 16 8	52 41		
83	00 3109	16 99	20 49 2	52 44		
84	00 4808	16 98	21 21 6	52 41		
85	00 6506	16 99	21 54 0	52 44		
24,86	0,400 8205	16 99	22 22 26 4	52 44		
87	00 9904	16 99	22 58 8	52 44		
88	01 1603	16 99	23 31 2	52 44		
89	01 3302	16 99	24 03 6	52 44		
90	01 5001	16 99	24 36 0	52 44		
24,91	0,401 6700	16 99	22 25 08 4	52 44		
92	01 8399	17 00	25 40 8	52 47		
93	02 0099	16 99	26 13 2	52 44		
94	02 1798	17 00	26 45 6	52 47		
95	02 3498	16 99	27 18 0	52 44		
24,96	0,402 5197	17 00	22 27 50 4	52 47		
97	02 6897	17 00	28 22 8	52 47		
98	02 8597	17 00	28 55 2	52 47		
99	03 0297	17 00	29 27 6	52 47		
25,00	03 1997		30 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=25°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	Gr. M. S.		D. 1″.
Gr. M.					
25,00	0,403 1997	17 00	22 30 00 0	52 47	
25,01	0,403 3697	17 01	22 30 32 4	52 50	
02	03 5398	17 00	31 04 8	52 47	
03	03 7098	17 01	31 37 2	52 50	
04	03 8799	17 01	32 09 6	52 50	
05	04 0400	17 00	32 42 0	52 47	
25,06	0,404 2200	17 01	22 33 14 4	52 50	
07	04 3901	17 01	33 46 8	52 50	
08	04 5602	17 02	34 19 2	52 53	
09	04 7304	17 01	34 51 6	52 50	
10	04 9005	17 01	35 24 0	52 50	
25,11	0,405 0706	17 02	22 35 56 4	52 53	
12	05 2408	17 01	36 28 8	52 50	
13	05 4109	17 02	37 01 2	52 53	
14	05 5811	17 02	37 33 6	52 53	
15	05 7513	17 02	38 06 0	52 53	
25,16	0,405 9215	17 02	22 38 38 4	52 53	
17	06 0917	17 02	39 10 8	52 53	
18	06 2619	17 02	39 43 2	52 53	
19	06 4321	17 03	40 15 6	52 56	
20	06 6024	17 02	40 48 0	52 53	
25,21	0,406 7726	17 03	22 41 20 4	52 56	
22	06 9429	17 03	41 52 8	52 56	
23	07 1132	17 02	42 25 2	52 53	
24	07 2834	17 03	42 57 6	52 56	
25	07 4537	17 03	43 30 0	52 56	
25,26	0,407 6240	17 03	22 44 02 4	52 56	
27	07 7943	17 04	44 34 8	52 59	
28	07 9647	17 03	45 07 2	52 56	
29	08 1350	17 04	45 39 6	52 59	
30	08 3054	17 03	46 12 0	52 56	
25,31	0,408 4757	17 04	22 46 44 4	52 59	
32	08 6461	17 04	47 16 8	52 59	
33	08 8165	17 04	47 49 2	52 59	
34	08 9869	17 04	48 21 6	52 59	
35	09 1573	17 04	48 54 0	52 59	
25,36	0,409 3277	17 04	22 49 26 4	52 59	
37	09 4981	17 05	49 58 8	52 62	
38	09 6686	17 04	50 31 2	52 59	
39	09 8390	17 05	51 03 6	52 62	
40	10 0095	17 05	51 36 0	52 62	
25,41	0,410 1800	17 05	22 52 08 4	52 62	
42	10 3505	17 05	52 40 8	52 62	
43	10 5210	17 05	53 13 2	52 62	
44	10 6915	17 05	53 45 6	52 62	
45	10 8620	17 05	54 18 0	52 62	
25,46	0,411 0325	17 05	22 54 50 4	52 62	
47	11 2030	17 06	55 22 8	52 65	
48	11 3736	17 06	55 55 2	52 65	
49	11 5442	17 05	56 27 6	52 62	
50	11 7147		57 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=25°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	Gr. M. S.		D. 1″.
Gr. M.					
25,50	0,411 7147	17 06	22 57 00 0	52 65	
25,51	0,411 8853	17 06	22 57 32 4	52 65	
52	12 0559	17 06	58 04 8	52 65	
53	12 2265	17 07	58 37 2	52 69	
54	12 3972	17 06	59 09 6	52 65	
55	12 5678	17 06	22 59 42 0	52 65	
25,56	0,412 7384	17 07	23 00 14 4	52 69	
57	12 9091	17 07	00 46 8	52 69	
58	13 0798	17 06	01 19 2	52 65	
59	13 2504	17 07	01 51 6	52 69	
60	13 4211	17 07	02 24 0	52 69	
25,61	0,413 5918	17 08	23 02 56 4	52 72	
62	13 7626	17 07	03 28 8	52 69	
63	13 9333	17 07	04 01 2	52 69	
64	14 1040	17 08	04 33 6	52 72	
65	14 2748	17 07	05 06 0	52 69	
25,66	0,414 4455	17 08	23 05 38 4	52 72	
67	14 6163	17 08	06 10 8	52 72	
68	14 7871	17 08	06 43 2	52 72	
69	14 9579	17 08	07 15 6	52 72	
70	15 1287	17 08	07 48 0	52 72	
25,71	0,415 2995	17 08	23 08 20 4	52 72	
72	15 4703	17 08	08 52 8	52 72	
73	15 6411	17 09	09 25 2	52 75	
74	15 8120	17 08	09 57 6	52 72	
75	15 9828	17 09	10 30 0	52 75	
25,76	0,416 1537	17 09	23 11 02 4	52 75	
77	16 3246	17 09	11 34 8	52 75	
78	16 4955	17 09	12 07 2	52 75	
79	16 6664	17 09	12 39 6	52 75	
80	16 8373	17 10	13 12 0	52 78	
25,81	0,417 0083	17 09	23 13 44 4	52 75	
82	17 1792	17 10	14 16 8	52 78	
83	17 3502	17 09	14 49 2	52 75	
84	17 5211	17 10	15 21 6	52 78	
85	17 6921	17 10	15 54 0	52 78	
25,86	0,417 8631	17 10	23 16 26 4	52 78	
87	18 0341	17 10	16 58 8	52 78	
88	18 2051	17 10	17 31 2	52 78	
89	18 3761	17 11	18 03 6	52 78	
90	18 5472	17 10	18 36 0	52 78	
25,91	0,418 7182	17 11	23 19 08 4	52 81	
92	18 8893	17 10	19 40 8	52 78	
93	19 0603	17 10	20 13 2	52 78	
94	19 2314	17 11	20 45 6	52 81	
95	19 4025	17 11	21 18 0	52 81	
25,96	0,419 5736	17 11	23 21 50 4	52 81	
97	19 7447	17 12	22 22 8	52 84	
98	19 9159	17 11	22 55 2	52 81	
99	20 0870	17 12	23 27 6	52 84	
26,00	20 2582		24 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=26°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.			
26,00	0,420 2582	17 11	23 24 00 0	52 81		
26,01	0,420 4293	17 12	23 24 32 4	52 84		
02	20 6005	17 12	25 04 8	52 84		
03	20 7717	17 12	25 37 2	52 84		
04	20 9429	17 12	26 09 6	52 84		
05	21 1141	17 12	26 42 0	52 84		
26,06	0,421 2853	17 12	23 27 14 4	52 84		
07	21 4565	17 13	27 46 8	52 87		
08	21 6278	17 12	28 19 2	52 84		
09	21 7990	17 13	28 51 6	52 87		
10	21 9703	17 13	29 24 0	52 87		
26,11	0,422 1416	17 13	23 29 56 4	52 87		
12	22 3129	17 13	30 28 8	52 87		
13	22 4842	17 13	31 01 2	52 87		
14	22 6555	17 13	31 33 6	52 87		
15	22 8268	17 13	32 06 0	52 87		
26,16	0,422 9981	17 14	23 32 38 4	52 90		
17	23 1695	17 14	33 10 8	52 90		
18	23 3409	17 13	33 43 2	52 87		
19	23 5122	17 14	34 15 6	52 90		
20	23 6836	17 14	34 48 0	52 90		
26,21	0,423 8550	17 14	23 35 20 4	52 90		
22	24 0264	17 14	35 52 8	52 90		
23	24 1978	17 15	36 25 2	52 93		
24	24 3693	17 14	36 57 6	52 90		
25	24 5407	17 15	37 30 0	52 93		
26,26	0,424 7122	17 14	23 38 02 4	52 90		
27	24 8836	17 15	38 34 8	52 93		
28	25 0551	17 15	39 07 2	52 93		
29	25 2266	17 15	39 39 6	52 93		
30	25 3981	17 15	40 12 0	52 93		
26,31	0,425 5696	17 15	23 40 44 4	52 93		
32	25 7411	17 16	41 16 8	52 96		
33	25 9127	17 15	41 49 2	52 93		
34	26 0842	17 16	42 21 6	52 96		
35	26 2558	17 16	42 54 0	52 96		
26,36	0,426 4274	17 16	23 43 26 4	52 96		
37	26 5990	17 15	43 58 8	52 93		
38	26 7705	17 17	44 31 2	52 99		
39	26 9422	17 16	45 03 6	52 96		
40	27 1138	17 16	45 36 0	52 96		
26,41	0,427 2854	17 17	23 46 08 4	52 99		
42	27 4571	17 16	46 40 8	52 96		
43	27 6287	17 17	47 13 2	52 99		
44	27 8004	17 17	47 45 6	52 99		
45	27 9721	17 17	48 18 0	52 99		
26,46	0,428 1438	17 17	23 48 50 4	52 99		
47	28 3155	17 17	49 22 8	52 99		
48	28 4872	17 17	49 55 2	52 99		
49	28 6589	17 17	50 27 6	52 99		
50	28 8306		51 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=26°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.			
26,50	0,428 8306	17 18	23 51 00 0	53 02		
26,51	0,429 0024	17 18	23 51 32 4	53 02		
52	29 1742	17 17	52 04 8	52 99		
53	29 3459	17 18	52 37 2	53 02		
54	29 5177	17 18	53 09 6	53 02		
55	29 6895	17 18	53 42 0	53 02		
26,56	0,429 8613	17 19	23 54 14 4	53 06		
57	30 0332	17 18	54 46 8	53 02		
58	30 2050	17 18	55 19 2	53 02		
59	30 3768	17 19	55 51 6	53 06		
60	30 5487	17 19	56 24 0	53 06		
26,61	0,430 7206	17 18	23 56 56 4	53 02		
62	30 8924	17 19	57 28 8	53 06		
63	31 0643	17 19	58 01 2	53 06		
64	31 2362	17 20	58 33 6	53 09		
65	31 4082	17 19	59 06 0	53 06		
26,66	0,431 5801	17 19	23 59 38 4	53 06		
67	31 7520	17 20	24 00 10 8	53 09		
68	31 9240	17 20	00 43 2	53 09		
69	32 0960	17 19	01 15 6	53 06		
70	32 2679	17 20	01 48 0	53 09		
26,71	0,432 4399	17 20	24 02 20 4	53 09		
72	32 6119	17 21	02 52 8	53 12		
73	32 7840	17 20	03 25 2	53 09		
74	32 9560	17 20	03 57 6	53 09		
75	33 1280	17 21	04 30 0	53 12		
26,76	0,433 3001	17 20	24 05 02 4	53 09		
77	33 4721	17 21	05 34 8	53 12		
78	33 6442	17 21	06 07 2	53 12		
79	33 8163	17 21	06 39 6	53 12		
80	33 9884	17 21	07 12 0	53 12		
26,81	0,434 1605	17 21	24 07 44 4	53 12		
82	34 3326	17 21	08 16 8	53 12		
83	34 5048	17 21	08 49 2	53 12		
84	34 6769	17 22	09 21 6	53 15		
85	34 8491	17 22	09 54 0	53 15		
26,86	0,435 0213	17 21	24 10 26 4	53 12		
87	35 1934	17 22	10 58 8	53 15		
88	35 3656	17 22	11 31 2	53 15		
89	35 5378	17 23	12 03 6	18		
90	35 7101	17 22	12 36 0	53 15		
26,91	0,435 8823	17 22	24 13 08 4	53 15		
92	36 0545	17 23	13 40 8	53 18		
93	36 2268	17 23	14 13 2	53 18		
94	36 3991	17 22	14 45 6	53 15		
95	36 5713	17 23	15 18 0	53 18		
26,96	0,436 7436	17 23	24 15 50 4	53 18		
97	36 9159	17 24	16 22 8	53 21		
98	37 0883	17 23	16 55 2	53 18		
99	37 2606	17 23	17 27 6	53 18		
27,00	37 4329		18 00 0			

N. E. $k=27°$	Q. k.	Alte Einth. D. 1″.	Alte Einth. D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.
27,00	0,437 4329	17 24	24 18 00 0 53 21
27,01	0,437 6053	17 24	24 18 32 4 53 21
02	37 7777	17 23	19 04 8 53 18
03	37 9500	17 24	19 37 2 53 21
04	38 1224	17 24	20 09 6 53 21
05	38 2948	17 25	20 42 0 53 24
27,06	0,438 4673	17 24	24 21 14 4 53 21
07	38 6397	17 24	21 46 8 53 21
08	38 8121	17 25	22 19 2 53 24
09	38 9846	17 24	22 51 6 53 21
10	39 1570	17 25	23 24 0 53 24
27,11	0,439 3295	17 25	24 23 56 4 53 24
12	39 5020	17 22	24 28 8 53 24
13	39 6745	17 25	25 01 2 53 24
14	39 8470	17 22	25 33 6 53 24
15	40 0195	17 26	26 06 0 53 27
27,16	0,440 1921	17 25	24 26 38 4 53 24
17	40 3646	17 26	27 10 8 53 27
18	40 5372	17 26	27 43 2 53 27
19	40 7098	17 26	28 15 6 53 27
20	40 8824	17 26	28 48 0 53 27
27,21	0,441 0550	17 26	24 29 20 4 53 27
22	41 2276	17 26	29 52 8 53 27
23	41 4002	17 27	30 25 2 53 30
24	41 5729	17 26	30 57 6 53 27
25	41 7455	17 27	31 30 0 53 30
27,26	0,441 9182	17 26	24 32 02 4 53 27
27	42 0908	17 27	32 34 8 53 30
28	42 2635	17 27	33 07 2 53 30
29	42 4362	17 27	33 39 6 53 30
30	42 6089	17 28	34 12 0 53 33
27,31	0,442 7817	17 27	24 34 44 4 53 30
32	42 9544	17 27	35 16 8 53 30
33	43 1271	17 27	35 49 2 53 30
34	43 2999	17 28	36 21 6 53 33
35	43 4727	17 28	36 54 0 53 33
27,36	0,443 6455	17 28	24 37 26 4 53 33
37	43 8183	17 28	37 58 8 53 33
38	43 9911	17 28	38 31 2 53 33
39	44 1639	17 29	39 03 6 53 36
40	44 3368	17 28	39 36 0 53 33
27,41	0,444 5096	17 29	24 40 08 4 53 36
42	44 6825	17 28	40 40 8 53 33
43	44 8553	17 29	41 13 2 53 36
44	45 0282	17 29	41 45 6 53 36
45	45 2011	17 29	42 18 0 53 36
27,46	0,445 3740	17 30	24 42 50 4 53 40
47	45 5470	17 29	43 22 8 53 36
48	45 7199	17 29	43 55 2 53 36
49	45 8928	17 30	44 27 6 53 40
50	46 0658		45 00 0

N. E. $k=27°$	Q. k.	Alte Einth. D. 1″.	Alte Einth. D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.
27,50	0,446 0658	17 30	24 45 00 0 53 40
27,51	0,446 2388	17 30	24 45 32 4 53 40
52	46 4118	17 30	46 04 8 53 40
53	46 5848	17 30	46 37 2 53 40
54	46 7578	17 30	47 09 6 53 40
55	46 9308	17 30	47 42 0 53 40
27,56	0,447 1038	17 31	24 48 14 4 53 43
57	47 2769	17 31	48 46 8 53 43
58	47 4500	17 30	49 19 2 53 40
59	47 6230	17 31	49 51 6 53 43
60	47 7961	17 31	50 24 0 53 43
27,61	0,447 9692	17 31	24 50 56 4 53 43
62	48 1423	17 32	51 28 8 53 46
63	48 3155	17 31	52 01 2 53 43
64	48 4886	17 31	52 33 6 53 43
65	48 6617	17 32	53 06 0 53 46
27,66	0,448 8349	17 32	24 53 38 4 53 46
67	49 0081	17 32	54 10 8 53 46
68	49 1813	17 32	54 43 2 53 46
69	49 3545	17 32	55 15 6 53 46
70	49 5277	17 32	55 48 0 53 46
27,71	0,449 7009	17 32	24 56 20 4 53 46
72	49 8741	17 33	56 52 8 53 49
73	50 0474	17 32	57 25 2 53 46
74	50 2206	17 33	57 57 6 53 49
75	50 3939	17 33	58 30 0 53 49
27,76	0,450 5672	17 33	24 59 02 4 53 49
77	50 7405	17 33	24 59 34 8 53 49
78	50 9138	17 34	25 00 07 2 53 52
79	51 0872	17 33	00 39 6 53 49
80	51 2605	17 34	01 12 0 53 52
27,81	0,451 4339	17 33	25 01 44 4 53 49
82	51 6072	17 34	02 16 8 53 52
83	51 7806	17 34	02 49 2 53 52
84	51 9540	17 34	03 21 6 53 52
85	52 1274	17 34	03 54 0 53 52
27,86	0,452 3008	17 34	25 04 26 4 53 52
87	52 4742	17 35	04 58 8 53 55
88	52 6477	17 34	05 31 2 53 52
89	52 8211	17 35	06 03 6 53 55
90	52 9946	17 35	06 36 0 53 55
27,91	0,453 1681	17 35	25 07 08 4 53 55
92	53 3416	17 35	07 40 8 53 55
93	53 5151	17 35	08 13 2 53 55
94	53 6886	17 35	08 45 6 53 55
95	53 8621	17 36	09 18 0 53 58
27,96	0,454 0357	17 35	25 09 50 4 53 55
97	54 2092	17 36	10 22 8 53 58
98	54 3828	17 36	10 55 2 53 58
99	54 5564	17 36	11 27 6 53 58
28,00	54 7300		12 00 0

N. E.		Alte Einth.		N. E.		Alte Einth.	
$k=28°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.	$k=28°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	Gr. M.			Gr. M. S.
28,00	0,454 7300	17 36	25 12 00 0 53 58	28,50	0,463 4262	17 43	25 39 00 0 53 80
82,01	0,454 9036	17 36	25 12 32 4 53 58	28,51	0,463 6005	17 43	25 39 32 4 53 80
02	55 0772	17 37	13 04 8 53 61	52	63 7748	17 42	40 04 8 53 77
03	55 2509	17 36	13 37 2 53 58	53	63 9490	17 43	40 37 2 53 80
04	55 4245	17 37	14 09 6 53 61	54	64 1233	17 44	41 09 6 53 83
05	55 5982	17 36	14 42 0 53 58	55	64 2977	17 43	41 42 0 53 80
28,06	0,455 7718	17 37	25 15 14 4 53 61	28,56	0,464 4720	17 43	25 42 14 4 53 80
07	55 9455	17 37	15 46 8 53 61	57	64 6463	17 44	42 46 8 53 83
08	56 1192	17 37	16 19 2 53 61	58	64 8207	17 43	43 19 2 53 80
09	56 2929	17 37	16 51 6 53 61	59	64 9950	17 44	43 51 6 53 83
10	56 4666	17 38	17 24 0 53 64	60	65 1694	17 44	44 24 0 53 83
28,11	0,456 6404	17 37	25 17 56 4 53 61	28,61	0,465 3438	17 44	25 44 56 4 53 83
12	56 8141	17 38	18 28 8 53 64	62	65 5182	17 44	45 28 8 53 83
13	56 9879	17 38	19 01 2 53 64	63	65 6926	17 45	46 01 2 53 86
14	57 1617	17 38	19 33 6 53 64	64	65 8671	17 44	46 33 6 53 83
15	57 3355	17 38	20 06 0 53 64	65	66 0415	17 45	47 06 0 53 86
28,16	0,457 5093	17 38	25 20 38 4 53 64	28,66	0,466 2160	17 44	25 47 38 4 53 83
17	57 6831	17 38	21 10 8 53 64	67	66 3904	17 45	48 10 8 53 86
18	57 8569	17 39	21 43 2 53 67	68	66 5649	17 45	48 43 2 53 86
19	58 0308	17 38	22 15 6 53 64	69	66 7394	17 45	49 15 6 53 86
20	58 2046	17 39	22 48 0 53 67	70	66 9139	17 45	49 48 0 53 86
28,21	0,458 3785	17 38	25 23 20 4 53 64	28,71	0,467 0884	17 46	25 50 20 4 53 89
22	58 5523	17 39	23 52 8 53 67	72	67 2630	17 45	50 52 8 53 86
23	58 7262	17 39	24 25 2 53 67	73	67 4375	17 46	51 25 2 53 89
24	58 9001	17 40	24 57 6 53 70	74	67 6121	17 45	51 57 6 53 86
25	59 0741	17 39	25 30 0 53 67	75	67 7866	17 46	52 30 0 53 89
28,26	0,459 2480	17 39	25 26 02 4 53 67	28,76	0,467 9612	17 46	25 53 02 4 53 89
27	59 4219	17 40	26 34 8 53 70	77	68 1358	17 46	53 34 8 53 89
28	59 5959	17 40	27 07 2 53 70	78	68 3104	17 47	54 07 2 53 92
29	59 7699	17 39	27 39 6 53 67	79	68 4851	17 46	54 39 6 53 89
30	59 9438	17 40	28 12 0 53 70	80	68 6597	17 47	55 12 0 53 92
28,31	0,460 1178	17 41	25 28 44 4 53 73	28,81	0,468 8344	17 47	25 55 44 4 53 92
32	60 2919	17 40	29 16 8 53 70	82	69 0091	17 46	56 16 8 53 89
33	60 4659	17 40	29 49 2 53 70	83	69 1837	17 47	56 49 2 53 92
34	60 6399	17 41	30 21 6 53 73	84	69 3584	17 47	57 21 6 53 92
35	60 8140	17 40	30 54 0 53 70	85	69 5331	17 48	57 54 0 53 95
28,36	0,460 9880	17 41	25 31 26 4 53 73	28,86	0,469 7079	17 47	25 58 26 4 53 92
37	61 1621	17 41	31 58 8 53 73	87	69 8826	17 47	58 58 8 53 92
38	61 3362	17 41	32 31 2 53 73	88	70 0573	17 48	59 31 2 53 95
39	61 5103	17 41	33 03 6 53 73	89	70 2321	17 48	00 03 6 53 95
40	61 6844	17 41	33 36 0 53 73	90	70 4069	17 48	00 36 0 53 95
28,41	0,461 8585	17 42	25 34 08 4 53 77	28,91	0,470 5817	17 48	25 01 08 4 53 95
42	62 0327	17 41	34 40 8 53 73	92	70 7565	17 48	01 40 8 53 95
43	62 2068	17 42	35 13 2 53 77	93	70 9313	17 48	02 13 2 53 95
44	62 3810	17 42	35 45 6 53 77	94	71 1051	17 48	02 45 6 53 95
45	62 5552	17 41	36 18 0 53 73	95	71 2809	17 48	03 18 0 53 95
28,46	0,462 7293	17 43	25 36 50 4 53 80	28,96	0,471 4558	17 49	25 03 50 4 53 98
47	62 9036	17 42	37 22 8 53 77	97	71 6307	17 49	04 22 8 53 98
48	63 0778	17 42	37 55 2 53 77	98	71 8056	17 49	04 55 2 53 98
49	63 2520	17 42	38 27 6 53 77	99	71 9805	17 49	05 27 6 53 98
50	63 4262		39 00 0	29,00	72 1554		06 00 0

N. E. $k=29°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.		D. 1″.	N. E. $k=29°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
29,00	0,472 1554	17 49	26 06 00 0	53 98	29,50	0,480 9181	17 56	26 33 00 0	54 20
29,01	0,472 3303	17 49	26 06 32 4	53 98	29,51	0,481 0937	17 57	26 33 32 4	54 23
02	72 5052	17 50	07 04 8	54 01	52	81 2694	17 56	34 04 8	54 20
03	72 6802	17 49	07 37 2	53 98	53	81 4450	17 56	34 37 2	54 20
04	72 8551	17 50	08 09 6	54 01	54	81 6206	17 57	35 09 6	54 23
05	73 0301	17 50	08 42 0	54 01	55	81 7963	17 57	35 42 0	54 23
29,06	0,473 2051	17 50	26 09 14 4	54 01	29,56	0,481 9720	17 57	26 36 14 4	54 23
07	73 3801	17 50	09 46 8	54 01	57	82 1477	17 57	36 46 8	54 23
08	73 5551	17 51	10 19 2	54 04	58	82 3234	17 57	37 19 2	54 23
09	73 7302	17 50	10 51 6	54 01	59	82 4991	17 57	37 51 6	54 23
10	73 9052	17 51	11 24 0	54 04	60	82 6748	17 58	38 24 0	54 23
29,11	0,474 0803	17 50	26 11 56 4	54 01	29,61	0,482 8505	17 58	26 38 56 4	54 26
12	74 2553	17 51	12 28 8	54 04	62	83 0263	17 58	39 28 8	54 26
13	74 4304	17 51	13 01 2	54 04	63	83 2021	17 58	40 01 2	54 26
14	74 6055	17 51	13 33 6	54 04	64	83 3779	17 58	40 33 6	54 26
15	74 7806	17 52	14 06 0	54 07	65	83 5537	17 58	41 06 0	54 26
29,16	0,474 9558	17 51	26 14 38 4	54 04	29,66	0,483 7295	17 58	26 41 38 4	54 26
17	75 1309	17 51	15 10 8	54 04	67	83 9053	17 58	42 10 8	54 26
18	75 3060	17 52	15 43 2	54 07	68	84 0811	17 59	42 43 2	54 29
19	75 4812	17 52	16 15 6	54 07	69	84 2570	17 58	43 15 6	54 26
20	75 6564	17 52	16 48 0	54 07	70	84 4328	17 59	43 48 0	54 29
29,21	0,475 8316	17 52	26 17 20 4	54 07	29,71	0,484 6087	17 59	26 44 20 4	54 29
22	76 0068	17 52	17 52 8	54 07	72	84 7846	17 59	44 52 8	54 29
23	76 1820	17 52	18 25 2	54 07	73	84 9605	17 60	45 25 2	54 32
24	76 3572	17 53	18 57 6	54 10	74	85 1365	17 59	45 57 6	54 29
25	76 5325	17 53	19 30 0	54 10	75	85 3124	17 59	46 30 0	54 29
29,26	0,476 7078	17 52	26 20 02 4	54 07	29,76	0,485 4883	17 60	26 47 02 4	54 32
27	76 8830	17 53	20 34 8	54 10	77	85 6643	17 60	47 34 8	54 32
28	77 0583	17 53	21 07 2	54 10	78	85 8403	17 60	48 07 2	54 32
29	77 2336	17 53	21 39 6	54 10	79	86 0163	17 60	48 39 6	54 32
30	77 4089	17 53	22 12 0	54 10	80	86 1923	17 60	49 12 0	54 32
29,31	0,477 5842	17 54	26 22 44 4	54 14	29,81	0,486 3683	17 61	26 49 44 4	54 35
32	77 7596	17 54	23 16 8	54 14	82	86 5444	17 60	50 16 8	54 32
33	77 9350	17 53	23 49 2	54 10	83	86 7204	17 61	50 49 2	54 35
34	78 1103	17 54	24 21 6	54 14	84	86 8965	17 60	51 21 6	54 32
35	78 2857	17 54	24 54 0	54 14	85	87 0725	17 61	51 54 0	54 35
29,36	0,478 4611	17 54	26 25 26 4	54 14	29,86	0,487 2486	17 61	26 52 26 4	54 35
37	78 6365	17 55	25 58 8	54 17	87	87 4247	17 62	52 58 8	54 38
38	78 8120	17 54	26 31 2	54 14	88	87 6009	17 61	53 31 2	54 35
39	78 9874	17 55	27 03 6	54 17	89	87 7770	17 61	54 03 6	54 35
40	79 1629	17 54	27 36 0	54 14	90	87 9531	17 62	54 36 0	54 38
29,41	0,479 3383	17 55	26 28 08 4	54 17	29,91	0,488 1293	17 62	26 55 08 4	54 38
42	79 5138	17 55	28 40 8	54 17	92	88 3055	17 62	55 40 8	54 38
43	79 6893	17 55	29 13 2	54 17	93	88 4817	17 62	56 13 2	54 38
44	79 8648	17 55	29 45 6	54 17	94	88 6579	17 62	56 45 6	54 38
45	80 0403	17 56	30 18 0	54 20	95	88 8341	17 62	57 18 0	54 38
29,46	0,480 2159	17 55	26 30 50 4	54 17	29,96	0,489 0103	17 63	26 57 50 4	54 41
47	80 3914	17 56	31 22 8	54 20	97	89 1866	17 62	58 22 8	54 38
48	80 5670	17 55	31 55 2	54 17	98	89 3628	17 63	58 55 2	54 41
49	80 7425	17 56	32 27 6	54 20	99	89 5391	17 63	26 59 27 6	54 41
50	80 9181		33 00 0		30,00	89 7154		27 00 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=30°$	L. k.	D. 1″.			D. 1″.	$k=30°$	L. k.	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			Gr. M.			Gr. M. S.		
30,00	0,489 7154	17 63	27 00 00 0	54 41		30,50	0,498 5479	17 70	27 27 00 0	54 63	
30,01	0,489 8917	17 63	27 00 32 4	54 41		30,51	0,498 7249	17 70	27 27 32 4	54 63	
02	90 0680	17 63	01 04 8	54 41		52	98 9019	17 71	28 04 8	54 66	
03	90 2443	17 64	01 37 2	54 44		53	99 0790	17 70	28 37 2	54 63	
04	90 4207	17 63	02 09 6	54 41		54	99 2560	17 71	29 09 6	54 66	
05	90 5970	17 64	02 42 0	54 44		55	99 4331	17 71	29 42 0	54 66	
30,06	0,490 7734	17 64	27 03 14 4	54 44		30,56	0,499 6102	17 71	27 30 14 4	54 66	
07	90 9498	17 64	03 46 8	54 44		57	99 7873	17 71	30 46 8	54 66	
08	91 1262	17 64	04 19 2	54 44		58	0,499 9644	17 71	31 19 2	54 66	
09	91 3026	17 64	04 51 6	54 44		59	0,500 1415	17 72	31 51 6	54 69	
10	91 4790	17 65	05 24 0	54 48		60	00 3187	17 71	32 24 0	54 66	
30,11	0,491 6555	17 64	27 05 56 4	54 44		30,61	0,500 4958	17 72	27 32 56 4	54 69	
12	91 8319	17 65	06 28 8	54 48		62	00 6730	17 72	33 28 8	54 69	
13	92 0084	17 65	07 01 2	54 48		63	00 8502	17 72	34 01 2	54 69	
14	92 1849	17 65	07 33 6	54 48		64	01 0274	17 72	34 33 6	54 69	
15	92 3614	17 65	08 06 0	54 48		65	01 2046	17 73	35 06 0	54 72	
30,16	0,492 5379	17 65	27 08 38 4	54 48		30,66	0,501 3819	17 72	27 35 38 4	54 69	
17	92 7144	17 66	09 10 8	54 51		67	01 5591	17 73	36 10 8	54 72	
18	92 8910	17 65	09 43 2	54 48		68	01 7364	17 72	36 43 2	54 69	
19	93 0675	17 66	10 15 6	54 51		69	01 9136	17 73	37 15 6	54 72	
20	93 2441	17 66	10 48 0	54 51		70	02 0909	17 73	37 48 0	54 72	
30,21	0,493 4207	17 66	27 11 20 4	54 51		30,71	0,502 2682	17 74	27 38 20 4	54 75	
22	93 5973	17 66	11 52 8	54 51		72	02 4456	17 73	38 52 8	54 72	
23	93 7739	17 66	12 25 2	54 51		73	02 6229	17 73	39 25 2	54 72	
24	93 9505	17 67	12 57 6	54 54		74	02 8002	17 74	39 57 6	54 75	
25	94 1272	17 66	13 30 0	54 51		75	02 9776	17 74	40 30 0	54 75	
30,26	0,494 3038	17 67	27 14 02 4	54 54		30,76	0,503 1550	17 74	27 41 02 4	54 75	
27	94 4805	17 67	14 34 8	54 54		77	03 3324	17 74	41 34 8	54 75	
28	94 6572	17 67	15 07 2	54 54		78	03 5098	17 74	42 07 2	54 75	
29	94 8339	17 67	15 39 6	54 54		79	03 6872	17 75	42 39 6	54 78	
30	95 0106	17 67	16 12 0	54 54		80	03 8647	17 74	43 12 0	54 75	
30,31	0,495 1873	17 67	27 16 44 4	54 54		30,81	0,504 0421	17 75	27 43 44 4	54 78	
32	95 3640	17 68	17 16 8	54 57		82	04 2196	17 75	44 16 8	54 78	
33	95 5408	17 68	17 49 2	54 57		83	04 3971	17 75	44 49 2	54 78	
34	95 7176	17 68	18 21 6	54 57		84	04 5746	17 75	45 21 6	54 78	
35	95 8944	17 68	18 54 0	54 57		85	04 7521	17 75	45 54 0	54 78	
30,36	0,496 0712	17 68	27 19 26 4	54 57		30,86	0,504 9296	17 75	27 46 26 4	54 78	
37	96 2480	17 68	19 58 8	54 57		87	05 1071	17 76	46 58 8	54 81	
38	96 4248	17 68	20 31 2	54 57		88	05 2847	17 75	47 31 2	54 78	
39	96 6016	17 69	21 03 6	54 60		89	05 4622	17 76	48 03 6	54 81	
40	96 7785	17 69	21 36 0	54 60		90	05 6398	17 76	48 36 0	54 81	
30,41	0,496 9554	17 69	27 22 08 4	54 60		30,91	0,505 8174	17 76	27 49 08 4	54 81	
42	97 1323	17 69	22 40 8	54 60		92	05 9950	17 77	49 40 8	54 85	
43	97 3092	17 69	23 13 2	54 60		93	06 1727	17 76	50 13 2	54 81	
44	97 4861	17 69	23 45 6	54 60		94	06 3503	17 77	50 45 6	54 85	
45	97 6630	17 70	24 18 0	54 63		95	06 5280	17 77	51 18 0	54 85	
30,46	0,497 8400	17 69	27 24 50 4	54 60		30,96	0,506 7057	17 76	27 51 50 4	54 81	
47	98 0169	17 70	25 22 8	54 63		97	06 8833	17 77	52 22 8	54 85	
48	98 1939	17 70	25 55 2	54 63		98	07 0610	17 78	52 55 2	54 88	
49	98 3709	17 70	26 27 6	54 63		99	07 2388	17 77	53 27 6	54 85	
50	98 5479		27 00 0			31,00	07 4165		54 00 0		

N. E.		Alte Einth.				N. E.		Alte Einth.			
$k=31°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	$k=31°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			Gr. M.			Gr. M. S.		
31,00	0,507 4165	17 77	27 54 00 0	54 85		31,50	0,516 3221	17 85	28 21 00 0	55 09	
31,01	0,507 5942	17 78	27 54 32 4	54 88		31,51	0,516 5006	17 85	28 21 32 4	55 09	
02	07 7720	17 78	55 04 8	54 88		52	16 6791	17 85	22 04 8	55 09	
03	07 9498	17 78	55 37 2	54 88		53	16 8576	17 85	22 37 2	55 09	
04	08 1276	17 78	56 09 6	54 88		54	17 0361	17 86	23 09 6	55 12	
05	08 3054	17 78	56 42 0	54 88		55	17 2147	17 85	23 42 0	55 09	
31,06	0,508 4832	17 78	27 57 14 4	54 88		31,56	0,517 3932	17 86	28 24 14 4	55 12	
07	08 6610	17 79	57 46 8	54 91		57	17 5718	17 86	24 46 8	55 12	
08	08 8389	17 78	58 19 2	54 88		58	17 7504	17 87	25 19 2	55 15	
09	09 0167	17 79	58 51 6	54 91		59	17 9291	17 86	25 51 6	55 12	
10	09 1946	17 79	59 24 0	54 91		60	18 1077	17 86	26 24 0	55 12	
31,11	0,509 3725	17 79	27 59 56 4	54 91		31,61	0,518 2863	17 87	28 26 56 4	55 15	
12	09 5504	17 80	28 00 28 8	54 94		62	18 4650	17 87	27 28 8	55 15	
13	09 7284	17 79	01 01 2	54 91		63	18 6437	17 87	28 01 2	55 15	
14	09 9063	17 80	01 33 6	54 94		64	18 8224	17 87	28 33 6	55 15	
15	10 0843	17 79	02 06 0	54 91		65	19 0011	17 87	29 06 0	55 15	
31,16	0,510 2622	17 80	28 02 38 4	54 94		31,66	0,519 1798	17 87	28 29 38 4	55 15	
17	10 4402	17 80	03 10 8	54 94		67	19 3585	17 88	30 10 8	55 19	
18	10 6182	17 80	03 43 2	54 94		68	19 5373	17 87	30 43 2	55 15	
19	10 7962	17 80	04 15 6	54 94		69	19 7160	17 88	31 15 6	55 19	
20	10 9742	17 81	04 48 0	54 97		70	19 8948	17 88	31 48 0	55 19	
31,21	0,511 1523	17 80	28 05 20 4	54 94		31,71	0,520 0736	17 88	28 32 20 4	55 19	
22	11 3303	17 81	05 52 8	54 97		72	20 2524	17 89	32 52 8	55 22	
23	11 5084	17 81	06 25 2	54 97		73	20 4313	17 88	33 25 2	55 19	
24	11 6865	17 81	06 57 6	54 97		74	20 6101	17 89	33 57 6	55 22	
25	11 8646	17 81	07 30 0	54 97		75	20 7890	17 88	34 30 0	55 19	
31,26	0,512 0427	17 82	28 08 02 4	55 00		31,76	0,520 9678	17 89	28 35 02 4	55 22	
27	12 2209	17 81	08 34 8	54 97		77	21 1467	17 89	35 34 8	55 22	
28	12 3990	17 82	09 07 2	55 00		78	21 3256	17 90	36 07 2	55 25	
29	12 5772	17 81	09 39 6	54 97		79	21 5046	17 89	36 39 6	55 22	
30	12 7553	17 82	10 12 0	55 00		80	21 6835	17 90	37 12 0	55 25	
31,31	0,512 9335	17 82	28 10 44 4	55 00		31,81	0,521 8625	17 89	28 37 44 4	55 22	
32	13 1117	17 83	11 16 8	55 03		82	22 0414	17 90	38 16 8	55 25	
33	13 2900	17 82	11 49 2	55 00		83	22 2204	17 90	38 49 2	55 25	
34	13 4682	17 83	12 21 6	55 03		84	22 3994	17 90	39 21 6	55 25	
35	13 6465	17 82	12 54 0	55 00		85	22 5784	17 90	39 54 0	55 25	
31,36	0,513 8247	17 83	28 13 26 4	55 03		31,86	0,522 7574	17 91	28 40 26 4	55 28	
37	14 0030	17 83	13 58 8	55 03		87	22 9365	17 90	40 58 8	55 25	
38	14 1813	17 83	14 31 2	55 03		88	23 1155	17 91	41 31 2	55 28	
39	14 3596	17 84	15 03 6	55 06		89	23 2946	17 91	42 03 6	55 28	
40	14 5380	17 83	15 36 0	55 03		90	23 4737	17 91	42 36 0	55 28	
31,41	0,514 7163	17 84	28 16 08 4	55 06		31,91	0,523 6528	17 91	28 43 08 4	55 28	
42	15 8947	17 83	16 40 8	55 03		92	23 8319	17 92	43 40 8	55 31	
43	15 0730	17 84	17 13 2	55 06		93	24 0111	17 91	44 13 2	55 28	
44	15 2514	17 84	17 45 6	55 06		94	24 1902	17 92	44 45 6	55 31	
45	15 4298	17 84	18 18 0	55 06		95	24 3694	17 92	45 18 0	55 31	
31,46	0,515 6082	17 85	28 18 50 4	55 09		31,96	0,524 5486	17 92	28 45 50 4	55 31	
47	15 7867	17 84	19 22 8	55 06		97	24 7278	17 92	46 22 8	55 31	
48	15 9651	17 85	19 55 2	55 09		98	24 9070	17 92	46 55 2	55 31	
49	16 1436	17 85	20 27 6	55 09		99	25 0862	17 93	47 27 6	55 34	
50	16 3221		21 00 0			32,00	25 2655		48 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=32°$	L. k.	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
32,00	0,525 2655	17 92	28 48 00 0	55 31	
32,01	0,525 4447	17 93	28 48 32 4	55 34	
02	25 6240	17 93	49 04 8	55 34	
03	25 8033	17 93	49 37 2	55 34	
04	25 9826	17 93	50 09 6	55 34	
05	26 1619	17 93	50 42 0	55 34	
32,06	0,526 3412	17 94	28 51 14 4	55 37	
07	26 5206	17 94	51 46 8	55 37	
08	26 7000	17 93	52 19 2	55 34	
09	26 8793	17 94	52 51 6	55 37	
10	27 0587	17 94	53 24 0	55 37	
32,11	0,527 2381	17 95	28 53 56 4	55 40	
12	27 4176	17 94	54 28 8	55 37	
13	27 5970	17 95	55 01 2	55 40	
14	27 7765	17 95	55 33 6	55 40	
15	27 9560	17 95	56 06 0	55 40	
32,16	0,528 1355	17 95	28 56 38 4	55 40	
17	28 3150	17 95	57 10 8	55 40	
18	28 4945	17 95	57 43 2	55 40	
19	28 6740	17 96	58 15 6	55 43	
20	28 8536	17 96	58 48 0	55 43	
32,21	0,529 0332	17 96	28 59 20 4	55 43	
22	29 2128	17 96	28 59 52 8	55 43	
23	29 3924	17 96	29 00 25 2	55 43	
24	29 5720	17 96	00 57 6	55 43	
25	29 7516	17 97	01 30 0	55 46	
32,26	0,529 9313	17 96	29 02 02 4	55 43	
27	30 1109	17 97	02 34 8	55 46	
28	30 2906	17 97	03 07 2	55 46	
29	30 4703	17 97	03 39 6	55 46	
30	30 6500	17 97	04 12 0	55 46	
32,31	0,530 8297	17 98	29 04 44 4	55 49	
32	31 0095	17 97	05 16 8	55 46	
33	31 1892	17 98	05 49 2	55 49	
34	31 3690	17 98	06 21 6	55 49	
35	31 5488	17 98	06 54 0	55 49	
32,36	0,531 7286	17 98	29 07 26 4	55 49	
37	31 9084	17 98	07 58 8	55 49	
38	32 0882	17 99	08 31 2	55 52	
39	32 2681	17 99	09 03 6	55 52	
40	32 4480	17 99	09 36 0	55 52	
32,41	0,532 6279	17 99	29 10 08 4	55 52	
42	32 8078	17 99	10 40 8	55 52	
43	32 9877	17 99	11 13 2	55 52	
44	33 1676	18 00	11 45 6	55 56	
45	33 3476	17 99	12 18 0	55 52	
32,46	0,533 5275	18 00	29 12 50 4	55 56	
47	33 7075	18 00	13 22 8	55 56	
48	33 8875	18 00	13 55 2	55 56	
49	34 0675	18 00	14 27 6	55 56	
50	34 2475		15 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=32°$	L. k.	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
32,50	0,534 2475	18 01	29 15 00 0	55 59	
32,51	0,534 4276	18 00	29 15 32 4	55 56	
52	34 6076	18 01	16 04 8	55 59	
53	34 7877	18 01	16 37 2	55 59	
54	34 9678	18 01	17 09 6	55 59	
55	35 1479	18 01	17 42 0	55 59	
32,56	0,535 3280	18 02	29 18 14 4	55 62	
57	35 5082	18 01	18 46 8	55 59	
58	35 6883	18 02	19 19 2	55 62	
59	35 8685	18 02	19 51 6	55 62	
60	36 0487	18 02	20 24 0	55 62	
32,61	0,536 2289	18 02	29 20 56 4	55 62	
62	36 4091	18 02	21 28 8	55 62	
63	36 5893	18 03	22 01 2	55 65	
64	36 7696	18 03	22 33 6	55 65	
65	36 9499	18 02	23 06 0	55 62	
32,66	0,537 1301	18 03	29 23 38 4	55 65	
67	37 3104	18 03	24 10 8	55 65	
68	37 4907	18 04	24 43 2	55 68	
69	37 6711	18 03	25 15 6	55 65	
70	37 8514	18 04	25 48 0	55 68	
32,71	0,538 0318	18 04	29 26 20 4	55 68	
72	38 2122	18 04	26 52 8	55 68	
73	38 3926	18 04	27 25 2	55 68	
74	38 5730	18 04	27 57 6	55 68	
75	38 7534	18 04	28 30 0	55 68	
32,76	0,538 9338	18 05	29 29 02 4	55 71	
77	39 1143	18 05	29 34 8	55 71	
78	39 2948	18 04	30 07 2	55 68	
79	39 4752	18 06	30 39 6	55 74	
80	39 6558	18 05	31 12 0	55 71	
32,81	0,539 8363	18 05	29 31 44 4	55 71	
82	40 0168	18 06	32 16 8	55 74	
83	40 1974	18 05	32 49 2	55 71	
84	40 3779	18 06	33 21 6	55 74	
85	40 5585	18 06	33 54 0	55 74	
32,86	0,540 7391	18 06	29 34 26 4	55 74	
87	40 9197	18 07	34 58 8	55 77	
88	41 1004	18 06	35 31 2	55 74	
89	41 2810	18 07	36 03 6	55 77	
90	41 4617	18 07	36 36 0	55 77	
32,91	0,541 6424	18 07	29 37 08 4	55 77	
92	41 8231	18 07	37 40 8	55 77	
93	42 0038	18 07	38 13 2	55 77	
94	42 1845	18 08	38 45 6	55 80	
95	42 3653	18 07	39 18 0	55 77	
32,96	0,542 5460	18 08	29 39 50 4	55 80	
97	42 7268	18 08	40 22 8	55 80	
98	42 9076	18 08	40 55 2	55 80	
99	43 0884	18 08	41 27 6	55 80	
33,00	43 2692		42 00 0		

N. E. $k=33°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.	D. 1″.
Gr. M.				
33,00	0,543 2692	18 09	29 42 00 0	55 83
33,01	0,543 4501	18 08	29 42 32 4	55 80
02	43 6309	18 09	43 04 8	55 83
03	43 8118	18 09	43 37 2	55 83
04	43 9927	18 09	44 09 6	55 83
05	44 1736	18 09	44 42 0	55 83
33,06	0,544 3545	18 10	29 45 14 4	55 86
07	44 5355	18 09	45 46 8	55 83
08	44 7164	18 10	46 19 2	55 86
09	44 8974	18 10	46 51 6	55 86
10	45 0784	18 10	47 24 0	55 86
33,11	0,545 2594	18 10	29 47 56 4	55 86
12	45 4404	18 11	48 28 8	55 90
13	45 6215	18 10	49 01 2	55 86
14	45 8025	18 11	49 33 6	55 90
15	45 9836	18 11	50 06 0	55 90
33,16	0,546 1647	18 11	29 50 38 4	55 90
17	46 3458	18 11	51 10 8	55 90
18	46 5269	18 11	51 43 2	55 90
19	46 7080	18 12	52 15 6	55 93
20	46 8892	18 12	52 48 0	55 93
33,21	0,547 0704	18 12	29 53 20 4	55 93
22	47 2516	18 12	53 52 8	55 93
23	47 4328	18 12	54 25 2	55 93
24	47 6140	18 12	54 57 6	55 93
25	47 7952	18 13	55 30 0	55 96
33,26	0,547 9765	18 12	29 56 02 4	55 93
27	48 1577	18 13	56 34 8	55 96
28	48 3390	18 13	57 07 2	55 96
29	48 5203	18 13	57 39 6	55 96
30	48 7016	18 14	58 12 0	55 96
33,31	0,548 8830	18 13	29 58 44 4	55 96
32	49 0643	18 14	59 16 8	55 99
33	49 2457	18 13	29 59 49 2	55 96
34	49 4270	18 15	30 00 21 6	56 02
35	49 6085	18 14	00 54 0	55 99
33,36	0,549 7899	18 14	30 01 26 4	55 99
37	49 9713	18 15	01 58 8	56 02
38	50 1528	18 14	02 31 2	55 99
39	50 3342	18 15	03 03 6	56 02
40	50 5157	18 15	03 36 0	56 02
33,41	0,550 6972	18 15	30 04 08 4	56 02
42	50 8787	18 16	04 40 8	56 05
43	51 0603	18 15	05 13 2	56 02
44	51 2418	18 16	05 45 6	56 05
45	51 4234	18 15	06 18 0	56 02
33,46	0,551 6049	18 16	30 06 50 4	56 05
47	51 7865	18 16	07 22 8	56 05
48	51 9681	18 17	07 55 2	56 08
49	52 1498	18 16	08 27 6	56 05
50	52 3314		09 00 0	

N. E. $k=33°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.	D. 1″.
Gr. M.				
33,50	0,552 3314	18 17	30 09 00 0	56 08
33,51	0,552 5131	18 17	30 09 32 4	56 08
52	52 6948	18 17	10 04 8	56 08
53	52 8765	18 17	10 37 2	56 08
54	53 0582	18 17	11 09 6	56 08
55	53 2399	18 18	11 42 0	56 11
33,56	0,553 4217	18 17	30 12 14 4	56 08
57	53 6034	18 18	12 46 8	56 11
58	53 7852	18 18	13 19 2	56 11
59	53 9670	18 18	13 51 6	56 11
60	54 1488	18 18	14 24 0	56 11
33,61	0,554 3306	18 19	30 14 56 4	56 14
62	54 5125	18 18	15 28 8	56 11
63	54 6943	18 19	16 01 2	56 14
64	54 8762	18 19	16 33 6	56 14
65	55 0581	18 19	17 06 0	56 14
33,66	0,555 2400	18 20	30 17 38 4	56 17
67	55 4220	18 19	18 10 8	56 14
68	55 6039	18 20	18 43 2	56 17
69	55 7859	18 20	19 15 6	56 17
70	55 9679	18 20	19 48 0	56 17
33,71	0,556 1498	18 21	30 20 20 4	56 20
72	56 3319	18 20	20 52 8	56 17
73	56 5139	18 20	21 25 2	56 17
74	56 6959	18 21	21 57 6	56 20
75	56 8780	18 21	22 30 0	56 20
33,76	0,557 0601	18 21	30 23 02 4	56 20
77	57 2422	18 21	23 34 8	56 20
78	57 4243	18 21	24 07 2	56 20
79	57 6064	18 22	24 39 6	56 23
80	57 7886	18 21	25 12 0	56 20
33,81	0,557 9707	18 22	30 25 44 4	56 23
82	58 1529	18 22	26 16 8	56 23
83	58 3351	18 22	26 49 2	56 23
84	58 5173	18 23	27 21 6	56 27
85	58 6996	18 22	27 54 0	56 23
33,86	0,558 8818	18 23	30 28 26 4	56 27
87	59 0641	18 23	28 58 8	56 27
88	59 2464	18 23	29 31 2	56 27
89	59 4287	18 23	30 03 6	56 27
90	59 6110	18 23	30 36 0	56 27
33,91	0,595 7933	18 24	30 31 08 4	56 30
92	59 9757	18 23	31 40 8	56 27
93	60 1580	18 24	32 13 2	56 30
94	60 3404	18 24	32 45 6	56 30
95	60 5228	18 24	33 18 0	56 30
33,96	0,560 7052	18 25	30 33 50 4	56 33
97	60 8877	18 24	34 22 8	56 30
98	61 0701	18 25	34 55 2	56 33
99	61 2526	18 25	35 27 6	56 33
34,00	61 4351		36 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=34°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.			
34,00	0,561 4351	18 25	30 36 00 0	56 33		
34,01	0,561 6176	18 25	30 36 32 4	56 33		
02	61 8001	18 25	37 04 8	56 33		
03	61 9826	18 26	37 37 2	56 36		
04	62 1652	18 25	38 09 6	56 33		
05	62 3477	18 26	38 42 0	56 36		
34,06	0,562 5303	18 26	30 39 14 4	56 36		
07	62 7129	18 26	39 46 8	56 36		
08	62 8955	18 27	40 19 2	56 39		
09	63 0782	18 26	40 51 6	56 36		
10	63 2608	18 27	41 24 0	56 39		
34,11	0,563 4435	18 27	30 41 56 4	56 39		
12	63 6262	18 27	42 28 8	56 39		
13	63 8089	18 27	43 01 2	56 39		
14	63 9916	18 28	43 33 6	56 42		
15	64 1744	18 27	44 06 0	56 39		
34,16	0,564 3571	18 28	30 44 38 4	56 42		
17	64 5399	18 28	45 10 8	56 42		
18	64 7227	18 28	45 43 2	56 42		
19	64 9055	18 28	46 15 6	56 42		
20	65 0883	18 29	46 48 0	56 45		
34,21	0,565 2712	18 28	30 47 20 4	56 42		
22	65 4540	18 29	47 52 8	56 45		
23	65 6369	18 29	48 25 2	56 45		
24	65 8198	18 29	48 57 6	56 45		
25	66 0027	18 29	49 30 0	56 45		
34,26	0,566 1856	18 30	30 50 02 4	56 48		
27	66 3686	18 29	50 34 8	56 45		
28	66 5515	18 30	51 07 2	56 48		
29	66 7345	18 30	51 39 6	56 48		
30	66 9175	18 30	52 12 0	56 48		
34,31	0,567 1005	18 31	30 52 44 4	56 51		
32	67 2836	18 30	53 16 8	56 48		
33	67 4666	18 31	53 49 2	56 51		
34	67 6497	18 30	54 21 6	56 48		
35	67 8327	18 31	54 54 0	56 51		
34,36	0,568 0158	18 32	30 55 26 4	56 54		
37	68 1990	18 31	55 58 8	56 51		
38	68 3821	18 31	56 31 2	56 51		
39	68 5652	18 32	57 03 6	56 54		
40	68 7484	18 32	57 36 0	56 54		
34,41	0,568 9316	18 32	30 58 08 4	56 54		
42	69 1148	18 32	58 40 8	56 54		
43	69 2980	18 33	59 13 2	56 57		
44	69 4813	18 32	30 59 45 6	56 54		
45	69 6645	18 33	31 00 18 0	56 57		
34,46	0,569 8478	18 33	31 00 50 4	56 57		
47	70 0311	18 33	01 22 8	56 57		
48	70 2144	18 33	01 55 2	56 57		
49	70 3977	18 34	02 27 6	56 60		
50	70 5811		03 00 0			

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.	
$k=34°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.		
Gr. M.			Gr. M. S.			
34,50	0,570 5811	18 33	31 03 00 0	56 57		
34,51	0,570 7644	18 34	31 03 32 4	56 60		
52	70 9478	18 34	04 04 8	56 60		
53	71 1312	18 34	04 37 2	56 60		
54	71 3146	18 34	05 09 6	56 60		
55	71 4980	18 35	05 42 0	56 64		
34,56	0,571 6815	18 34	31 06 14 4	56 60		
57	71 8649	18 35	06 46 8	56 64		
58	72 0484	18 35	07 19 2	56 64		
59	72 2319	18 36	07 51 6	56 67		
60	72 4155	18 35	08 24 0	56 64		
34,61	0,572 5990	18 35	31 08 56 4	56 64		
62	72 7825	18 36	09 28 8	56 67		
63	72 9661	18 36	10 01 2	56 67		
64	73 1497	18 36	10 33 6	56 67		
65	73 3333	18 36	11 06 0	56 67		
34,66	0,573 5169	18 36	31 11 38 4	56 67		
67	73 7005	18 37	12 10 8	56 70		
68	73 8842	18 37	12 43 2	56 70		
69	74 0679	18 37	13 15 6	56 70		
70	74 2516	18 37	13 48 0	56 70		
34,71	0,574 4353	18 37	31 14 20 4	56 70		
72	74 6190	18 37	14 52 8	56 70		
73	74 8027	18 38	15 25 2	56 73		
74	74 9865	18 38	15 57 6	56 73		
75	75 1703	18 38	16 30 0	56 73		
34,76	0,575 3541	18 38	31 17 02 4	56 73		
77	75 5379	18 38	17 34 8	56 73		
78	75 7217	18 39	18 07 2	56 76		
79	75 9056	18 38	18 39 6	56 73		
80	76 0894	18 39	19 12 0	56 76		
34,81	0,576 2733	18 39	31 19 44 4	56 76		
82	76 4572	18 39	20 16 8	56 76		
83	76 6411	18 40	20 49 2	56 79		
84	76 8251	18 39	21 21 6	56 76		
85	77 0090	18 40	21 54 0	56 79		
34,86	0,577 1930	18 40	31 22 26 4	56 79		
87	77 3770	18 40	22 58 8	56 79		
88	77 5610	18 40	23 31 2	56 79		
89	77 7450	18 41	24 03 6	56 82		
90	77 9291	18 40	24 36 0	56 79		
34,91	0,578 1131	18 41	31 25 08 4	56 82		
92	78 2972	18 41	25 40 8	56 82		
93	78 4813	18 41	26 13 2	56 82		
94	78 6654	18 41	26 45 6	56 82		
95	78 8495	18 42	27 18 0	56 85		
34,96	0,579 0337	18 41	31 27 50 4	56 82		
97	79 2178	18 42	28 22 8	56 85		
98	79 4020	18 42	28 55 2	56 85		
99	79 5862	18 42	29 27 6	56 85		
35,00	79 7704		30 00 0			

N. E. $k=35°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.	D. 1″.
Gr. M.				
35,00	0,579 7704	18 43	31 30 00 0	56 88
35,01	0,579 9547	18 42	31 30 32 4	56 85
02	80 1389	18 43	31 04 8	56 88
03	80 3232	18 43	31 37 2	56 88
04	80 5075	18 43	32 09 6	56 88
05	80 6918	18 43	32 42 0	56 88
35,06	0,580 8761	18 44	31 33 14 4	56 91
07	81 0605	18 43	33 46 8	56 88
08	81 2448	18 44	34 19 2	56 91
09	81 4292	18 44	34 51 6	56 91
10	81 6136	18 44	35 24 0	56 91
35,11	0,581 7980	18 44	31 35 56 4	56 91
12	81 9824	18 45	36 28 8	56 94
13	82 1669	18 45	37 01 2	56 94
14	82 3514	18 44	37 33 6	56 91
15	82 5358	18 46	38 06 0	56 98
35,16	0,582 7204	18 45	31 38 38 4	56 94
17	82 9049	18 45	39 10 8	56 94
18	83 0894	18 46	39 43 2	56 98
19	83 2740	18 45	40 15 6	56 94
20	83 4585	18 46	40 48 0	56 98
35,21	0,583 6431	18 47	31 41 20 4	57 01
22	83 8278	18 46	41 52 8	56 98
23	84 0124	18 46	42 25 2	56 98
24	84 1970	18 47	42 57 6	57 01
25	84 3817	18 47	43 30 0	57 01
35,26	0,584 5664	18 47	31 44 02 4	57 01
27	84 7511	18 47	44 34 8	57 01
28	84 9358	18 47	45 07 2	57 01
29	85 1205	18 48	45 39 6	57 04
30	85 3053	18 48	46 12 0	57 04
35,31	0,585 4901	18 47	31 46 44 4	57 01
32	85 6748	18 49	47 16 8	57 07
33	85 8597	18 48	47 49 2	57 04
34	86 0445	18 48	48 21 6	57 04
35	86 2293	18 49	48 54 0	57 07
35,36	0,586 4142	18 49	31 49 26 4	57 07
37	86 5991	18 49	49 58 8	57 07
38	86 7840	18 49	50 31 2	57 07
39	86 9689	18 49	51 03 6	57 07
40	87 1538	18 50	51 36 0	57 10
35,41	0,587 3388	18 49	31 52 08 4	57 07
42	87 5237	18 50	52 40 8	57 10
43	87 7087	18 50	53 13 2	57 10
44	87 8937	18 51	53 45 6	57 13
45	88 0788	18 50	54 18 0	57 10
35,46	0,588 2638	18 51	31 54 50 4	57 13
47	88 4489	18 50	55 22 8	57 10
48	88 6339	18 51	55 55 2	57 13
49	88 8190	18 51	56 27 6	57 13
50	89 0041		57 00 0	

N. E. $k=35°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Einth. D. 1″.	Gr. M. S.	D. 1″.
Gr. M.				
35,50	0,589 0041	18 52	31 57 00 0	57 16
35,51	0,589 1893	18 51	31 57 32 4	57 13
52	89 3744	18 52	58 04 8	57 16
53	89 5596	18 52	58 37 2	57 16
54	89 7448	18 52	59 09 6	57 16
55	89 9300	18 52	31 59 42 0	57 16
35,56	0,590 1152	18 52	32 00 14 4	57 16
57	90 3004	18 53	00 46 8	57 19
58	90 4857	18 53	01 19 2	57 19
59	90 6710	18 53	01 51 6	57 19
60	90 8563	18 53	02 24 0	57 19
35,61	0,591 0416	18 53	32 02 56 4	57 19
62	91 2269	18 54	03 28 8	57 22
63	91 4123	18 54	04 01 2	57 22
64	91 5977	18 53	04 33 6	57 19
65	91 7830	18 55	05 06 0	57 25
35,66	0,591 9685	18 54	32 05 38 4	57 22
67	92 1539	18 54	06 10 8	57 22
68	92 3393	18 55	06 43 2	57 25
69	92 5248	18 55	07 15 6	57 25
70	92 7103	18 55	07 48 0	57 25
35,71	0,592 8958	18 55	32 08 20 4	57 25
72	93 0813	18 55	08 52 8	57 25
73	93 2668	18 56	09 25 2	57 28
74	93 4524	18 55	09 57 6	57 25
75	93 6379	18 56	10 30 0	57 28
35,76	0,593 8235	18 56	32 11 02 4	57 28
77	94 0091	18 57	11 34 8	57 31
78	94 1948	18 56	12 07 2	57 28
79	94 3804	18 57	12 39 6	57 31
80	94 5661	18 56	13 12 0	57 28
35,81	0,594 7517	18 57	32 13 44 4	57 31
82	94 9374	18 58	14 16 8	57 35
83	95 1232	18 57	14 49 2	57 31
84	95 3089	18 57	15 21 6	57 31
85	95 4946	18 58	15 54 0	57 35
35,86	0,595 6804	18 58	32 16 26 4	57 35
87	95 8662	18 58	16 58 8	57 35
88	96 0520	18 58	17 31 2	57 35
89	96 2378	18 59	18 03 6	57 38
90	96 4237	18 59	18 36 0	57 38
35,91	0,596 6096	18 58	32 19 08 4	57 35
92	96 7954	18 59	19 40 8	57 38
93	96 9813	18 60	20 13 2	57 41
94	97 1673	18 59	20 45 6	57 38
95	97 3532	18 60	21 18 0	57 41
35,96	0,597 5392	18 59	32 21 50 4	57 38
97	97 7251	18 60	22 22 8	57 41
98	97 9111	18 60	22 55 2	57 41
99	98 0970	18 61	23 27 6	57 44
36,00	98 2832		24 00 0	

N. E.			Alte Einth.	
$k=36°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
36,00	0,598 2832	18 60	32 24 00 0	57 41
36,01	0,598 4692	18 61	32 24 32 4	57 44
02	98 6553	18 61	25 04 8	57 44
03	98 8414	18 61	25 37 2	57 44
04	99 0275	18 61	26 09 6	57 44
05	99 2136	18 62	26 42 0	57 47
36,06	0,599 3998	18 61	32 27 14 4	57 44
07	99 5859	18 62	27 46 8	57 47
08	99 7721	18 62	28 19 2	57 47
09	0,599 9583	18 62	28 51 6	57 47
10	0,600 1445	18 62	29 24 0	57 47
36,11	0,600 3307	18 63	32 29 56 4	57 50
12	00 5170	18 63	30 28 8	57 50
13	00 7033	18 63	31 01 2	57 50
14	00 8896	18 63	31 33 6	57 50
15	01 0759	18 63	32 06 0	57 50
36,16	0,601 2622	18 64	32 32 38 4	57 53
17	01 4486	18 63	33 10 8	57 50
18	01 6349	18 64	33 43 2	57 53
19	01 8213	18 64	34 15 6	57 53
20	02 0077	18 65	34 48 0	57 56
36,21	0,602 1942	18 64	32 35 20 4	57 53
22	02 3806	18 65	35 52 8	57 56
23	02 5671	18 64	36 25 2	57 53
24	02 7535	18 65	36 57 6	57 56
25	02 9400	18 65	37 30 0	57 56
36,26	0,603 1265	18 66	32 38 02 4	57 59
27	03 3131	18 65	38 34 8	57 56
28	03 4996	18 66	39 07 2	57 59
29	03 6862	18 67	39 39 6	57 62
30	03 8729	18 65	40 12 0	57 56
36,31	0,604 0594	18 66	32 40 44 4	57 59
32	04 2460	18 67	41 16 8	57 62
33	04 4327	18 66	41 49 2	57 59
34	04 6193	18 67	42 21 6	57 62
35	04 8060	18 67	42 54 0	57 62
36,36	0,604 9927	18 68	32 43 26 4	57 65
37	05 1795	18 67	43 58 8	57 62
38	05 3662	18 68	44 31 2	57 65
39	05 5530	18 68	45 03 6	57 65
40	05 7398	18 68	45 36 0	57 65
36,41	0,605 9266	18 68	32 46 08 4	57 65
42	06 1134	18 68	46 40 8	57 65
43	06 3002	18 69	47 13 2	57 69
44	06 4871	18 68	47 45 6	57 65
45	06 6739	18 69	48 18 0	57 69
36,46	0,606 8608	18 69	32 48 50 4	57 69
47	07 0477	18 70	49 22 8	57 72
48	07 2347	18 69	49 55 2	57 69
49	07 4216	18 70	50 27 6	57 72
50	07 6086		51 00 0	

N. E.			Alte Einth.	
$k=36°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
36,50	0,607 6086	18 70	32 51 00 0	57 72
36,51	0,607 7956	18 70	23 51 32 4	57 72
52	07 9826	18 70	52 04 8	57 72
53	08 1696	18 71	52 37 2	57 75
54	08 3567	18 70	53 09 6	57 72
55	08 5437	18 71	53 42 0	57 75
36,56	0,608 7308	18 71	32 54 14 4	57 75
57	08 9179	18 71	54 46 8	57 75
58	09 1050	18 72	55 19 2	57 78
59	09 2922	18 71	55 51 6	57 75
60	09 4793	18 72	56 24 0	57 78
36,61	0,609 6665	18 72	32 56 56 4	57 78
62	09 8537	18 72	57 28 8	57 78
63	10 0409	18 73	58 01 2	57 81
64	10 2282	18 72	58 33 6	57 78
65	10 4154	18 73	59 06 0	57 81
36,66	0,610 6027	18 73	32 59 38 4	57 81
67	10 7900	18 73	33 00 10 8	57 81
68	10 9773	18 73	00 43 2	57 81
69	11 1646	18 74	01 15 6	57 84
70	11 3520	18 73	01 48 0	57 81
36,71	0,611 5393	18 74	33 02 20 4	57 84
72	11 7267	18 74	02 52 8	57 84
73	11 9141	18 75	03 25 2	57 87
74	12 1016	18 74	03 57 6	57 84
75	12 2890	18 75	04 30 0	57 87
36,76	0,612 4765	18 74	33 05 02 4	57 84
77	12 6639	18 75	05 34 8	57 87
78	12 8514	18 76	06 07 2	57 90
79	13 0390	18 75	06 39 6	57 87
80	13 2265	18 76	07 12 0	57 90
26,81	0,613 4141	18 76	33 07 44 4	57 90
82	13 6017	18 76	08 16 8	57 90
83	13 7893	18 76	08 49 2	57 90
84	13 9769	18 76	09 21 6	57 90
85	14 1645	18 77	09 54 0	57 93
36,86	0,614 3522	18 77	33 10 26 4	57 93
87	14 5399	18 76	10 58 8	57 90
88	14 7275	18 78	11 31 2	57 96
89	14 9153	18 77	12 03 6	57 93
90	15 1030	18 77	12 36 0	57 93
36,91	0,615 2907	18 78	33 13 08 4	57 96
92	15 4785	18 78	13 40 8	57 96
93	15 6663	18 78	14 13 2	57 96
94	15 8541	18 79	14 45 6	57 99
95	16 0420	18 78	15 18 0	57 96
36,96	0,616 2298	18 79	33 15 50 4	57 99
97	16 4177	18 79	16 22 8	57 99
98	16 6056	18 79	16 55 2	57 99
99	16 7935	18 79	17 27 6	57 99
37,00	16 9814		18 00 0	

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=37°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		
37,00	0,616 9814	18 80	33 18 00 0	58 02	
37,01	0,617 1694	18 79	33 18 32 4	57 99	
02	17 3573	18 80	19 04 8	58 02	
03	17 5453	18 80	19 37 2	58 02	
04	17 7333	18 80	20 09 6	58 02	
05	17 9213	18 81	20 42 0	58 06	
37,06	0,618 1094	18 80	33 21 14 4	58 02	
07	18 2974	18 81	21 46 8	58 06	
08	18 4855	18 81	22 19 2	58 06	
09	18 6736	18 81	22 51 6	58 06	
10	18 8617	18 82	23 24 0	58 09	
37,11	0,619 0499	18 81	33 23 56 4	58 06	
12	19 2380	18 82	24 28 8	58 09	
13	19 4262	18 82	25 01 2	58 09	
14	19 6144	18 82	25 33 6	58 09	
15	19 8026	18 83	26 06 0	58 12	
37,16	0,619 9909	18 83	33 26 38 4	58 12	
17	20 1792	18 82	27 10 8	58 09	
18	20 3674	18 83	27 43 2	58 12	
19	20 5557	18 84	28 15 6	58 15	
20	20 7441	18 83	28 48 0	58 12	
37,21	0,620 9324	18 83	33 29 20 4	58 12	
22	21 1207	18 84	29 52 8	58 15	
23	21 3091	18 84	30 25 2	58 15	
24	21 4975	18 84	30 57 6	58 15	
25	21 6859	18 85	31 30 0	58 18	
37,26	0,621 8744	18 84	33 32 02 4	58 15	
27	22 0628	18 85	32 34 8	58 18	
28	22 2513	18 85	33 07 2	58 18	
29	22 4398	18 85	33 39 6	58 18	
30	22 6283	18 85	34 12 0	58 18	
37,31	0,622 8168	18 86	33 34 44 4	58 21	
32	23 0054	18 86	35 16 8	58 21	
33	23 1940	18 85	35 49 2	58 18	
34	23 3825	18 87	36 21 6	58 24	
35	23 5712	18 86	36 54 0	58 21	
37,36	0,623 7598	18 86	33 37 26 4	58 21	
37	23 9484	18 87	37 58 8	58 24	
38	24 1371	18 87	38 31 2	58 24	
39	24 3258	18 87	39 03 6	58 24	
40	24 5145	18 88	39 36 0	58 27	
37,41	0,624 7033	18 87	33 40 08 4	58 24	
42	24 8920	18 88	40 40 8	58 27	
43	25 0808	18 88	41 13 2	58 27	
44	25 2696	18 88	41 45 6	58 27	
45	25 4584	18 88	42 18 0	58 27	
37,46	0,625 6472	18 88	33 42 50 4	58 27	
47	45 8360	18 89	43 22 8	58 30	
48	46 0249	18 89	43 55 2	58 30	
49	46 2138	18 89	44 27 6	58 30	
50	46 4027		45 00 0		

N. E.		Alte Einth.			Alte Einth.
$k=37°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		
37,50	0,626 4027	18 89	33 45 00 0	58 30	
37,51	0,626 5916	18 90	33 45 32 4	58 33	
52	26 7806	18 90	46 04 8	58 33	
53	26 9696	18 89	46 37 2	58 30	
54	27 1585	18 90	47 09 6	58 33	
55	27 3475	18 91	47 42 0	58 36	
37,56	0,627 5366	18 90	33 48 14 4	58 33	
57	27 7256	18 91	48 46 8	58 36	
58	27 9147	18 91	49 19 2	58 36	
59	28 1038	18 91	49 51 6	58 36	
60	28 2929	18 91	50 24 0	58 36	
37,61	0,628 4820	18 92	33 50 56 4	58 40	
62	28 6712	18 91	51 28 8	58 36	
63	28 8603	18 92	52 01 2	58 40	
64	29 0495	18 92	52 33 6	58 40	
65	29 2387	18 93	53 06 0	58 43	
37,66	0,629 4280	18 92	33 53 38 4	58 40	
67	29 6172	18 93	54 10 8	58 43	
68	29 8065	18 93	54 43 2	58 43	
69	29 9958	18 93	55 15 6	58 43	
70	30 1851	18 93	55 48 0	58 43	
37,71	0,630 3744	18 93	33 56 20 4	58 43	
72	30 5637	18 94	56 52 8	58 46	
73	30 7531	18 94	57 25 2	58 46	
74	30 9425	18 94	57 57 6	58 46	
75	31 1319	18 94	58 30 0	58 46	
37,76	0,631 3213	18 95	33 59 02 4	58 49	
77	31 5108	18 94	33 59 34 8	58 46	
78	31 7002	18 95	34 00 07 2	58 49	
79	31 8897	18 95	00 39 6	58 49	
80	32 0792	18 95	01 12 0	58 49	
37,81	0,632 2687	18 96	34 01 44 4	58 52	
82	32 4583	18 96	02 16 8	58 52	
83	32 6479	18 95	02 49 2	58 49	
84	32 8374	18 96	03 21 6	58 52	
85	33 0270	18 97	03 54 0	58 55	
37,86	0,633 2167	18 96	34 04 26 4	58 52	
87	33 4063	18 97	04 58 8	58 55	
88	33 5960	18 97	05 31 2	58 55	
89	33 7857	18 97	06 03 6	58 55	
90	33 9754	18 97	06 36 0	58 55	
37,91	0,634 1651	18 98	34 07 08 4	58 58	
92	34 3549	18 97	07 40 8	58 55	
93	34 5446	18 98	08 13 2	58 58	
94	34 7344	18 98	08 45 6	58 58	
95	34 9242	18 98	09 18 0	58 58	
37,96	0,635 1140	18 99	34 09 50 4	58 61	
97	35 3039	18 99	10 22 8	58 61	
98	35 4938	18 99	10 55 2	58 61	
99	35 6837	18 99	11 27 6	58 61	
38,00	35 8736		12 00 0		

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=38°$	L. k.	D. 1″.		D. 1″.	$k=38°$	L. k.	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
38,00	0,635 8736	18 99	34 12 00 0	58 61	38,50	0,645 3951	19 10	34 39 00 0	58 95
38,01	0,636 0635	19 00	34 12 32 4	58 64	38,51	0,645 5861	19 10	34 39 32 4	58 59
02	36 2535	18 99	13 04 8	58 61	52	45 7771	19 10	40 04 8	58 95
03	36 4434	19 00	13 37 2	58 64	53	45 9681	19 10	40 37 2	58 95
04	36 6334	19 00	14 09 6	58 64	54	46 1591	19 10	41 09 6	58 95
05	36 8234	19 01	14 42 0	58 67	55	46 3501	19 11	41 42 0	58 98
38,06	0,637 0135	19 00	34 15 14 4	58 64	38,56	0,646 5412	19 11	34 42 14 4	58 98
07	37 2035	19 01	15 46 8	58 67	57	46 7323	19 11	42 46 8	58 98
08	37 3936	19 01	16 19 2	58 67	58	46 9234	19 11	43 19 2	58 98
09	37 5837	19 01	16 51 6	58 67	59	47 1145	19 11	43 51 6	58 98
10	37 7738	19 01	17 24 0	58 67	60	47 3056	19 12	44 24 0	59 01
38,11	0,637 9639	19 02	34 17 56 4	58 70	38,61	0,647 4968	19 12	34 44 56 4	59 01
12	38 1541	19 02	18 28 8	58 70	62	47 6880	19 12	45 28 8	59 01
13	38 3443	19 02	19 01 2	58 70	63	47 8792	19 12	46 01 2	59 01
14	38 5345	19 02	19 33 6	58 70	64	48 0704	19 13	46 33 6	59 04
15	38 7247	16 02	20 06 0	58 70	65	48 2617	19 12	47 06 0	59 01
38,16	0,638 9149	19 03	34 20 38 4	58 73	38,66	0,648 4529	19 13	34 47 38 4	59 04
17	39 1052	19 02	21 10 8	58 70	67	48 6442	19 13	48 10 8	59 04
18	39 2954	19 03	21 43 2	58 73	68	48 8355	19 14	48 43 2	59 07
19	39 4857	19 04	22 15 6	58 77	69	49 0269	19 13	49 15 6	59 04
20	39 6761	19 03	22 48 0	58 73	70	49 2182	19 14	49 48 0	59 07
38,21	0,639 8664	19 04	34 23 20 4	58 77	38,71	0,649 4096	19 14	34 50 20 4	59 07
22	40 0568	19 03	23 52 8	58 73	72	49 6010	19 14	50 52 8	59 07
23	40 2471	19 04	24 25 2	58 77	73	49 7924	19 14	51 25 2	59 07
24	40 4375	19 05	24 57 6	58 80	74	49 9838	19 15	51 57 6	59 10
25	40 6280	19 04	25 30 0	58 77	75	50 1753	19 15	52 30 0	59 10
38,26	0,640 8184	19 05	34 26 02 4	58 80	38,76	0,650 3668	19 15	34 53 02 4	59 10
27	41 0089	19 04	26 34 8	58 77	77	50 5583	19 15	53 34 8	59 10
28	41 1993	19 05	27 07 2	58 80	78	50 7498	19 15	54 07 2	59 10
29	41 3898	19 06	27 39 6	58 83	79	50 9413	19 16	54 39 6	59 14
30	41 5804	19 05	28 12 0	58 80	80	51 1329	19 16	55 12 0	59 14
38,31	0,641 7709	19 06	34 28 44 4	58 83	38,81	0,651 3245	19 16	34 55 44 4	59 14
32	41 9615	19 06	29 16 8	58 83	82	51 5161	19 16	56 16 8	59 14
33	42 1520	19 07	29 49 2	58 86	83	51 7077	19 16	56 49 2	59 14
34	42 3427	19 06	30 21 6	58 83	84	51 8993	19 17	57 21 6	59 17
35	42 5333	19 06	30 54 0	58 83	85	52 0910	19 17	57 54 0	59 17
38,36	0,642 7239	19 07	34 31 26 4	58 86	38,86	0,652 2827	19 17	34 58 26 4	59 17
37	42 9146	19 07	31 58 8	58 86	87	52 4744	19 17	58 58 8	59 17
38	43 1053	19 07	32 31 2	58 86	88	52 6661	19 18	34 59 31 2	59 20
39	43 2960	19 07	33 03 6	58 86	89	52 8579	19 18	35 00 03 6	59 20
40	43 4867	19 08	33 36 0	58 89	90	53 0497	19 17	00 36 0	59 17
38,41	0,643 6775	19 07	34 34 08 4	58 86	38,91	0,653 2414	19 19	35 01 08 4	59 28
42	43 8682	19 08	34 40 8	58 89	92	53 4333	19 18	01 40 8	59 20
43	44 0590	19 08	35 13 2	58 89	93	53 6251	19 18	02 13 2	59 20
44	44 2498	19 09	35 45 6	58 92	94	53 8169	19 19	02 45 6	59 23
45	44 4407	19 08	36 18 0	58 89	95	54 0088	19 19	03 18 0	59 23
38,46	0,644 6315	19 09	34 36 50 4	58 92	38,96	0,654 2007	19 19	35 03 50 4	59 23
47	44 8224	19 09	37 22 8	58 92	97	54 3926	19 20	04 22 8	59 26
48	45 0133	19 09	37 55 2	58 92	98	54 5846	19 19	04 55 2	59 23
49	45 2042	19 09	38 27 6	58 92	99	54 7765	19 20	05 27 6	59 26
50	45 3951		39 00 0		39,00	54 9685		06 00 0	

N. E. $k=39°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Eith. D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		
39,00	0,654 9685	19 20	35 06 00 0	59 26	
39,01	0,655 1605	19 21	35 06 32 4	59 29	
02	55 3526	19 20	07 04 8	59 26	
03	55 5446	19 21	07 37 2	59 29	
04	55 7367	19 21	08 09 6	59 29	
05	55 9288	19 21	08 42 0	59 29	
39,06	0,656 1209	19 21	35 09 14 4	59 29	
07	56 3130	19 22	09 46 8	59 32	
08	56 5052	19 21	10 19 2	59 29	
09	56 6973	19 22	10 51 6	59 32	
10	56 8895	19 22	11 24 0	59 32	
39,11	0,657 0817	19 23	35 11 56 4	59 35	
12	57 2740	19 22	12 28 8	59 32	
13	57 4662	19 23	13 01 2	59 35	
14	57 6585	19 23	13 33 6	59 35	
15	57 8508	19 23	14 06 0	59 35	
39,16	0,658 0431	19 24	35 14 38 4	59 38	
17	58 2355	19 24	15 10 8	59 38	
18	58 4279	19 23	15 43 2	59 35	
19	58 6202	19 25	16 15 6	59 41	
20	58 8127	19 24	16 48 0	59 38	
39,21	0,659 0051	19 24	35 17 20 4	59 3	
22	59 1975	19 25	17 52 8	59 41	
23	59 3900	19 25	18 25 2	59 41	
24	59 5825	19 25	18 57 6	59 41	
25	59 7750	19 26	19 30 0	59 44	
39,26	0,659 9676	19 25	35 20 02 4	59 41	
27	60 1601	19 26	20 34 8	59 44	
28	60 3527	19 26	21 07 2	59 44	
29	60 5453	19 26	21 39 6	59 44	
30	60 7379	19 27	22 12 0	59 48	
39,31	0,660 9306	19 26	35 22 44 4	59 44	
32	61 1232	19 27	23 16 8	59 48	
33	61 3159	19 27	23 49 2	59 48	
34	61 5086	19 28	24 21 6	59 51	
35	61 7014	19 27	24 54 0	59 48	
39,36	0,661 8931	19 28	35 25 26 4	59 51	
37	62 0869	19 28	25 58 8	59 61	
38	62 2797	19 28	26 31 2	59 51	
39	62 4725	19 28	27 03 6	59 51	
40	62 6653	19 29	27 36 0	59 54	
39,41	0,662 8582	19 29	35 28 08 4	59 54	
42	63 0511	19 29	28 40 8	59 54	
43	63 2440	19 29	29 13 2	59 54	
44	63 4369	19 30	29 45 6	59 57	
45	63 6299	19 29	30 18 0	59 54	
39,46	0,663 8228	19 30	35 30 50 4	59 57	
47	64 0158	19 30	31 22 8	59 57	
48	64 2088	19 31	31 55 2	59 60	
49	64 4019	19 30	32 27 6	59 57	
50	64 5949		33 00 0		

N. E. $k=39°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	Alte Eith. D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		
39,50	0,664 5949	19 31	35 33 00 0	59 60	
39,51	0,664 7880	19 31	35 33 32 4	59 60	
52	64 9811	19 31	34 04 8	59 60	
53	65 1742	19 31	34 37 2	59 60	
54	65 3673	19 32	35 09 6	59 63	
55	65 5605	19 32	35 42 0	59 63	
39,56	0,665 7537	19 32	35 36 14 4	59 63	
57	65 9469	19 32	36 46 8	59 63	
58	66 1401	19 33	37 19 2	59 66	
59	66 3334	19 33	37 51 6	59 66	
60	66 5267	19 33	38 24 0	59 66	
39,61	0,666 7200	19 33	35 38 56 4	59 66	
62	66 9133	19 33	39 28 8	59 66	
63	67 1066	19 34	40 01 2	59 69	
64	67 3000	19 33	40 33 6	59 66	
65	67 4933	19 34	41 06 0	59 69	
39,66	0,667 6867	19 35	35 41 38 4	59 72	
67	67 8802	19 36	42 10 8	59 75	
68	68 0736	19 35	42 43 2	59 72	
69	68 2671	19 35	43 15 6	59 72	
70	68 4606	19 35	43 48 0	59 72	
39,71	0,668 6541	19 35	35 44 20 4	59 72	
72	68 8476	19 36	44 52 8	59 75	
73	69 0412	19 35	45 25 2	59 72	
74	69 2347	19 36	45 57 6	59 75	
75	69 4283	19 37	46 30 0	59 78	
39,76	0,669 6220	19 36	35 47 02 4	59 75	
77	69 8156	19 37	47 34 8	59 78	
78	70 0093	19 37	48 07 2	59 78	
79	70 2030	19 37	48 39 6	59 7	
80	70 3967	19 37	49 12 0	59 78	
39,81	0,670 5904	19 38	35 49 44 4	59 81	
82	70 7842	19 37	50 16 8	59 78	
83	70 9779	19 38	50 49 2	59 81	
84	71 1717	19 38	51 21 6	59 81	
85	71 3655	19 39	51 54 0	59 85	
39,86	0,671 5594	19 39	35 52 26 4	59 85	
87	71 7533	19 38	52 58 8	59 81	
88	71 9471	19 39	53 31 2	59 85	
89	72 1410	19 40	54 03 6	59 88	
90	72 3350	19 39	54 36 0	59 85	
39,91	0,672 5289	19 40	35 55 08 4	59 88	
92	72 7229	19 40	55 40 8	59 88	
93	72 9169	19 40	56 13 2	59 88	
94	73 1109	19 40	56 45 6	59 88	
95	73 3049	19 41	57 18 0	59 91	
39,96	0,673 4990	19 41	35 57 50 4	59 91	
97	73 6931	19 41	58 22 8	59 91	
98	73 8872	19 41	58 55 2	59 91	
99	74 0813	19 42	35 59 27 6	59 94	
40,00	74 2755		36 00 00 0		

N. E.			Alte Einth.		N. E.			Alte Einth.	
$k=40°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=40°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
40,00	0,674 2755	19 42	36 00 00 0	59 94	40,50	0,684 0114	19 53	36 27 00 0	60 28
40,01	0,674 4697	19 41	36 00 32 4	59 91	40,51	0,684 2067	19 53	36 27 32 4	60 28
02	74 6638	19 43	01 04 8	59 97	52	84 4020	19 54	28 04 8	60 31
03	74 8581	19 42	01 37 2	59 94	53	84 5974	19 53	28 37 2	60 28
04	75 0523	19 43	02 09 6	59 97	54	84 7927	19 54	29 09 6	60 31
05	75 2466	19 42	02 42 0	59 94	55	84 9881	19 54	29 42 0	60 31
40,06	0,675 4408	19 43	36 03 14 4	59 97	40,56	0,685 1835	19 55	36 30 14 4	60 34
07	75 6351	19 44	03 46 8	60 00	57	85 3790	19 54	30 46 8	60 31
08	75 8295	19 45	04 19 2	59 97	58	85 5744	19 55	31 19 2	60 34
09	76 0238	19 44	04 51 6	60 00	59	85 7699	19 55	31 51 6	60 34
10	76 2182	19 44	05 24 0	60 00	60	85 9654	19 55	32 24 0	60 34
40,11	0,676 4126	19 44	36 05 56 4	60 00	40,61	0,686 1609	19 55	36 32 56 4	60 34
12	76 6070	19 44	06 28 8	60 00	62	86 3564	19 56	33 28 8	60 37
13	76 8014	19 45	07 01 2	60 03	63	86 5520	19 56	34 01 2	60 37
14	76 9959	19 45	07 33 6	60 03	64	86 7476	19 56	34 33 6	60 37
15	77 1904	19 45	08 06 0	60 03	65	86 9432	19 56	35 06 0	60 37
40,16	0,677 3849	19 45	36 08 38 4	60 03	40,66	0,687 1388	19 57	36 35 38 4	60 40
17	77 5794	19 45	09 10 8	60 03	67	87 3345	19 57	36 10 8	60 40
18	77 7739	19 46	09 43 2	60 06	68	87 5302	19 57	36 43 2	60 40
19	77 9685	19 46	10 15 6	60 06	69	87 7259	19 57	37 15 6	60 40
20	78 1631	19 47	10 48 0	60 09	70	87 9216	19 58	37 48 0	60 43
40,21	0,678 3578	19 46	36 11 20 4	60 06	40,71	0,688 1174	19 57	36 38 20 4	60 40
22	78 5524	19 47	11 52 8	60 09	72	88 3131	19 58	38 52 8	60 43
23	78 7471	19 46	12 25 2	60 06	73	88 5089	19 58	39 25 2	60 43
24	78 9417	19 47	12 57 6	60 09	74	88 7047	19 59	39 57 6	60 46
25	79 1364	19 48	13 30 0	60 12	75	88 9006	19 58	40 30 0	60 43
40,26	0,679 3312	19 47	36 14 02 4	60 09	40,76	0,689 0964	19 59	36 41 02 4	60 46
27	79 5259	19 48	14 34 8	60 12	77	89 2923	19 59	41 34 8	60 46
28	79 7207	19 49	15 07 2	60 15	78	89 4882	19 60	42 07 2	60 49
29	79 9155	19 48	15 39 6	60 12	79	89 6842	19 59	42 39 6	60 46
30	80 1103	19 49	16 12 0	60 15	80	89 8801	19 60	43 12 0	60 49
40,31	0,680 3052	19 48	36 16 44 4	60 12	40,81	0,690 0761	19 60	36 43 44 4	60 49
32	80 5000	19 49	17 16 8	60 15	82	90 2721	19 60	44 16 8	60 49
33	80 6949	19 49	17 49 2	60 15	83	90 4681	19 61	44 49 2	60 52
34	80 8898	19 49	18 21 6	60 15	84	90 6642	19 60	45 21 6	60 49
35	81 0847	19 50	18 54 0	60 19	85	90 8602	19 61	45 54 0	60 52
40,36	0,681 2797	19 50	36 19 26 4	60 19	40,86	0,691 0563	19 61	36 46 26 4	60 52
37	81 4747	19 50	19 58 8	60 19	87	91 2524	19 62	46 58 8	60 56
38	81 6697	19 50	20 31 2	60 19	88	91 4486	19 61	47 31 2	60 52
39	81 8647	19 51	21 03 6	60 22	89	91 6447	19 62	48 03 6	60 56
40	82 0598	19 50	21 36 0	60 19	90	91 8409	19 62	48 36 0	60 56
40,41	0,682 2548	19 51	36 22 08 4	60 22	40,91	0,692 0371	19 63	36 49 08 4	60 59
42	82 4499	19 51	22 40 8	60 22	92	92 2334	19 62	49 40 8	60 56
43	82 6450	19 52	23 13 2	60 25	93	92 4296	19 63	50 13 2	60 59
44	82 8402	19 51	23 45 6	60 22	94	92 6259	19 63	50 45 6	60 59
45	83 0353	19 52	24 18 0	60 25	95	92 8222	19 64	51 18 0	60 62
40,46	0,683 2305	19 52	36 24 50 4	60 25	40,96	0,693 0185	19 64	36 51 50 4	60 62
47	83 4257	19 52	25 22 8	60 25	97	93 2149	19 63	52 22 8	60 59
48	83 6209	19 53	25 55 2	60 28	98	93 4112	19 64	52 55 2	60 62
49	83 8162	19 52	26 27 6	60 25	99	93 6076	19 64	53 27 6	60 62
50	84 0114		27 00 0		41,00	93 8046		54 00 0	

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.	
$k=41°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.	D. 1″.	D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M. S.
41,00	0,693 8040	19 65	36 54 00 0	60 65	
41,01	0,694 0005	19 64	36 54 32 4	60 62	
02	94 1969	19 65	55 04 8	60 65	
03	94 3934	19 65	55 37 2	60 65	
04	94 5899	19 66	56 09 6	60 68	
05	94 7865	19 65	56 42 0	60 65	
41,06	0,694 9830	19 66	36 57 14 4	60 68	
07	95 1796	19 66	57 46 8	60 68	
08	95 3762	19 66	58 19 2	60 68	
09	95 5728	19 67	58 51 6	60 71	
10	95 7695	19 66	59 24 0	60 68	
41,11	0,695 9661	19 67	36 59 56 4	60 71	
12	96 1628	19 67	37 00 28 8	60 71	
13	96 3595	19 68	01 01 2	60 74	
14	96 5563	19 67	01 33 6	60 71	
15	96 7530	19 68	02 06 0	60 74	
41,16	0,696 9498	19 68	37 02 38 4	60 74	
17	97 1466	19 69	03 10 8	60 77	
18	97 3435	19 68	03 43 2	60 74	
19	97 5403	19 69	04 15 6	60 77	
20	97 7372	19 69	04 48 0	60 77	
41,21	0,697 9341	19 70	37 05 20 4	60 80	
22	98 1311	19 69	05 52 8	60 77	
23	98 3280	19 70	06 25 2	60 80	
24	98 5250	19 70	06 57 6	60 80	
25	98 7220	19 70	07 30 0	60 80	
41,26	0,698 9190	19 70	37 08 02 4	60 80	
27	99 1160	19 71	08 34 8	60 83	
28	99 3131	19 71	09 07 2	60 83	
29	99 5102	19 71	09 39 6	60 83	
30	99 7073	19 71	10 12 0	60 83	
41,31	0,699 9044	19 72	37 10 44 4	60 86	
32	0,700 1016	19 72	11 16 8	60 86	
33	00 2988	19 72	11 49 2	60 86	
34	00 4960	19 72	12 21 6	60 86	
35	00 6932	19 73	12 54 0	60 90	
41,36	0,700 8905	19 73	37 13 26 4	60 90	
37	01 0878	19 73	13 58 8	60 90	
38	01 2851	19 73	14 31 2	60 90	
39	01 4824	19 74	15 03 6	60 93	
40	01 6798	19 73	15 36 0	60 90	
41,41	0,701 8771	19 74	37 16 08 4	60 93	
42	02 0745	19 75	16 40 8	60 96	
43	02 2720	19 74	17 13 2	60 93	
44	02 4694	19 75	17 45 6	60 96	
45	02 6669	19 75	18 18 0	60 96	
41,46	0,702 8644	19 75	37 18 50 4	60 96	
47	03 0619	19 75	19 22 8	60 96	
48	03 2594	19 76	19 55 2	60 99	
49	03 4570	19 76	20 27 6	60 99	
50	03 6546		21 00 0		

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.	
$k=41°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.	D. 1″.	D. 1″.	D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M. S.
41,50	0,703 6546	19 76	37 21 00 0	60 99	
41,51	0,703 8522	19 76	37 21 32 4	60 99	
52	04 0498	19 77	22 04 8	61 02	
53	04 2475	19 76	22 37 2	60 99	
54	04 4451	19 77	23 09 6	61 02	
55	04 6428	19 78	23 42 0	61 05	
41,56	0,704 8406	19 77	37 24 14 4	61 02	
57	05 0383	19 78	24 46 8	61 05	
58	05 2361	19 78	25 19 2	61 05	
59	05 4339	19 78	25 51 6	61 05	
60	05 6317	19 79	26 24 0	61 08	
41,61	0,705 8296	19 79	37 26 56 4	61 08	
62	06 0275	19 78	27 28 8	61 08	
63	06 2253	19 80	28 01 2	61 11	
64	06 4233	19 79	28 33 6	61 08	
65	06 6212	19 80	29 06 0	61 11	
41,66	0,706 8192	19 80	37 29 38 4	61 11	
67	07 0172	19 80	30 10 8	61 11	
68	07 2152	19 80	30 43 2	61 11	
69	07 4132	19 81	31 15 6	61 14	
70	07 6113	19 81	31 48 0	61 14	
41,71	0,707 8094	19 81	37 32 20 4	61 14	
72	08 0075	19 81	32 52 8	61 14	
73	08 2056	19 82	33 25 2	61 17	
74	08 4038	19 82	33 57 6	61 17	
75	08 6020	19 82	34 30 0	61 17	
41,76	0,708 8002	19 82	37 35 02 4	61 17	
77	08 9984	19 83	35 34 8	61 20	
78	09 1967	19 82	36 07 2	61 17	
79	09 3949	19 83	36 39 6	61 20	
80	09 5932	19 83	37 12 0	61 20	
41,81	0,709 7915	19 84	37 37 44 4	61 23	
82	09 9899	19 84	38 16 8	61 23	
83	10 1883	19 84	38 49 2	61 23	
84	10 3867	19 84	39 21 6	61 23	
85	10 5851	19 84	39 54 0	61 23	
41,86	0,710 7835	19 85	37 40 26 4	61 27	
87	10 9820	19 85	40 58 8	61 27	
88	11 1805	19 85	41 31 2	61 27	
89	11 3790	19 85	42 03 6	61 27	
90	11 5775	19 86	42 36 0	61 30	
41,91	0,711 7761	19 86	37 43 08 4	61 30	
92	11 9747	19 86	43 40 8	61 30	
93	12 1733	19 87	44 13 2	61 33	
94	12 3720	19 86	44 45 6	61 30	
95	12 5706	19 87	45 18 0	61 33	
41,96	0,712 7693	19 87	37 45 50 4	61 33	
97	12 9680	19 88	46 22 8	61 36	
98	13 1668	19 87	46 55 2	61 33	
99	13 3665	19 88	47 27 6	61 36	
42,00	13 5643		48 00 0		

N. E.		Alte Einth.						N. E.		Alte Einth.					
k=42°	$\mathfrak{L}$. k.	D. 1″.					D. 1″.	k=42°	$\mathfrak{L}$. k.	D. 1″.					D. 1″.
Gr. M.				Gr. M. S.				Gr. M.				Gr. M. S.			
42,00	0,713 5643	19	88	37	48	00 0	61 36	42,50	0,723 5346	20	00	38	15	00 0	61 73
42,01	0,713 7631	19	89	37	48	32 4	61 39	42,51	0,723 7346	20	01	38	15	32 4	61 76
02	13 9620	19	88		49	04 8	61 3	52	23 9347	20	01		16	04 8	61 76
03	14 1608	19	89		49	37 2	61 39	53	24 1348	20	01		16	37 2	61 76
04	14 3597	19	89		50	09 6	61 39	54	24 3349	20	01		17	09 6	61 76
05	14 5586	19	89		50	42 0	61 39	55	24 5350	20	02		17	42 0	61 79
42,06	0,714 7575	19	90	37	51	14 4	61 42	42,56	0,724 7352	20	01	38	18	14 4	61 76
07	14 9565	19	90		51	46 8	61 42	57	24 9353	20	02		18	46 8	61 79
08	15 1555	19	90		52	19 2	61 42	58	25 1355	20	03		19	19 2	61 82
09	15 3545	19	90		52	51 6	61 42	59	25 3358	20	03		19	51 6	61 82
10	15 5535	19	90		53	24 0	61 42	60	25 5361	20	02		20	24 0	61 79
42,11	0,715 7525	19	91	37	53	56 4	61 45	42,61	0,725 7363	20	03	38	20	56 4	61 82
12	15 9516	19	91		54	28 8	61 45	62	25 9366	20	04		21	28 8	61 85
13	16 1507	19	91		55	01 2	61 45	63	26 1370	20	03		22	01 2	61 82
14	16 3498	19	92		55	33 6	61 48	64	26 3373	20	04		22	33 6	61 85
15	16 5490	19	91		56	06 0	61 45	65	26 5377	20	04		23	06 0	61 85
42,16	0,716 7481	19	92	37	56	38 4	61 48	42,66	0,726 7381	20	05	38	23	38 4	61 88
17	16 9473	19	93		57	10 8	61 51	67	26 9386	20	04		24	10 8	61 85
18	17 1466	19	92		57	43 2	61 48	68	27 1390	20	05		24	43 2	61 88
19	17 3458	19	93		58	15 6	61 51	69	27 3395	20	05		25	15 6	61 88
20	17 5451	19	93		58	48 0	61 51	70	27 5400	20	05		25	48 0	61 88
42,21	0,717 7444	19	93	37	59	20 4	61 51	42,71	0,727 7405	20	06	38	26	20 4	61 91
22	17 9437	19	93	37	59	52 8	61 51	72	27 9411	20	06		26	52 8	61 91
23	18 1430	19	94	38	00	25 2	61 54	73	28 1417	20	06		27	25 2	61 91
24	18 3424	19	94		00	57 6	61 54	74	28 3423	20	06		27	57 6	61 91
25	18 5418	19	94		01	30 0	61 54	75	28 5429	20	07		28	30 0	61 94
42,26	0,718 7412	19	95	38	02	02 4	61 57	42,76	0,728 7436	20	06	38	29	02 4	61 91
27	18 9407	19	94		02	34 8	61 54	77	28 9442	20	07		29	34 8	61 94
28	19 1401	19	95		03	07 2	61 57	78	29 1449	20	08		30	07 2	61 98
29	19 3396	19	95		03	39 6	61 57	79	29 3457	20	07		30	39 6	61 94
30	19 5391	19	96		04	12 0	61 60	80	29 5464	20	08		31	12 0	61 98
42,31	0,719 7387	19	95	38	04	44 4	61 57	42,81	0,729 7472	20	08	38	31	44 4	61 98
32	19 9382	19	96		05	16 8	61 60	82	29 9480	20	08		32	16 8	61 98
33	20 1378	19	96		05	49 2	61 60	83	30 1488	20	09		32	49 2	62 01
34	20 3374	19	97		06	21 6	61 64	84	30 3497	20	09		33	21 6	62 01
35	20 5371	19	96		06	54 0	61 60	85	30 5506	20	09		33	54 0	62 01
42,36	0,720 7367	19	97	38	07	26 4	61 64	42,86	0,730 7515	20	09	38	34	26 4	62 01
37	20 9364	19	97		07	58 8	61 64	87	30 9524	20	10		34	58 8	62 04
38	21 1361	19	98		08	31 2	61 67	88	31 1534	20	10		35	31 2	62 04
39	21 3359	19	97		09	03 6	61 64	89	31 3544	20	10		36	03 6	62 04
40	21 5356	19	98		09	36 0	61 67	90	31 5554	20	10		36	36 0	62 04
42,41	0,721 7354	19	98	38	10	08 4	61 67	42,91	0,731 7564	20	11	38	37	08 4	62 07
42	21 9352	19	99		10	40 8	61 70	92	31 9575	20	10		37	40 8	62 04
43	22 1351	19	98		11	13 2	61 67	93	32 1585	20	12		38	13 2	62 10
44	22 3349	19	99		11	45 6	61 70	94	32 3597	20	11		38	45 6	62 07
45	22 5348	19	99		12	18 0	61 70	95	32 5608	20	11		39	18 0	62 07
42,46	0,722 7347	19	99	38	12	50 4	61 70	42,96	0,732 7619	20	12	38	39	50 4	62 10
47	22 9346	20	00		13	22 8	61 73	97	32 9631	20	12		40	22 8	62 10
48	23 1346	20	00		13	55 2	61 73	98	33 1643	20	13		40	55 2	62 13
49	23 3346	20	00		14	27 6	61 73	99	33 3656	20	12		41	27 6	62 10
50	23 5346				15	00 0		43,00	33 5668				42	00 0	

N. E.			Alte Einth.		N. E.			Alte Einth.	
$k=43°$	ϱ. k.	D. 1″.		D. 1″.	$k=43°$	ϱ. k.	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
43,00	0,733 5668	20 13	38 42 00 0	62 13	43,50	0,743 6624	20 26	39 09 00 0	62 53
43,01	0,733 7681	20 13	38 42 32 4	62 13	34,51	0,743 8650	20 25	39 09 32 4	62 50
02	33 9694	20 14	43 04 8	62 16	52	44 0675	20 27	10 04 8	62 56
03	34 1708	20 13	43 37 2	62 13	53	44 2702	20 26	10 37 2	62 53
04	34 3721	20 14	44 09 6	62 16	54	44 4728	20 27	11 09 6	62 56
05	34 5735	20 14	44 42 0	62 16	55	44 6755	20 27	11 42 0	62 56
43,06	0,734 7749	20 15	38 45 14 4	62 19	43,56	0,744 8782	20 27	39 12 14 4	62 56
07	34 9764	20 14	45 46 8	62 16	57	45 0809	20 28	12 46 8	62 59
08	35 1778	20 15	46 19 2	62 19	58	45 2837	20 27	13 19 2	62 56
09	35 3793	20 15	46 51 6	62 19	59	45 4864	20 28	13 51 6	62 59
10	35 5808	20 16	47 24 0	62 22	60	45 6892	20 29	14 24 0	62 62
43,11	0,735 7824	20 15	38 47 56 4	62 19	43,61	0,745 8921	20 28	39 14 56 4	62 59
12	35 9839	20 16	48 28 8	62 22	62	46 0949	20 29	15 28 8	62 62
13	36 1855	20 16	49 01 2	62 22	63	46 2978	20 29	16 01 2	62 62
14	36 3871	20 17	49 33 6	62 25	64	46 5007	20 29	16 33 6	62 62
15	36 5888	20 16	50 06 0	62 22	65	46 7036	20 30	17 06 0	62 65
43,16	0,736 7904	20 17	38 50 38 4	62 25	43,66	0,746 9066	20 30	39 17 38 4	62 65
17	36 9921	20 18	51 10 8	62 28	67	47 1096	20 30	18 10 8	62 65
18	37 1939	20 17	51 43 2	62 25	68	47 3126	20 30	18 43 2	62 65
19	37 3956	20 18	52 15 6	62 28	69	47 5156	20 31	19 15 6	62 69
20	37 5974	20 18	52 48 0	62 28	70	47 7187	20 30	19 48 0	62 65
43,21	0,737 7992	20 18	38 53 20 4	62 28	43,71	0,747 9217	20 32	39 20 20 4	62 72
22	38 0010	20 18	53 52 8	62 28	72	48 1249	20 31	20 52 8	62 69
23	38 2028	20 19	54 25 2	62 31	73	48 3280	20 32	21 25 2	62 72
24	38 4047	20 19	54 57 6	62 31	74	48 5312	20 32	21 57 6	62 72
25	38 6066	20 19	55 30 0	62 31	75	48 7344	20 32	22 30 0	62 72
43,26	0,738 8085	20 20	38 56 02 4	62 35	43,76	0,748 9376	20 32	39 23 02 4	62 72
27	39 0105	20 19	56 34 8	62 31	77	49 1408	20 33	23 34 8	62 75
28	39 2124	20 20	57 07 2	62 35	78	49 3441	20 33	24 07 2	62 75
29	39 4144	20 21	57 39 6	62 38	79	49 5474	20 33	24 39 6	62 75
30	39 6165	20 20	58 12 0	62 35	80	49 7507	20 34	25 12 0	62 78
43,31	0,739 8185	20 21	38 58 44 4	62 38	43,81	0,749 9541	20 33	39 25 44 4	62 75
32	40 0206	20 21	59 16 8	62 38	82	50 1574	20 34	26 16 8	62 78
33	40 2227	20 21	38 59 49 2	62 38	83	50 3608	20 35	26 49 2	62 81
34	40 4248	20 22	39 00 21 6	62 41	84	50 5643	20 34	27 21 6	62 78
35	40 6270	20 22	00 54 0	62 41	85	50 7677	20 35	27 54 0	62 81
43,36	0,740 8292	20 22	39 01 26 4	62 41	43,86	0,750 9712	20 35	39 28 26 4	62 81
37	41 0314	20 22	01 58 8	62 41	87	51 1747	20 35	28 58 8	62 81
38	41 2336	20 23	02 31 2	62 44	88	51 3782	20 36	29 31 2	62 84
39	41 4359	20 22	03 03 6	62 41	89	51 5818	20 36	30 03 6	62 84
40	41 6381	20 24	03 36 0	62 47	90	51 7854	20 36	30 36 0	62 84
43,41	0,741 8405	20 23	39 04 08 4	62 44	43,91	0,751 9890	20 36	39 31 08 4	62 84
42	42 0428	20 23	04 40 8	62 44	92	52 1926	20 37	31 40 8	62 87
43	42 2451	20 24	05 13 2	62 47	93	52 3963	20 37	32 13 2	62 87
44	42 4475	20 24	05 45 6	62 47	94	52 6000	20 37	32 45 6	62 87
45	42 6499	20 25	06 18 0	62 50	95	52 8037	20 38	33 18 0	62 90
43,46	0,742 8524	20 24	39 06 50 4	62 47	43,96	0,753 0075	20 37	39 33 50 4	62 87
47	43 0548	20 25	07 22 8	62 50	97	53 2112	20 38	34 22 8	62 90
48	43 2573	20 25	07 55 2	62 50	98	53 4150	20 38	34 55 2	62 90
49	43 4598	20 26	08 27 6	62 53	99	53 6188	20 39	35 27 6	62 93
50	43 6624		09 00 0		44,00	53 8227		36 00 0	

N. E.			Alte Einth.			N. E.			Alte Einth.		
$k=44°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.	$k=44°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.			D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.			Gr. M.			Gr. M. S.		
44,00	0,753 8227	20 39	39 36 00 0		62 93	44,50	0,764 0492	20 53	40 03 00 0		63 36
44,01	0,754 0206	20 39	39 36 32 4		62 93	44,51	0,764 2545	20 52	40 03 32 4		63 33
02	54 2305	20 39	37 04 8		62 93	52	64 4597	20 53	04 04 8		63 36
03	54 4344	20 40	37 37 2		62 96	53	64 6650	20 53	04 37 2		63 36
04	54 6384	20 39	38 09 6		62 93	54	64 8703	20 53	05 09 6		63 36
05	54 8423	20 41	38 42 0		62 96	55	65 0756	20 53	05 42 0		63 36
44,06	0,755 0364	20 40	39 39 14 4		62 96	44,56	0,765 2809	20 54	40 06 14 4		63 40
07	55 2504	20 40	39 46 8		62 96	57	65 4863	20 54	06 46 8		63 40
08	55 4544	20 41	40 19 2		62 99	58	65 6917	20 55	07 19 2		63 43
09	55 6585	20 42	40 51 6		63 02	59	65 8972	20 54	07 51 6		63 40
10	55 8627	20 41	41 24 0		62 99	60	66 1026	20 55	08 24 0		63 43
44,11	0,756 0668	20 42	39 41 56 4		63 02	44,61	0,766 3081	20 55	40 08 56 4		63 43
12	56 2710	20 42	42 28 8		63 02	62	66 5136	20 56	09 28 8		63 46
13	56 4752	20 42	43 01 2		63 02	63	66 7192	20 56	10 01 2		63 46
14	56 6794	20 42	43 33 6		63 02	64	66 9248	20 56	10 33 6		63 46
15	56 8836	20 43	44 06 0		63 06	65	67 1304	20 56	11 06 0		63 46
44,16	0,757 0879	20 43	39 44 38 4		63 06	44,66	0,767 3360	20 56	40 11 38 4		63 46
17	57 2922	20 43	45 10 8		63 06	67	67 5416	20 57	12 10 8		63 49
18	57 4965	20 44	45 43 2		63 09	68	67 7473	20 57	12 43 2		63 49
19	57 7009	20 44	46 15 6		63 09	69	67 9530	20 57	13 15 6		63 49
20	57 9053	20 44	46 48 0		63 09	70	68 1587	20 58	13 48 0		63 52
44,21	0,758 1097	20 44	39 47 20 4		63 09	44,71	0,768 3645	20 58	40 14 20 4		63 52
22	58 3141	20 45	47 52 8		63 12	72	68 5703	20 58	14 52 8		63 52
23	58 5186	20 45	48 25 2		63 12	73	68 7761	20 59	15 25 2		63 55
24	58 7231	20 45	48 57 6		63 12	74	68 9820	20 58	15 57 6		63 52
25	58 9276	20 45	49 30 0		63 12	75	69 1878	20 59	16 30 0		63 55
44,26	0,759 1321	20 46	39 50 02 4		63 15	44,76	0,769 3937	20 59	40 17 02 4		63 55
27	59 3367	20 46	50 34 8		63 15	77	69 5996	20 60	17 34 8		63 58
28	59 5413	20 46	51 07 2		63 15	78	69 8056	20 60	18 07 2		63 58
29	59 7459	20 47	51 39 6		63 18	79	70 0116	20 60	18 39 6		63 58
30	59 9506	20 47	52 12 0		63 18	80	70 2176	20 60	19 12 0		63 58
44,31	0,760 1553	20 47	39 52 44 4		63 18	44,81	0,770 4236	20 61	40 19 44 4		63 61
32	60 3600	20 47	53 16 8		63 18	82	70 6297	20 61	20 16 8		63 61
33	60 5647	20 48	53 49 2		63 21	83	70 8358	20 61	20 49 2		63 61
34	60 7695	20 47	54 21 6		63 18	84	71 0419	20 61	21 21 6		63 61
35	60 9742	20 48	54 54 0		63 21	85	71 2480	20 62	21 54 0		63 64
44,36	0,761 1790	20 49	39 55 26 4		63 24	44,86	0,771 4542	20 62	40 22 26 4		63 64
37	61 3839	20 49	55 58 8		63 24	87	71 6604	20 62	22 58 8		63 64
38	61 5888	20 48	56 31 2		63 21	88	71 8666	20 63	23 31 2		63 67
39	61 7936	20 50	57 03 6		63 27	89	72 0729	20 63	24 03 6		63 67
40	61 9986	20 49	57 36 0		63 24	90	72 2792	20 63	24 36 0		63 67
44,41	0,762 2035	20 50	39 58 08 4		63 27	44,91	0,772 4855	20 63	40 25 08 4		63 67
42	62 4085	20 50	58 40 8		63 27	92	72 6918	20 64	25 40 8		63 70
43	62 6135	20 50	59 13 2		63 27	93	72 8982	20 64	26 13 2		63 70
44	62 8185	20 51	39 59 45 6		63 30	94	73 1046	20 64	26 45 6		63 70
45	63 0236	20 51	40 00 18 0		63 30	95	73 3110	20 65	27 18 0		63 73
44,46	0,763 2287	20 51	40 00 50 4		63 30	44,96	0,773 5175	20 64	40 27 50 4		63 70
47	63 4338	20 51	01 22 8		63 30	97	73 7239	20 65	28 22 8		63 73
48	63 6389	20 52	01 55 2		63 33	98	73 9304	20 66	28 55 2		63 77
49	63 8441	20 51	02 27 6		63 30	99	74 1370	20 65	29 27 6		63 73
50	64 0492		03 00 0			45,00	74 3435		30 00 0		

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.	
$k=45°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
45,00	0,774 3435	20 66	40 30 00 0	63 77	
45,01	0,774 5501	20 66	40 30 32 4	63 77	
02	74 7567	20 67	31 04 8	63 80	
03	74 9634	20 67	31 37 2	63 80	
04	75 1701	20 66	32 09 6	63 77	
05	75 3767	20 68	32 42 0	63 83	
45,06	0,775 5835	20 67	40 33 14 4	63 80	
07	75 7902	20 68	33 46 8	63 83	
08	75 9970	20 68	34 19 2	63 83	
09	76 2038	20 69	34 51 6	63 86	
10	76 4107	20 68	35 24 0	63 83	
45,11	0,776 6175	20 69	40 35 56 4	63 86	
12	76 8244	20 69	36 28 8	63 86	
13	77 0313	20 70	37 01 2	63 89	
14	77 2383	20 70	37 33 6	63 89	
15	77 4453	20 70	38 06 0	63 89	
45,16	0,777 6523	20 70	40 38 38 4	63 89	
17	77 8593	20 71	39 10 8	63 92	
18	78 0664	20 70	39 43 2	63 89	
19	78 2734	20 72	40 15 6	63 95	
20	78 4806	20 71	40 48 0	63 92	
45,21	0,778 6877	20 72	40 41 20 4	63 95	
22	78 8949	20 72	41 52 8	63 95	
23	79 1021	20 72	42 25 2	63 95	
24	79 3093	20 73	42 57 6	63 98	
25	79 5166	20 73	43 30 0	63 98	
45,26	0,779 7239	20 73	40 44 02 4	63 98	
27	79 9312	20 73	44 34 8	63 98	
28	80 1385	20 74	45 07 2	64 01	
29	80 3459	20 74	45 39 6	64 01	
30	80 5533	20 74	46 12 0	64 01	
45,31	0,780 7607	20 74	40 46 44 4	64 01	
32	80 9681	20 75	47 16 8	64 04	
33	81 1756	20 75	47 49 2	64 04	
34	81 3831	20 76	48 21 6	64 07	
35	81 5907	20 75	48 54 0	64 04	
45,36	0,781 7982	20 76	40 49 26 4	64 07	
37	82 0058	20 76	49 58 8	64 07	
38	82 2134	20 77	50 31 2	64 10	
39	82 4211	20 77	51 03 6	64 10	
40	82 6288	20 77	51 36 0	64 10	
45,41	0,782 8365	20 77	40 52 08 4	64 10	
42	83 0442	20 78	52 40 8	64 14	
43	83 2520	20 78	53 13 2	64 14	
44	83 4598	20 78	53 45 6	64 14	
45	83 6676	20 78	54 18 0	64 14	
45,46	0,783 8754	20 79	40 54 50 4	64 17	
47	84 0833	20 79	55 22 8	64 17	
48	84 2912	20 80	55 55 2	64 20	
49	84 4992	20 79	56 27 6	64 17	
50	84 7071.		57 00 0		

N. E.		Alte Einth.		Alte Einth.	
$k=45°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	
Gr. M.			Gr. M. S.		
45,50	0,784 7071	20 80	40 57 00 0	64 20	
45,51	0,784 9151	20 80	40 57 32 4	64 20	
52	85 1231	20 81	58 04 8	64 23	
53	85 3312	20 80	58 37 2	64 20	
54	85 5392	20 81	59 09 6	64 23	
55	85 7473	20 82	40 59 42 0	64 26	
45,56	0,785 9555	20 81	41 00 14 4	64 23	
57	86 1636	20 82	00 46 8	64 26	
58	86 3718	20 82	01 19 2	64 26	
59	86 5800	20 83	01 51 6	64 29	
60	86 7833	20 83	02 24 0	64 29	
45,61	0,786 9966	20 83	41 02 56 4	64 29	
62	87 2049	20 83	03 28 8	64 29	
63	87 4132	20 83	04 01 2	64 29	
64	87 6215	20 84	04 33 6	64 32	
65	87 8299	20 84	05 06 0	64 32	
45,66	0,788 0383	20 85	41 05 38 4	64 35	
67	88 2468	20 85	06 10 8	64 35	
68	88 4553	20 85	06 43 2	64 35	
69	88 6638	20 85	07 15 6	64 35	
70	88 8723	20 85	07 48 0	64 35	
45,71	0,789 0808	20 86	41 08 20 4	64 38	
72	89 2894	20 86	08 52 8	64 38	
73	89 4980	20 87	09 25 2	64 41	
74	89 7067	20 87	09 57 6	64 41	
75	89 9154	20 87	10 30 0	64 41	
45,76	0,790 1241	20 87	41 11 02 4	64 41	
77	90 3328	20 88	11 34 8	64 44	
78	90 5416	20 88	12 07 2	64 44	
79	90 7504	20 88	12 39 6	64 44	
80	90 9592	20 88	13 12 0	64 44	
45,81	0,791 1680	20 89	41 13 44 4	64 48	
82	91 3769	20 89	14 16 8	64 48	
83	91 5858	20 89	14 49 2	64 48	
84	91 7947	20 90	15 21 6	64 51	
85	92 0037	20 90	15 54 0	64 51	
45,86	0,792 2127	20 90	41 16 26 4	64 51	
87	92 4217	20 90	16 58 8	64 51	
88	92 6307	20 91	17 31 2	64 54	
89	92 8398	20 91	18 03 6	64 54	
90	93 0489	20 92	18 36 0	64 57	
45,91	0,793 2581	20 91	41 19 08 4	64 54	
92	93 4672	20 92	19 40 8	64 57	
93	93 6764	20 92	20 13 2	64 57	
94	93 8856	20 93	20 45 6	64 60	
95	94 0949	20 93	21 18 0	64 60	
45,96	0,794 3042	20 93	41 21 50 4	64 60	
97	94 5135	20 93	22 22 8	64 60	
98	94 7228	20 94	22 55 2	64 63	
99	94 9322	20 94	23 27 6	64 63	
46,00	95 1416		24 00 0		

N. E.			Alte Einth.	
$k=46°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
46,00	0,795 1416	20 94	41 24 00 0	64 63
46,01	0,795 3510	20 94	41 24 32 4	64 63
02	95 5604	20 95	25 04 8	64 66
03	95 7699	20 95	25 37 2	64 66
04	95 9794	20 96	26 09 6	64 69
05	96 1890	20 95	26 42 0	64 66
46,06	0,796 3985	20 96	41 27 14 4	64 69
07	96 6081	20 97	27 46 8	64 72
08	96 8178	20 96	28 19 2	64 69
09	97 0274	20 97	28 51 6	64 72
10	97 2371	20 97	29 24 0	64 72
46,11	0,797 4468	20 98	41 29 56 4	64 75
12	97 6566	20 97	30 28 8	64 72
13	97 8663	20 98	31 01 2	64 75
14	98 0761	20 99	31 33 6	64 78
15	98 2860	20 98	32 06 0	64 75
46,16	0,798 4958	20 99	41 32 38 4	64 78
17	98 7057	20 99	33 10 8	64 78
18	98 9156	21 00	33 43 2	64 81
19	99 1256	20 99	34 15 6	64 78
20	99 3355	21 01	34 48 0	64 85
46,21	0,799 5456	21 00	41 35 20 4	64 81
22	99 7556	21 01	35 52 8	64 85
23	0,799 9657	21 01	36 25 2	64 85
24	0,800 1758	21 01	36 57 6	64 85
25	00 3859	21 01	37 30 0	64 85
46,26	0,800 5960	21 02	41 38 02 4	64 88
27	00 8062	21 02	38 34 8	64 88
28	01 0164	21 03	39 07 2	64 91
29	01 2267	21 02	39 39 6	64 88
30	01 4369	21 03	40 12 0	64 91
46,31	0,801 6472	21 03	41 40 44 4	64 91
32	01 8575	21 04	41 16 8	64 94
33	02 0679	21 04	41 49 2	64 94
34	02 2783	21 04	42 2 6	64 94
35	02 4887	21 04	42 54 0	64 94
46,36	0,802 6991	21 05	41 43 26 4	64 97
37	02 9096	21 05	43 58 8	64 97
38	03 1201	21 05	44 31 2	64 97
39	03 3306	21 06	45 03 6	65 00
40	03 5412	21 06	45 36 0	65 00
46,41	0,803 7518	21 07	41 46 08 4	65 03
42	03 9625	21 06	46 40 8	65 00
43	04 1731	21 07	47 13 2	65 03
44	04 3838	21 07	47 45 6	65 03
45	04 5945	21 07	48 18 0	65 03
46,46	0,804 8052	21 08	41 48 50 4	65 06
47	05 0160	21 08	49 22 8	65 06
48	05 2268	21 08	49 55 2	65 06
49	05 4376	21 09	50 27 6	65 09
50	05 6485		51 00 0	

N. E.			Alte Einth.	
$k=46°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.	
46,50	0,805 6485	21 09	41 51 00 0	65 09
46,51	0,805 8594	21 09	41 51 32 4	65 09
52	06 0703	21 10	52 04 8	65 12
53	06 2813	21 09	52 37 2	65 09
54	06 4922	21 11	53 09 6	65 15
55	06 7033	21 10	53 42 0	65 12
46,56	0,806 9143	21 11	41 54 14 4	65 15
57	07 1254	21 11	54 46 8	65 15
58	07 3365	21 11	55 19 2	65 15
59	07 5476	21 11	55 51 6	65 15
60	07 7587	21 12	56 24 0	65 19
46,61	0,807 9699	21 13	41 56 56 4	65 22
62	08 1812	21 12	57 28 8	65 19
63	08 3924	21 13	58 01 2	65 22
64	08 6037	21 13	58 33 6	65 22
65	08 8150	21 13	59 06 0	65 22
46,66	0,809 0263	21 14	41 59 38 4	65 25
67	09 2377	21 14	42 00 10 8	65 25
68	09 4491	21 14	00 43 2	65 25
69	09 6605	21 15	01 15 6	65 28
70	09 8720	21 15	01 48 0	65 28
46,71	0,810 0835	21 15	42 02 20 4	65 28
72	10 2950	21 15	02 52 8	65 28
73	10 5065	21 16	03 25 2	65 31
74	10 7181	21 16	03 57 6	65 31
75	10 9297	21 17	04 30 0	65 34
46,76	0,811 1413	21 17	42 05 02 4	65 34
77	11 3530	21 17	05 34 8	65 34
78	11 5647	21 17	06 07 2	65 34
79	11 7764	21 18	06 39 6	65 37
80	11 9882	21 18	07 12 0	65 37
46,81	0,812 2000	21 18	42 07 44 4	65 37
82	12 4118	21 18	08 16 8	65 37
83	12 6236	21 18	08 49 2	65 37
84	12 8355	21 19	09 21 6	65 40
85	13 0474	21 20	09 54 0	65 43
46,86	0,813 2594	21 19	42 10 26 4	65 40
87	13 4713	21 20	10 58 8	65 43
88	13 6833	21 20	11 31 2	65 43
89	13 8953	21 21	12 03 6	65 46
90	14 1074	21 21	12 36 0	65 46
46,91	0,814 3195	21 21	42 13 08 4	65 46
92	14 5316	21 21	13 40 8	65 46
93	14 7437	21 22	14 13 2	65 49
94	14 9559	21 22	14 45 6	65 49
95	15 1681	21 23	15 18 0	65 52
46,96	0,815 3804	21 22	42 15 50 4	65 49
97	15 5926	21 23	16 22 8	65 52
98	15 8049	21 24	16 55 2	65 56
99	16 0173	21 23	17 27 6	65 52
47,00	16 2296		18 00 0	

N. E.		Alte Einth.			N. E.		Alte Einth.		
$k=47°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.	$k=47°$	$\mathfrak{L}.\ k.$	D. 1″.		D. 1″.
Gr. M.			Gr. M. S.		Gr. M.			Gr. M. S.	
47,00	0,816 2296	21 24	42 18 00 0	65 56	47,50	0,826 8867	21 39	42 45 00 0	66 02
47,01	0,816 4420	21 25	42 18 32 4	65 59	47,51	0,827 1006	21 39	42 45 32 4	66 02
02	16 6545	21 24	19 04 8	65 56	52	27 3145	21 40	46 04 8	66 05
03	16 8669	21 25	19 37 2	65 59	53	27 5285	21 41	46 37 2	66 08
04	17 0794	21 25	20 09 6	65 59	54	27 7426	21 40	47 09 6	66 05
05	17 2919	21 25	20 42 0	65 59	55	27 9566	21 41	47 42 0	66 08
47,06	0,817 5044	21 26	42 21 14 4	65 62	47,56	0,828 1107	21 41	42 48 14 4	66 08
07	17 7170	21 26	21 46 8	65 62	57	28 3848	21 41	48 46 8	66 08
08	17 9296	21 26	22 19 2	65 62	58	28 5989	21 42	49 19 2	66 11
09	18 1422	21 27	22 51 6	65 65	59	28 8131	21 42	49 51 6	66 11
10	18 3549	21 27	23 24 0	65 65	60	29 0273	21 43	50 24 0	66 14
47,11	0,818 5676	21 27	42 23 56 4	65 65	47,61	0,829 2416	21 42	42 50 56 4	66 11
12	18 7803	21 28	24 28 8	65 68	62	29 4558	21 43	51 28 8	66 14
13	18 9931	21 28	25 01 2	65 68	63	29 6701	21 44	52 01 2	66 17
14	19 2059	21 28	25 33 6	65 68	64	29 8845	21 43	52 33 6	66 14
15	19 4187	21 28	26 06 0	65 68	65	30 0988	21 44	53 06 0	66 17
47,16	0,819 6315	21 29	42 26 38 4	65 71	47,66	0,830 3132	21 44	42 53 38 4	66 17
17	19 8444	21 29	27 10 8	65 71	67	30 5276	21 45	54 10 8	66 20
18	20 0573	21 30	27 43 2	65 74	68	30 7421	21 45	54 43 2	66 20
19	20 2703	21 29	28 15 6	65 71	69	30 9566	21 45	55 15 6	66 20
20	20 4832	21 30	28 48 0	65 74	70	31 1711	21 45	55 48 0	66 20
47,21	0,820 6962	21 31	42 29 20 4	65 77	47,71	0,831 3856	21 46	42 56 20 4	66 23
22	20 9093	21 30	29 52 8	65 74	72	31 6002	21 46	56 52 8	66 23
23	21 1223	21 31	30 25 2	65 77	73	31 8148	21 47	57 25 2	66 27
24	21 3354	21 32	30 57 6	65 80	74	32 0295	21 47	57 57 6	66 27
25	21 5486	21 31	31 30 0	65 77	75	32 2442	21 47	58 30 0	66 27
47,26	0,824 7617	21 32	42 32 02 4	65 80	47,76	0,832 4589	21 47	42 59 02 4	66 27
27	21 9749	21 32	32 34 8	65 80	77	32 6736	21 48	42 59 34 8	66 30
28	22 1881	21 32	33 07 2	65 80	78	32 8884	21 48	43 00 07 2	66 30
29	22 4013	21 33	33 39 6	65 83	79	33 1032	21 48	00 39 6	66 30
30	22 6146	21 33	34 12 0	65 83	80	33 3180	21 49	01 12 0	66 33
47,31	0,822 8279	21 34	42 34 44 4	65 86	47,81	0,833 5329	21 49	43 01 44 4	66 33
32	23 0413	21 33	35 16 8	65 83	82	33 7478	21 49	02 16 8	66 33
33	23 0746	21 34	35 49 2	65 86	83	33 9627	21 50	02 49 2	66 36
34	23 4680	21 35	36 21 6	65 90	84	34 1777	21 50	03 21 6	66 36
35	23 6815	21 34	36 54 0	65 86	85	34 3927	21 50	03 54 0	66 36
47,36	0,823 8949	21 35	42 37 26 4	65 90	47,86	0,834 6077	21 51	43 04 26 4	66 39
37	24 1084	21 36	37 58 8	65 93	87	34 8228	21 50	04 58 8	66 36
38	24 3220	21 35	38 31 2	65 90	88	35 0378	21 52	05 31 2	66 42
39	24 5355	21 36	39 03 6	65 93	89	35 2530	21 51	06 03 6	66 39
40	24 7491	21 36	39 36 0	65 93	90	35 4681	21 52	06 36 0	66 42
47,41	0,824 9627	21 37	42 40 08 4	65 96	47,91	0,835 6833	21 52	43 07 08 4	66 42
42	25 1764	21 36	40 40 8	65 93	92	35 8985	21 52	07 40 8	66 42
43	25 3900	21 38	41 13 2	65 99	93	36 1137	21 53	08 13 2	66 45
44	25 6038	21 37	41 45 6	65 96	94	36 3290	21 53	08 45 6	66 45
45	25 8175	21 38	42 18 0	65 99	95	36 5443	21 54	09 18 0	66 48
47,46	0,826 0313	21 38	42 42 50 4	65 99	47,96	0,836 7597	21 53	43 09 50 4	66 45
47	26 2451	21 38	43 22 8	65 99	97	36 9750	21 54	10 22 8	66 48
48	26 4589	21 39	43 55 2	66 02	98	37 1904	21 55	10 55 2	66 51
49	26 6728	21 39	44 27 6	66 02	99	37 4059	21 54	11 27 6	66 48
50	26 8867		45 00 0		48,00	37 6213		12 00 0	

(Die Fortsetzung im nächsten Hefte.)

22.

Note sur la manière dont se composent les valeurs de y et z dans l'équation $\frac{4(x^p-1)}{x-1}=y^2\pm pz^2$, et celles de Y' et Z' dans l'équation $\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$.

(Par Melle *Sophie Germain* à Paris.)

Mr. Le Gendre a rémarqué (Théorie des nombres, 1830, T. 2. No. 512.) que dans l'équation $\frac{4(x^p-1)}{x-1}=y^2\pm pz^2$, due à Mr. Gaufs, les coëfficiens des diverses puissances de x dont se compose la valeur $\partial' y$ sont congrus (mod. p) aux coëfficiens des mêmes puissances, dans le développement de $2(k-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Cette remarque peut servir à établir d'abord, que y est fonction homogène de x et -1.

Il en résulte que pour les nombres $4k+3$, les termes dont le développement de $2(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$ est composé étant en nombre pair, puisque $\frac{p+1}{2}=2k+2$ représente ce nombre, ceux des termes qui comparés deux à deux ont des coëfficiens égaux, seront tant dans $2(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$, que dans la valeur $\partial' y$, affectés de signes différens.

Le contraire a lieu par rapport aux nombres de la forme $4k+1$ car, le nombre des termes dont se compose le développement de $2(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$ étant exprimé par $2k+1$, il est évident que ceux de ces termes qui, comparés deux à deux, offriront des coëfficiens égaux, seront affectés du même signe.

Il m'a paru qu'on pourroit se servir de la formule $2(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$ pour déterminer, d'une manière générale, à l'égard de chacune des formes du nombre p, quels sont les coëfficiens des différentes puissances de x dont se composent les valeurs de y et de z. A la vérité, passé les premiers

de ces termes, les calculs deviendroient très compliqués; mais à l'égard de ceux-ci, on trouve facilement les valeurs suivantes, que je crois exactes et qui se verifient dans tous les cas que Mr. Gaufs a calculés directement.

Lorsque p est de la forme $8k+1$,

$$y = 2x^{4k}+x^{4k-1}+(2k+1)x^{4k-2}+(3k+1)x^{4k-3}\pm \text{ etc.}$$
$$z = x^{4k-1}+x^{4k-2};$$

p étant de la forme $8k+5$,

$$y = 2x^{4k+2}+x^{4k+1}+(2k+2)x^{4k}-kx^{4k-1}\pm \text{etc.}$$
$$z = x^{4k+1}+0.x^{4k}\pm \text{ etc.};$$

si p est de la forme $8k+3$,

$$y = 2x^{4k+1}+x^{4k}-2kx^{4k-1}+(k+1)x^{4k-2}\pm \text{etc.}$$
$$z = x^{4k}+0.x^{4k-1}+(k-1)x^{4k-2}\pm \text{etc.};$$

a l'égard des nombres de la forme $8k+7$,

$$y = 2x^{4k+3}+x^{4k+2}-(2k+1)x^{4k+1}-(3k+2)x^{4k}\pm \text{etc.}$$
$$z = x^{4k+2}+x^{4k+1}\pm \text{ etc.}$$

L'équation $\frac{4(x^{p^n}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$, dans laquelle n représente un nombre entier quelconque, est une simple généralisation de l'équation de Mr. Gaufs. En faisant $n=2$ on a $\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$. Si on peut appliquer la remarque de Mr. Le Gendre à cette équation, on dira que les coëfficiens des différentes puissances de x, dont se compose le développement de $2(x-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$ sont congrus (mod. p), aux coëfficiens des mêmes puissances, dans la valeur $\partial' Y'$.

Il est évident que le développement de $2(x-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$ se compose de $\frac{p^2+1}{2}$ termes; et, pour peu qu'on veuille y faire attention, on verra que les coëfficiens des $\frac{p+1}{2}$ premiers de ces termes, si on essaye de les diviser par p, laisseront tous un reste; tandis que les coëfficiens des $\frac{p-1}{2}$ termes suivans n'en laisseront pas, que les $\frac{p+1}{2}$ termes écrits à la suite de ces derniers auront aussi pour coëfficiens des nombres non divisibles par p, et qu'ils seront suivis de $\frac{p-1}{2}$ termes, dont les coëfficiens sont au contraire des multiples de ce nombre, et ainsi de suite.

Les seules puissances de x qui puissent faire parties de la valeur $\partial' Y'$ seront celles dont les coëfficiens, dans le développement de $2(x-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$, ne sont pas divisibles par p.

La valeur de Y' est donc formée de $\frac{p+1}{2}$ suites composées chacune de $\frac{p+1}{2}$ termes, qui renferment autant de puissances differentes de x. Une quelconque de ces suites est séparée de la suivante par une lacune de $\frac{p-1}{2}$ termes, renfermant autant de puissances différentes de x; et, parceque les premiers et les derniers termes de la valeur de Y', appartiennent a deux séries de $\frac{p+1}{2}$ termes, on voit qu'il y a $\frac{p-1}{2}$ lacunes, de $\frac{p-1}{2}$ termes chacune, qui dans la valeur de Y', séparent les unes des autres les $\frac{p+1}{2}$ séries, de $\frac{p+1}{2}$ termes chacune, dont les coëfficiens, abstraction faite du signe, sont plus grands que zéro.

La forme générale des puissances de x qui appartiennent aux $\frac{p+1}{2}$ termes dont se composent les $\frac{p+1}{2}$ séries est $x^{\frac{p^2-(2vp+2s+1)}{2}}$, dans laquelle on donnera à v, aussi bien qu'à s, les valeurs successives, $0, 1, 2 \ldots . \frac{p-1}{2}$.

Pour une même série les valeurs de s seront les seules qui changeront; tandis que le changement attribué à v marquera le passage d'une série à une autre.

La forme générale des puissances de x qui ne font pas parties de la valeur $\partial' Y'$ est $x^{\frac{p^2-(2k+1)p+2h}{2}}$. En donnant successivement à h les valeurs $1, 2 \ldots . \frac{p-1}{2}$, et ne changeant pas celles de k, on a les $\frac{p-1}{2}$ puissances de x qui se suivent immédiatement; et, en attribuant successivement à k les valeurs $0, 1, 2 \ldots . \frac{p-1}{2}-1$, on passe d'une de ces suites à une autre dont tous les termes ont également zéro pour coëfficiens.

Il résulte de ce qu'on vient de dire que parmi les puissances de x qui appartiennent aux $\frac{p^2+1}{2}$ termes dont se compose le développement de $2(x-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$, un nombre $\frac{p+1}{2}.\frac{p+1}{2}$, seulement, fait partie de la valeur

de Y'; tandis qu'un nombre $\frac{p-1}{2}.\frac{p-1}{2}$ de ces puissances en est retranché. Si on remonte à la manière dont se forme l'équation $\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$, le calcul immédiat des valeurs de Y' fournira à la fois la confirmation et l'exemple de cet arrangement entre les puissances de x.

En effet pour former l'équation $\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$ on reprend l'équation $\frac{4(x^p-1)}{x-1}=y^2\pm pz^2$, on écrit une seconde fois la même équation en y changeant x en x^p et y et z en Y et Z ce qui donne $\frac{x(x^{p^2}-1)}{x^p-1}=Y^2\pm pZ^2$ et après avoir multiplié l'un par l'autre les membres respectifs de ces équations, on trouve

$$\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=\frac{(Yy\mp pZz)^2}{2}\pm p\frac{(Yz+Zy)^2}{2}=Y'^2\pm pZ'^2.$$

Soient $p=3$, on aura $Y'=\frac{Yy-3zZ}{2}=\frac{(2x+1)(2x^3+1)-3}{2}=2x^3+x^3|+x-2$,

- $p=5$ - - $Y'=(Yy+5Zz):2$

$$=\frac{(2x^2+x+2)(2x^{10}+x^5+2)+5x^6}{2}$$

$$=2x^{12}+x^{11}+2x^{10}|+x^7+3x^6+x^5|+2x^2+x+2,$$

- $p=7$ - - $Y'=(Yy-7Zz):2$

$$=\frac{(2x^3+x^2-x-2)(2x^{21}+x^{14}-x^7-2)-|(x^2+x)(x^{14}+x^7)}{2}$$

$$=2x^{24}+x^{23}-x^{22}-2x^{21}|+x^{17}-3x^{16}-4x^{15}-x^{14}|$$
$$-x^{10}-4x^9-3x^8+x^7|-2x^3-x^2+x+2,$$

- $p=11$ - - $Y'=(Yy-11Zz):2$

$$=\frac{(2x^5+x^4-2x^3+2x^2-x-z)(2x^{55}+x^{44}-2x^{33}+2x^{22}-x^{11}-2)-11(x^4+x)(x^{44}+x^{11})}{2}$$

$$=2x^{60}+x^{59}-2x^{58}+2x^{57}-x^{56}-2x^{55}|+x^{49}-5x^{48}-x^{47}+x^{46}-6x^{45}-x^{44}|$$
$$-2x^{38}-x^{37}+2x^{36}-2x^{35}+x^{34}+2x^{33}|+2x^{27}+x^{26}-2x^{25}+2x^{24}-x^{23}-2x^{22}|$$
$$-x^{16}-6x^{15}+x^{14}-x^{13}-5x^{12}+x^{11}|-2x^5-x^4+2x^3-2x^2+x+2.$$

Ce petit nombre d'exemples, dans lesquels on a separé les différentes séries de $\frac{p+1}{2}$ termes par ce signe $|$, suffit sans doute pour montrer que le calcul direct confirme pleinement ce que la considération du développement de $2(x-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$ nous a appris touchant la manière dont la valeur de Y' doit être composée.

A l'égard de la valeur de Z', il est évident qu'elle ne peut contenir aucune des puissances de x qui manquent dans celle de Y' et c'est ce que le calcul direct confirme également.

23.

Entwickelung der Bedingungen des Gleichgewichts zwischen Kräften, die auf einen freien festen Körper wirken.

(Von dem Herrn Prof. *A. F. Möbius* zu Leipzig.)

Im 2ten Hefte des IV. Bandes dieses Journals habe ich eine neue Art angegeben, das Moment einer Kraft in Bezug auf eine gewisse Axe auszudrücken, durch die dreiseitige Pyramide nämlich, von welcher die Axe und die ihrer Richtung und Intensität nach durch eine Linie vorgestellte Kraft zwei gegenüberliegende Seiten sind. Ist daher ein System von Kräften, welche auf einen freien festen Körper wirken, im Gleichgewicht, so ist die algebraische Summe der Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Kante und die Kräfte der Reihe nach zu gegenüberliegenden Kanten haben, immer $=0$, welches auch die Lage und Gröfse der gemeinschaftlichen Kante oder Axe sein mag; und umgekehrt: findet sich diese Summe für jede Axe $=0$, so herrscht Gleichgewicht. Diesen Satz, aus welchem sich, wie leicht zu erachten, als aus einer gemeinschaftlichen Quelle, alle übrigen hierher gehörigen Gesetze des Gleichgewichts ergeben müssen, habe ich in vorliegenden Blättern aus den ersten Principien der Statik zu entwickeln gesucht. Das Mittel, dessen ich mich dazu bedient habe, sind die von Poinsot schon seit längerer Zeit in die Elemente der Statik mit grofsem Vortheil eingeführten Couples, oder Systeme von je zwei einander gleichen, nach parallelen aber entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften, Kräftepaare in dem Folgenden genannt.

Poinsot gründet in seinen Elementen der Statik seine schöne, die zusammengesetzteren Untersuchungen dieser Wissenschaft überaus vereinfachende Theorie der Kräftepaare auf die derselben vorausgeschickte Lehre der Zusammensetzung von parallelen Kräften und von Kräften, die auf einen Punct wirken. Es scheint mir aber noch vortheilhafter zu sein, wenn man die Elemente der Statik nach Auseinandersetzung der Fundamentalbegriffe von Kraft, Gleichgewicht, gleichwirkenden Kräften, u. s. w. mit der Theorie der Kräftepaare sogleich beginnen läfst; und ich hoffe diese

Behauptung durch die einfache Weise, mit welcher sich die Paare gleich beim Eingang in die Statik wie von selbst, darbieten, und durch die Kürze, mit welcher ich hier die vorzüglichsten Eigenschaften der Paare bewiesen, und damit zu dem vorhin angeführten allgemeinen Satze des Gleichgewichts gelangt bin, genugsam gerechtfertigt zu haben. Mit Hülfe dieses Satzes und mittelst des bekannten analytischen Ausdrucks für den Inhalt einer Pyramide habe ich hierauf die sechs bekannten allgemeinen Bedingungsgleichungen, als den endlichen Zweck dieser kleinen Abhandlung, hergeleitet.

Ich bemerke nur noch, dafs, um möglichst kurz zu sein, mehrere Eigenschaften der Paare, die, obschon an sich keineswegs unwichtig, doch zu dem genannten Endzweck nicht weiter förderlich waren, weggelassen worden sind. Auch erwähne ich noch für diejenigen, welche Poinsot's Elemente der Statik nicht näher kennen, dafs die Betrachtung im letzten Abschnitte, aus welcher hervorgeht, dafs ein System von Kräften im Raume im Allgemeinen auf eine einfache Kraft und ein Paar zurückgeführt werden kann, nicht mir, sondern Poinsot zugehört.

Begriff der Kräftepaare und Haupteigenschaft derselben.

Auf den Punct A (Taf. III. Fig. 1.) wirken zwei einander gleiche Kräfte P, Q nach den Richtungen AB, AD; die Resultante dieser Kräfte, welche mit ihnen in einer Ebene liegt, und den Winkel BAD halbirt, habe die Richtung AC. Da nun die Intensität der Resultante nur von den Intensitäten der Kräfte selbst und von dem Winkel den sie mit einander bilden, abhängig sein kann, so wird, wenn man in einem beliebigen andern Puncte C der nach AC gerichteten Resultante von P, Q zwei andere diesen Kräften gleiche und mit ihnen parallele, nach CE, CF gerichtete Kräfte R, S anbringt, die Resultante der letztern mit der Resultante der erstern einerlei Richtung und Intensität haben, und es werden folglich die Kräfte R, S mit den Kräften P, Q gleichwirkend sein. Man verlängere noch die Richtungen CE, CF rückwärts bis zum Zusammentreffen mit AD, AB, so ist, weil AC die Winkel BAD, BCD halbirt, das dadurch entstehende Parallelogramm $ABCD$ ein Rhombus, und wir haben somit folgenden Satz:

Sind A, B, C, D die vier auf einander folgenden Spitzen eines Rhombus, so sind von vier einander gleichen Kräften P, Q, R, S, welche

resp. die Richtungen AB, AD, DC, BC haben, P und Q gleichwirkend mit R und S.

Dieser höchst einfache, aus den allerersten Principien der Statik hervorgehende Satz, wird uns nun, etwas anders nur dargestellt, zur Basis aller folgenden Untersuchungen dienen. Sind nämlich P, Q gleichwirkend mit R, S, so sind es auch P und $-R$ mit $-Q$ und S; d. h. von vier einander gleichen, und, wenn $ABCD$ wieder einen Rhombus vorstellt, nach AB, CD, DA, BC gerichteten Kräften, haben die zwei ersten mit den zwei letztern einerlei Wirkung.

Um diesen Satz bequemer ausdrücken und somit besser benutzen zu können, wollen wir zwei sich gleiche Kräfte, die, wie P und $-R$, nach zwei einander parallelen aber entgegengesetzten Richtungen AB und CD wirken, ein Kräftepaar, oder schlechthin ein Paar nennen; der gegenseitige Abstand ihrer parallelen Richtungen heifse die Breite des Paares; und wenn wir uns für einen Augenblick vorstellen, dafs die Ebene, in welcher die zwei Kräfte wirken, in irgend einem zwischen ihnen liegenden Puncte befestigt sei, so heifse der Sinn, nach welchem die eine, wie die andere Kraft, die Ebene um diesen Punct drehen würde, der Sinn des Paares. So hat in unserer Figur jedes der beiden Paare P, $-R$, und $-Q$, S einen Sinn von der Rechten nach der Linken; sie sind also beide von einerlei, nicht von entgegengesetztem Sinne.

Da nun zwei Paare, in einer Ebene, die einander gleiche Breiten haben, mit den Richtungen ihrer vier Kräfte offenbar immer einen Rhombus bilden, den einzigen Fall ausgenommen, wo die Kräfte des einen Paares mit denen des andern parallel sind, so können wir mit einstweiliger Beseitigung dieses Falles den obigen Satz kurz so ausdrücken:

Zwei Paare in einer Ebene, die einander gleiche Kräfte und Breiten und einerlei Sinn haben, sind gleichwirkend; oder noch kürzer: Eben so, wie die Wirkung einer einfachen Kraft unverändert bleibt, welcher Punct ihrer Richtung auch zum Angriffspuncte genommen wird, so kann auch ein Kräftepaar in seiner Ebene, wohin man will, verlegt werden.

Was noch den dabei beseitigten Fall anlangt, wo die Kräfte der zwei einander gleichen Paare einander parallele Richtungen haben, so denke man sich noch ein drittes Paar hinzu, das mit jenen zweien in einer Ebene liegt, jedem derselben gleich ist, mit ihnen einerlei Sinn hat, und dessen

Kräfte die Kräfte der erstern unter einem beliebigen Winkel schneiden. Vermöge des eben Erwiesenen ist nun dieses Paar mit jedem der beiden erstern gleichwirkend; mithin sind auch die beiden erstern selbst von gleicher Wirkung, und unser Satz gilt daher ohne alle Beschränkung.

Zusammensetzung von Kräftepaaren in einer Ebene.

Indem wir jede Kraft ihrer Intensität und Richtung nach durch die Länge und Richtung einer geraden Linie vorstellen, seien AB, $A'B'$ und CD, $C'D'$ (Fig. 2.) zwei Paare in einer Ebene von einander gleichen Breiten und einerlei Sinne. Man mache in den Verlängerungen von AB und $A'B'$ über B und B' hinaus, $BE = B'E' = CD = C'D'$, so ist nach dem Vorigen das Paar CD, $C'D'$ gleichwirkend mit dem Paare BE, $B'E'$, und folglich die zwei Paare AB, $A'B'$ und CD, $C'D'$ gleichwirkend mit AB, BE, $A'B'$, $B'E'$, d. i., mit dem Paare AE, $A'E'$, welches denselben Sinn und dieselbe Breite, wie jedes der zwei erstern hat, dessen Kräfte aber die Summen der Kräfte der erstern sind.

Seien zweitens AB, $A'B'$ und CD, $C'D'$ (Fig. 3.) zwei Paare in einer Ebene, die einerlei Sinn und einander gleiche Kräfte haben. Man ziehe auf der Seite von $A'B'$, auf welcher AB nicht liegt, mit $A'B'$ eine ihr gleiche Parallele EF, welche eben so weit von $A'B'$, als $D'C'$ von CD, entfernt liegt. Alsdann ist das Paar CD, $C'D'$ gleichwirkend mit dem Paare $B'A'$, EF, und folglich die beiden Paare AB, $A'B'$ und CD, $C'D'$ gleichwirkend mit AB, $A'B'$, $B'A'$ EF, d. i., mit dem Paare AB, EF, welches denselben Sinn und dieselben Kräfte, wie die zwei erstern, aber eine Breite hat, die der Summe der Breiten der erstern gleich ist.

Man sieht nun leicht, wie das von der Zusammensetzung zweier Paare Gesagte auf die Zusammensetzung jeder gröfsern Anzahl ausgedehnt werden kann, so dafs immer ein System von Paaren, die in einer Ebene liegen, von einerlei Sinne sind, und entweder insgesammt einerlei Breite, oder sämmtlich dieselben Kräfte haben, gleichwirkend mit einem einzigen in derselben Ebene liegenden und nach demselben Sinne gerichteten Paare ist, welches im ersteren Falle mit den zusammenzusetzenden Paaren einerlei Breite hat, und dessen Kräfte den Summen der Kräfte dieser Paare gleich sind, im letztern Falle aber mit den Paaren des Systems einerlei Kräfte und eine Breite hat, die der Summe der Breiten aller dieser Paare gleich ist.

Hat man demnach ein System von m einander gleichen Paaren, die einerlei Sinn haben, von deren Kräften jede $= P$, die Breite eines jeden aber $= p$ ist, so ist dieses System gleichwirkend mit einem Paare, von dessen Kräften jede $= mP$, und dessen Breite $= p$ ist, so wie auch gleichwirkend mit einem Paare, dessen Kräfte einzeln $= P$, und dessen Breite $= mp$.

Umgekehrt wird sich daher ein Paar, dessen Kräfte $= mP$, und dessen Breite $= np$ ist, in m andere Paare zerlegen lassen, von deren jedem die Kräfte $= P$, die Breite $= nq$; und jedes dieser m Paare wird in n andere zerlegbar sein, von deren jedem die Kräfte $= P$, die Breite $= q$. Das Paar mit den Kräften mP und der Breite np ist folglich gleichwirkend mit $m.n$ Paaren, deren jedes die Kräfte P und die Breite q hat, folglich auch gleichwirkend mit einem Paare, dessen Kräfte $= nP$ sind, und dessen Breite $= mq$ ist; d. h.

Wenn von zwei Paaren, die in einerlei Ebene liegen und einerlei Sinn haben, die Kräfte sich umgekehrt wie die Breiten verhalten, so sind die Paare gleichwirkend.

Allerdings ist dieser Satz durch das Vorhergehende nur für commensurable Verhältnisse der Kräfte und Breiten bewiesen. Um ihn, will man streng sein, auch für incommensurable Verhältnisse darzuthun, bedarf man noch einiger anderer, nicht schwer zu erweisender Sätze, dafs nämlich mit zwei Kräften, welche ein Paar ausmachen, eine dritte Kraft nicht gleichwirkend sein kann, dafs aber, wenn die dritte in der Ebene des Paares liegt, es immer möglich ist, eine vierte Kraft in dieser Ebene hinzuzufügen, welche mit der dritten ein zweites, dem erstern gleichwirkendes Paar bildet; und dafs von zwei gleichwirkenden Paaren demjenigen, welches die gröfseren Kräfte hat, die kleinere Breite zukommt. Doch will ich dieses nicht weiter ausführen und nur noch bemerken, dafs der auch späterhin noch anzuwendende Satz, mit einem Paare könne eine dritte einfache Kraft nicht von gleicher Wirkung sein, ganz leicht daraus erhellet, dafs sich immer wenigstens noch eine vierte Kraft angeben läfst, welche, von der dritten der Richtung nach verschieden, doch einerlei Lage mit der dritten gegen das Paar hat; dafs folglich, wenn diese vierte Kraft die Intensität der dritten erhielte, sie gleichfalls mit dem Paare, also auch mit der dritten Kraft selbst, von gleicher Wirkung sein müfste, was aber bei Kräften, deren Richtungen nicht identisch sind, nicht möglich ist.

Mittelst derselben Principien läfst sich auch der umgekehrte Satz des vorigen darthun, dafs **wenn zwei Paare in einer Ebene gleichwirkend sind, ihre Kräfte in dem umgekehrten Verhältnisse ihrer Breiten stehen.**

Es giebt noch eine andere, sehr anschauliche Art, diese Sätze auszudrücken. Bezeichnen nämlich, wie im Vorigen, die Linien AB, $A'B'$ die zwei Kräfte eines Paares, so sind A, B, A', B' die vier auf einander folgenden Spitzen eines Parallelogramms, wovon, wenn eine der beiden Kräfte zur Grundlinie genommen wird, die Breite des Paares die Höhe ist. Vermöge der bekannten Eigenschaften der Parallelogramme können wir daher auch sagen:

Zwei Paare AB, $A'B'$ und CD, $C'D'$, die in einer Ebene liegen, und einerlei Sinn haben, sind gleichwirkend, wenn die Parallelogramme $ABA'B'$ und $CDC'D'$ von gleichem Inhalte sind; und umgekehrt: sind zwei Kräftepaare in einer Ebene gleichwirkend, so haben die durch sie gebildeten Parallelogramme gleichen Inhalt.

Hiernach ist es immer ganz leicht, zwei, und also auch mehrere, in einer Ebene liegende Paare zu einem Paare zusammenzusetzen. Denn, vorausgesetzt, dafs die zwei zu verbindenden Paare AB, $A'B'$ und CD, $C'D'$ (Fig. 4.) einerlei Sinn haben, construire man in der Ebene derselben ein Parallelogramm $EFE'F'$, welches der Summe der Parallelogramme AA' und CC' gleich ist, und es wird das Paar EF, $E'F'$, von dem ich annehme, dafs es mit erstern einerlei Sinn hat, mit ihnen auch gleiche Wirkung haben. Denn theilt man das Parallelogramm EE' durch eine mit EF gezogene Parallele GH in zwei Parallelogramme EH und GE', so dafs $EH = AA'$, und folglich $GE' = CC'$, so sind die Paare AB, $A'B'$ und CD, $C'D'$ resp. gleichwirkend mit den Paaren EF, HG und GH, $E'F'$, d. i. mit dem Paare EF, $E'F'$.

Jedes andere Paar, dessen Parallelogramme nicht $= EE'$, also auch nicht $= AA' + CC'$, kann nicht mit dem Paare EF, EF', also auch nicht mit den Paaren AB, $A'B'$ und CD, $C'D'$ gleiche Wirkung haben, woraus wir umgekehrt schliefsen: Haben zwei Paare in einer Ebene einerlei Sinn, so ist das Parallelogramm eines dritten mit ihnen gleichwirkenden Paares der Summe ihrer Parallelogramme gleich.

Sind die zwei zu verbindenden Paare von einander entgegengesetztem Sinne, so sieht man ohne Schwierigkeit, dafs statt der Summe die Differenz ihrer Parallelogramme zu nehmen ist, und dafs das resultirende Paar mit demjenigen der beiden ersten einerlei Sinn hat, dessen Parallelogramm das gröfsere ist.

Zusammensetzung von Paaren, die in verschiedenen Ebenen liegen.

Seien NB, ND (Fig. 5.) die Ebenen zweier zusammenzusetzenden Paare p und p'. N und A seien zwei beliebige Puncte in der Durchschnittslinie beider Ebenen, und NC, NE zwei in letztern nach beliebigen Richtungen durch N gezogene gerade Linien, deren Längen man so bestimme, dafs die Parallelogramme $ANCB$ und $ANED$ resp. den Parallelogrammen von p und p' gleich werden, und man daher die Paare NC, BA und NE, DA den zusammenzusetzenden Paaren p und p' substituiren kann.

Sei nun von NC, NE die Resultante $= NG$ und von BA, DA die Resultante $= FA$, so sind, weil BA gleich und parallel mit NC ist, u. s. w., NG, FA zwei in den parallelen Ebenen CNE, BAD liegende, einander gleiche, parallele und nach entgegengetzten Richtungen wirkende Kräfte. Sie bilden mithin ein Paar, welches r heifse, das resultirende aus den beiden gegebenen Paaren, und wir schliefsen daher: Zwei Paare, die in zwei sich schneidenden Ebenen liegen, lassen sich zu einem Paare zusammensetzen, dessen Ebene durch die Durchschnittslinie der erstern Ebenen geht.

Man nehme noch in der Ebene CNE willkürlich einen Punct M und ziehe durch ihn MH, MI, MK resp. gleich und parallel mit NC, NE, NG, so ist, weil NG die Resultante von NC und NE war, KM die Resultante von HM und IM; folglich sind die Paare NC, HM und NE, IM gleichwirkend mit dem Paare NG, KM; und da diese drei Paare in einer Ebene liegen, so sind die Parallelogramme

$$1. \quad MNCH + MNEI = MNGK,$$

also auch ihre Hälften, oder die Dreiecke

$$2. \quad MNC + MNE = MNG,$$

folglich auch die Pyramiden, welche diese in einer Ebene liegenden Dreiecke zu Grundflächen, und den Punct A zur gemeinschaftlichen Spitze haben:

$$3. \quad MNCA + MNEA = MNGA.$$

Diese drei Pyramiden lassen sich aber auch als solche betrachten, deren

gemeinschaftliche Spitze M ist, und deren Grundflächen die Dreiecke NCA, NEA, NGA sind, oder mit andern Worten: als drei Pyramiden, welche den Punct M zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und deren Grundflächen in den Ebenen der Paare p, p', r liegen und den halben Parallelogrammen der letztern gleich sind. Der Punct M ist aber ein willkürlicher Punct im Raume überhaupt, weil er in der beliebig zu legenden Ebene CNE nach Willkür genommen werden konnte.

Bezeichnen wir daher eine Pyramide, deren Spitze M, und deren Grundfläche ihrer Lage und Gröfse nach das Parallelogramm eines Paares p ist, der Kürze willen durch Mp, so haben wir:

$$4. \quad Mp + Mp' = Mr,$$

wo auch M liegen mag, wenn nur die Zeichen gehörig berücksichtigt werden. Denn da in der Gleichung (1.) je zwei Parallelogramme nur dann einerlei Zeichen bekommen, wenn die Paare zu denen sie gehören, von einerlei Sinne sind, und da offenbar, nachdem je zwei dieser Paare, wie NC, HM und NE, IM einerlei oder entgegengesetzten Sinn haben, die Paare NC, BA und NE, DA, von M aus gesehen, mit einerlei oder entgegengesetztem Sinne erscheinen, so werden sich auch die Vorzeichen der Pyramiden in (3.) und (4.) nach dem Sinne richten, mit welchem die Paare p, p', r, von M aus betrachtet, sich zeigen.

Sei p'' irgend ein anderes Paar, dessen Ebene gleichfalls durch den Punct N gehe; das resultirende Paar von r und p'', dessen Ebene durch den Durchschnitt der Ebenen von r und p'' und daher ebenfalls durch N geht, heifse r', so ist r' auch das resultirende Paar von p, p', p'', und man hat: $Mr + Mp'' = Mr'$, folglich in Verbindung mit voriger Gleichung:

$$Mp + Mp' + Mp'' = Mr',$$

und so fort bei noch mehreren durch denselben Punct N gelegten Paaren, wenn auch hier je zwei Pyramiden mit einerlei oder entgegengesetzten Zeichen genommen werden, je nachdem die Paare, zu denen sie gehören, von M aus gesehen, einerlei oder entgegengesetzten Sinn haben.

Haben die Paare p, p', p'', ... kein resultirendes Paar, sondern halten sie einander das Gleichgewicht, so ist die Summe

$$Mp + Mp' + Mp'' + ... = 0.$$

Denn alsdann ist jedes der Paare, wie p, sobald man es nach einem, dem anfänglichen entgegengesetzten Sinne wirken läfst, das resultirende von den jedesmal übrigen, und daher $Mp' + Mp'' + ... = -Mp$; folglich u. s. w.

Hat man also ein System von Paaren, die mit einander im Gleichgewicht sind, und deren Ebenen sich in einem und demselben Puncte N schneiden, so ist die algebraische Summe der Pyramiden, welche einen beliebigen andern Punct zur gemeinschaftlichen Spitze, und die Parallelogramme der Paare zu Grundflächen haben, immer $=0$.

Vom Gleichgewicht zwischen Kräften, die nach beliebigen Richtungen wirken.

Seien die Kräfte, wie bisher durch gerade Linien vorgestellt: AB, CD, EF, ...; das von ihnen gebildete System heifse S. Durch einen willkürlichen Punct N lege man $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$, ... resp. den AB, CD, ... parallel und gleich, aber von entgegengesetzter Richtung. Alsdann ist das System S gleichwirkend mit dem System der Paare AB, $A'B'$; CD, $C'D'$; u. s. w., deren Ebenen insgesammt durch den Punct N gehen, in Verbindung mit dem System der einfachen sich in N schneidenden Kräfte $B'A'$, $D'C'$, $F'E'$, ... Man bezeichne letzteres System mit V, und das System der Paare mit W.

Nun ist V entweder im Gleichgewicht oder hat eine einfache Kraft zur Resultante; eben so ist W entweder im Gleichgewicht oder reducirt sich auf ein Paar. Folglich ist das System S, welches mit V und W in Verbindung gleiche Wirkung hat, entweder im Gleichgewicht, oder läfst sich auf eine einfache Kraft oder auf ein Paar, oder auf eine einfache Kraft und ein Paar zusammen zurückführen. Da nun, wie bereits oben gezeigt worden, eine einfache Kraft mit einem Paare nicht gleichwirkend sein kann, folglich auch zwischen der einen und dem andern kein Gleichgewicht möglich ist, so mufs, wenn S im Gleichgewicht sein soll, jedes der beiden Systeme V und W für sich im Gleichgewicht sein. Ist aber W im Gleichgewicht, so ist nach dem vorigen die Summe der Pyramiden

$$MNAB + MNCD + ... = 0,$$

wo auch M liegen mag. Denn NAB, NCD sind offenbar die halben Parallelogramme der Paare AB, $A'B'$; CD, $C'D'$; .... aus denen W zusammengesetzt ist.

Es ist aber N eben sowohl, als M, ein von dem System unabhängiger Punct, und wir schliefsen daher: **Wenn zwischen mehrern auf einen freien Körper wirkenden Kräften Gleichgewicht**

herrscht, so ist die algebraische Summe der Pyramiden, welche eine Gerade MN von beliebiger Lage und Länge zur gemeinschaftlichen Kante und die Kräfte, durch gerade Linien vorgestellt, zu gegenüberstehenden Kanten haben, immer $=0$. Die Vorzeichen der Pyramiden können hier entweder eben so, wie im Vorigen, bestimmt werden, oder auch für gegenwärtigen Zweck noch passender also, dafs man je zwei Pyramiden mit einerlei oder entgegengesetzten Zeichen nimmt, je nachdem die ihnen zugehörigen Kräfte den Körper um die Gerade MN, falls er an dieser befestigt wäre, nach einerlei oder entgegengesetzten Seiten drehen würden.

Ist ein System von Kräften nicht im Gleichgewicht, sondern gleichwirkend mit einem zweiten System, folglich im Gleichgewicht mit den nach entgegengesetzter Richtung genommenen Kräften des zweiten Systems, so ist für eine und dieselbe aber beliebige Axe MN die Summe der Pyramiden des einen Systems der Summe der Pyramiden des andern gleich. Ist daher ein System von Kräften nicht im Gleichgewicht, so ist auch die Summe der Pyramiden, welche π heifse, nicht für jede Lage von MN, $=0$. Denn ein solches System ist entweder gleichwirkend mit einer einzigen Kraft p, oder mit einem Paare q, q', und einer einfachen Kraft p, welche nicht in der Ebene des Paares liegt, indem sonst p, q, q' auf eine einzige Kraft reducirbar wären. Es ist demnach

$$\pi \text{ entweder } = mp,$$
$$\text{oder } = mq + mq',$$
$$\text{oder } = mp + mq + mq',$$

wo m für MN gesetzt worden, und wo mp die Pyramide bezeichnet, welche m und p zu gegenüberliegenden Seiten hat. Hieraus sieht man nun leicht, dafs der Axe m immer und auf unendlich viele Arten eine solche Lage gegeben werden kann, wobei π nicht $=0$ ist. Legt man im dritten Falle z. B. m in die Ebene des Paares q, q', jedoch so, dafs m nicht auch mit p in einer Ebene ist, so werden mq und $mq'=0$, und π reducirt sich auf mp, welches nicht $=0$ ist.

Je nachdem also in einem System von Kräften Gleichgewicht herrscht, oder nicht, ist die Summe der Pyramiden für alle, oder nicht für alle, Lagen der Axe m, $=0$. Ist folglich, so schliefsen wir umgekehrt, die algebraische Summe der Pyramiden, welche eine gemeinschaftliche Kante und die Kräfte zu gegenüberliegenden Kanten

haben, für jede beliebige Lage der gemeinschaftlichen Kante oder Axe $=0$, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht.

Wir wollen jetzt diese Bedingung des Gleichgewichts analytisch auszudrücken suchen und zu dem Ende das System der Kräfte AB, CD, ... auf ein System paralleler Coordinaten beziehen. — Seien bei der Kraft AB die Coordinaten des Punctes A, $= x, y, z$; die Coordinaten von B, $= x+X$, $y+Y$, $z+Z$; also x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punctes in der Richtung der Kraft, und X, Y, Z die Projectionen von AB auf die Axen der x, y, z, oder vielmehr drei Kräfte, die sich ihrer Intensität nach eben so zu der durch AB vorgestellten Kraft verhalten, wie die Projectionen von AB zu AB selbst. Seien ferner f, g, h die Coordinaten von M, und $f+F$, $g+G$, $h+H$ die Coordinaten von N; endlich bezeichne man durch r den sechsten Theil des Products aus dem Sinus des Winkels, den die Axe der y mit der Axe der x macht, in den Sinus des Winkels der Axe der z mit der Ebene der x, y: so ist der Inhalt der Pyramide $MNAB$

$$= r[(gH-hG)X+(hF-fH)Y+(fG-gF)Z$$
$$+F(yZ-zY)+G(zX-xZ)+H(xY-yX)].$$

Wird daher, wie die Kraft AB durch x, y, z, X, Y, Z, so die folgende Kraft CD durch x', y', z', X', Y', Z', u. s. w. bestimmt, so ist mit Anwendung des Summationszeichens Σ die Summe der Pyramiden $MNAB + MNCD + \ldots$

$$= r[gH-hG)\Sigma X+(hF-fH)\Sigma Y+(fG-gF)\Sigma Z$$
$$+F\Sigma(yZ-zY)+G\Sigma(zX-xZ)+H\Sigma(xY-yX)].$$

Sollen nun die Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so mufs diese Summe für jede beliebige Lage von MN, mithin für alle beliebigen Werthe der sechs Gröfsen f, g, h, F, G, H, $=0$ sein. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn

$$\Sigma X=0,\quad \Sigma Y=0,\quad \Sigma Z=0,$$
$$\Sigma(yZ-zY)=0,\quad \Sigma(zX-xZ)=0,\quad \Sigma(xY-yX)=0.$$

Und da umgekehrt, wenn diese sechs Gleichungen erfüllt werden, die Summe der Pyramiden für alle möglichen Werthe von f, g, ... H, also für jede Lage von MN, $=0$ ist, und mithin Gleichgewicht herrscht, so **sind dies die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichts.**

Zusätze. 1. Sind sämmtliche Kräfte auf einen Punct gerichtet, und nimmt man diesen zum Anfangspunct der Coordinaten, so kann man

$x, y, z, x', y', z', \ldots$ insgesammt $= 0$ setzen. Hiermit werden von den sechs Gleichungen die drei letzten identisch, und es bleiben blofs die drei ersten

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

als Bedingungen des Gleichgewichts übrig.

Angenommen, dafs ein solches System nur aus vier Kräften P, Q, R, S bestehe, von denen P, Q, R resp. nach den Axen der x, y, z wirken, S aber eine beliebige andere Richtung und X, Y, Z zu Projectionen habe, so werden die Bedingungen, unter denen P, Q, R, S im Gleichgewicht sind:

$$P + X = 0, \quad Q + Y = 0, \quad R + Z = 0;$$

oder $P = -X$, $Q = -Y$, $R = -Z$. Die Kraft S ist folglich im Gleichgewicht mit $-X$, $-Y$, $-Z$, und daher gleichwirkend mit ihren Projectionen auf die drei Coordinatenaxen, wenn diese Projectionen parallel mit den Axen in irgend einem Puncte der Richtung der Kraft angebracht werden; — der bekannte Satz vom Parallelepipedum der Kräfte.

Dafs man durch die Annahme von $Z = 0$ auf gleiche Weise zu dem Parallelogramm der Kräfte geführt wird, bedarf keiner Erinnerung.

2. Ohne erst die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts entwickelt zu haben, kann man das Parallelogramm der Kräfte aus der Theorie der Paare auch unmittelbar ableiten. — Seien EF, EG (Fig. 4.) zwei auf einen Punct E wirkende Kräfte. Man vollende das Parallelogramm $GEFH$, so sind die Paare EF, HG und FH, GE gleichwirkend, indem sie beide einerlei Sinn haben und demselben Parallelogramm angehören. Mithin sind auch die Kräfte EF, EG gleichwirkend mit FH, GH, und es haben daher erstere zwei in E angebrachte Kräfte mit den zwei letztern auf H wirkenden einerlei Resultante, deren Richtung folglich EH ist. Wie aber daraus, dafs die Diagonale EH die Richtung der Resultante angiebt, sich weiter folgern läfst, dafs sie auch die Gröfse der Resultante vorstellt, ist aus den Lehrbüchern der Statik bekannt genug.

24.

Verschiedene mathematische Aufgaben und Sätze.

(Von dem Herrn Conrector *Beyer* zu Neu-Stettin.)

I. Aufgabe. **Das gröfste unter allen Dreiecken zu finden, deren Winkelspitzen in den Peripherien dreier concentrischer Kreise liegen, deren Halbmesser $a<b$ und $b<c$ gegeben sind.**

Auflösung. Das zu bestimmende Dreieck *ABD* (Taf. III. Fig. 6.) sei $=F$ und durch die drei von seinen Winkelspitzen nach dem gemeinschaftlichen Mittelpuncte der concentrischen Kreise gezogenen Halbmesser a, b, c in drei Theile zerlegt. Bezeichnet man die von a, b, von b, c, von a, c gebildeten Winkel durch x, y, z, so ist $z=360°-(x+y)$ und $F=\frac{1}{2}ab\sin x+\frac{1}{2}bc\sin y-\frac{1}{2}ac\sin(x+y)$. Soll nun F ein Maximum werden, so mufs

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{2}ab\cos x-\frac{1}{2}ac\cos(x+y)=0$$

und auch

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{2}bc\cos y-\frac{1}{2}ac\cos(x+y)=0$$

sein. Hieraus folgt $a\cos x=c\cos y$, $b\cos x=c\cos z$ und $b\cos y=a\cos z$, nach welchen Gleichungen nur $y>270°$ für $x+z<90°$, oder alle drei Winkel x, y, z stumpfe sein können. Aus

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{2}ab\cos x-\frac{1}{2}ac\cos(x+y)=0$$

ergiebt sich auch

$$b\cos x-c\cos x\cos y+c\sin x\sin y=0$$

oder

$$b\cos x-a\cos x^2=-c\sin x\sin y,$$

indem $\cos y=\frac{a}{c}\cos x$ ist. Quadrirt man nun, so erhält man

$$b^2\cos x^2-2ab\cos x^3+a^2\cos x^3=c^2\sin x^2\sin y^2=c^2(1-\cos x^2)\left(1-\frac{a^2}{c^2}\cos x^2\right)$$
$$=c^2-a^2\cos x^2-c^2\cos x^2+a^2\cos x^4,$$

folglich ist

$$b^2\cos x^2-2ab\cos x^3=c^2-a^2\cos x^2-c^2\cos x^2$$

und

$$\cos x^3-\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}\cos x^2+\frac{c^2}{2ab}=0.$$

Für ein Maximum von F mufs ferner $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ negativ sein. Es ist aber

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\tfrac{1}{2} a b \sin x + \tfrac{1}{2} a c \sin(x+y) \text{ und}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\tfrac{1}{2} b c \sin y + \tfrac{1}{2} a c \sin(x+y).$$

Beide Ausdrücke sind negativ, wenn x, y, z stumpfe Winkel sind, und der erste ist es auch für $y > 270°$ und $x+z<90°$. Für ein Maximum von F mufs endlich $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x.\partial y}\right)^2$, hier also

$(-\frac{1}{2} ab\sin x+\frac{1}{2} ac\sin(x+y))\cdot(-\frac{1}{2} bc\sin y+\frac{1}{2} ac\sin(x+y) > (\frac{1}{2} ac\sin(x+y))^2$,

d. i. $\frac{1}{4} a b^2 c \sin x \sin y - \frac{1}{4} a^2 b c \sin x \sin(x+y) - \frac{1}{4} a b c^2 \sin y \sin(x+y) + \frac{1}{4} a^2 c^2 \sin(x+y)^2 > \frac{1}{4} a^2 c^2 \sin(x+y)^2$ oder $b\sin a\sin y - a\sin x\sin(x+y) - c\sin y\sin(x+y) > 0$ sein, welches nur für x und $y \gtrless \begin{matrix}90°\\180°\end{matrix}$, nicht aber für $x<90°$ und $y>270°$ statt findet. Folglich ist F ein Maximum, wenn

$$\cos x^3 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}\cos x^2 + \frac{c^2}{2ab} = 0 \text{ und } x \gtrless \begin{matrix}90°\\180°\end{matrix} \text{ ist.}$$

Um x selbst zu finden, setze man $\cos x = u + \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab} = u + \frac{1}{3} n$. Dann erhält man $u^3 - \frac{1}{3} n^2 . u + \frac{c^2}{2ab} - \frac{2}{27} n^3 = 0$; bezeichnet man nun $\frac{1}{3} n^2$ mit p und $\frac{c^2}{2ab} - \frac{2}{27} n^3$ mit q, so ist

$$u = \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2} q + \sqrt{(\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3)})} + \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2} q - \sqrt{(\tfrac{1}{4} q^2 - \tfrac{1}{27} p^3)})},$$

woraus sich u berechnen läfst, wofern nicht $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27} p^3$, d. i. $\frac{1}{4} q^2 < \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{27} n^6$ oder $\frac{1}{2} q < \frac{1}{27} n^3$ oder $\sqrt[3]{(\frac{1}{2} q)} < \frac{1}{3} n$. Da nun u immer negativ und $\sqrt[3]{(\frac{1}{2} q)}$ nicht $< \frac{1}{3} n$ ist, so ist auch $\cos x = u + \frac{1}{3} n$ negativ, wie es der stumpfe Winkel x verlangt. Ist hingegen $\sqrt[3]{(\frac{1}{2} q)} < \frac{1}{3} n$ und $\frac{c^2}{2ab} - \frac{2}{27} n^3$ nicht negativ, also $\frac{c^2}{2ab}$ nicht $< \frac{2}{27} n^3$, so erhält man aus $u^3 - p u + q = 0$ für u folgende drei Werthe: $r\sin\varphi$, $r\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$ und $-r\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi)$, wo $r = \sqrt{(\frac{4}{3} p)} = \frac{2}{3} n$ und $\sin 3\varphi = \frac{4q}{n^3}$ für den kleinsten Werth des Bogens 3φ ist. Unter den drei Werthen von u kann nur der letzte $-r\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi)$ zur Bestimmung von $\cos x$ gebraucht werden, weil $\cos x$ negativ sein mufs. Er genügt aber auch den Anforderungen des $\cos x$, denn $\sin 3\varphi$ ist positiv, folglich 3φ nicht $> 90°$ und φ nicht $> 30°$, also $\frac{1}{3}\pi + \varphi > 60°$, aber nicht $> 90°$ und $\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi) > \frac{1}{2}\sqrt{3}$, mithin $r\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi) > \frac{1}{2} r\sqrt{3}$ oder $> \frac{1}{3} n\sqrt{3}$, so dafs $\cos x = -r\sin(\frac{1}{3}\pi+\varphi) + \frac{1}{3} n$ negativ ist. Wäre aber $\frac{c^2}{2ab} - \frac{2}{27} n^3$

negativ, also $\frac{2}{27}n^3 > \frac{c^2}{2ab}$, und setzte man nun $\frac{2}{27}n^3 - \frac{c^2}{2ab} = q$, so würden sich aus $u^3 - pu - q = 0$ für u die drei Werthe $-r\sin\varphi$, $-r\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$ und $+r\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$ ergeben, wo $r = \frac{2}{3}n$ und $\sin 3\varphi = \frac{4q}{r^3}$ für den kleinsten Werth des Bogens 3φ wäre. Zur Bestimmung von $\cos x$ kann nur $u = -r\sin(\frac{1}{3}\pi - \varphi)$ gebraucht werden. Denn nicht nur $u = r\sin(\frac{1}{3}\pi + \varphi)$ macht $\cos x$ positiv, sondern auch $u = -r\sin\varphi$, weil $\sin\varphi < \frac{1}{2}$ also $r\sin\varphi < \frac{1}{2}r$ oder $< \frac{1}{3}n$ ist.

II. Lehrsatz. **Das gröfste Viereck unter allen, deren Winkelspitzen in den Peripherien vier concentrischer Kreise liegen, entsteht, wenn man durch den gemeinschaftlichen Mittelpunct zwei einander rechtwinklig schneidende gerade Linien zieht, von denen die eine aus dem gröfsten und kleinsten und die andere aus den übrigen Halbmessern besteht, und die dadurch bestimmten Puncte der Peripherien durch gerade Linien verbindet.**

Beweis. Die Halbmesser der vier concentrischen Kreise seien a, b, c, d und zwar $a < b$, $b < c$, $c < d$. Zieht man nun die Halbmesser in der Ordnung a, b, d, c, und bezeichnet die von a, b, von b, d, von d, c, von c, a gebildeten Winkel durch x, y, z, u, so ist das zwischen den von a, b, d, c in den Peripherien bestimmten Puncten liegende Viereck

$$= \tfrac{1}{2}ab\sin x + \tfrac{1}{2}bd\sin y + \tfrac{1}{2}cd\sin z + \tfrac{1}{2}ac\sin w,$$

welche Summe am gröfsten ist, wenn $x = y = z = u = 90°$. Dann ist das Viereck $= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bd + \frac{1}{2}cd + \frac{1}{2}ac$. Folgen aber die Halbmesser in der Ordnung a, b, c, d oder a, c, b, d, so ist das gröfste Viereck

$$= \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{2}cd + \tfrac{1}{2}ad \text{ oder } = \tfrac{1}{2}ac + \tfrac{1}{2}cb + \tfrac{1}{2}bd + \tfrac{1}{2}da.$$

Beide Summen sind kleiner als die erste, weil $\frac{1}{2}c(b-a) < \frac{1}{2}d(b-a)$, d. i. $\frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ad < \frac{1}{2}bd + \frac{1}{2}ac$, und weil $\frac{1}{2}a(d-b) < \frac{1}{2}c(d-b)$, d. i. $\frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bc < \frac{1}{2}cd + \frac{1}{2}ab$ ist. Da nun die angegebenen drei Ordnungen der Halbmesser allein verschiedene Vierecke geben, und die erste auf das gröfste führt, so ist die im Lehrsatze aufgestellte Behauptung gerechtfertigt.

III. Aufgabe. **Zu einer dreiseitigen und einer vierseitigen Pyramide sind die in der Spitze zusammenstofsenden Kanten und die Höhe, welche kleiner ist als die kleinste der Kanten, gegeben. Es soll die Grundfläche so bestimmt werden, dafs sie, mithin auch die Pyramide ein Maximum sei.**

Auflösung. Stellt man sich die Kanten in der Spitze so um die Höhe herumbewegt vor, dafs sie in der Ebene der Grundfläche Kreise beschreiben, so entstehen, wofern die Kanten ungleich sind, bei der dreiseitigen Pyramide drei und bei der vierseitigen vier concentrische Kreise, deren Halbmesser durch die gegebenen Kanten und die gegebene Höhe bestimmt sind. Hieraus folgt, dafs diese Aufgabe sich mittelst der vorhergehenden Sätze lösen läfst.

IV. Aufgabe. Die Zahl der Permutationen aus n Elementen ohne Wiederholungen zu finden.

Auflösung. Da aus den Permutationen n gegebener Elemente die Permutationen von $n+1$ Elementen, dadurch gebildet werden können, dafs man das neue Element jeder Complexion beifügt und dann mit jedem der in ihr ursprünglich enthaltenen n Elemente versetzt, so ist die Zahl der Permutationen aus $n+1$ Elementen $n+1$ mal gröfser, als die Zahl der Permutationen aus n Elementen. Umgekehrt wird also die Zahl der Permutationen aus n Elementen $n+1$ mal kleiner sein, als die Zahl der Permutationen aus $n+1$ Elementen.

Wenn daher n Elemente x Permutationen geben, so geben

$n-1$ Elemente $\frac{x}{n}$ Permutationen,

$n-2$ Elemente $\frac{x}{n.(n-1)}$ Permutationen,

. . . . . .

$n-(n-1)$ Elemente $\frac{x}{n.(n-1)....[n-(n-2)]}$ Permutationen, oder

1 Element $\frac{x}{n.(n-1)....2}$ Permutationen.

Ein Element giebt aber nur 1 Complexion, folglich ist $\frac{x}{n.(n-1)....2}=1$, mithin $x=1.2....(n-1).n=$ der Zahl der Permutationen aus n Elementen ohne Wiederholungen.

V. Aufgabe. Die Zahl der Variationen der $r$ten Classe ohne Wiederholungen, aus n Elementen zu finden.

Auflösung. Aus der $r$ten Classe oder den $r$ionen von n Elementen kann man die $r+1$te Classe oder die $r+1$ionen herleiten, indem man jede Complexion der $r$ionen mit jedem der n Elemente der Reihe nach verbindet, mit Ausschlufs derjenigen, welche schon in der Complexion vorkommen. In jeder Complexion der $r$ionen kommen aber r Elemente

vor, daher kann sie nur mit $n-r$ Elementen verbunden werden, um die Complexionen der folgenden Classe zu erhalten, und es mufs also die Zahl der $(r+1)$ionen aus n Elementen $n-r$ mal so grofs, als die Zahl der $r$ionen, und die Zahl der letztern $\frac{1}{n-r}$ mal so grofs, als die Zahl der erstern sein.

Ist nun die Zahl der $r$ionen aus n Elementen $= x$,

so ist die Zahl der $(r\text{-}1)$ionen - - - - $= \frac{x}{n+r-1}$,

- - - $(r\text{-}2)$ - - - - - - $= \frac{x}{(n-r+1).(n-r+2)}$,

. . . . . .

die Zahl der $[r-(r\text{-}2)$ - - - - - $= \frac{x}{(n-r+1).(n-r+2)....n-2}$,

- - - $[r-(r\text{-}1)]$ionen oder Unionen $= \frac{x}{(n\text{-}r+1).(n\text{-}r+2)....(n\text{-}2).(n\text{-}1)}$.

Da nun die Zahl der Unionen aus n Elementen $= n$ ist, so ist

$$\frac{x}{(n-r+1).(n-r+2)....(n-2).(n-1)} = n,$$

also $x = n.(n-1)(n-2)....(n-r+2).(n-r+1)$.

VI. Beweis der im Journal Band 5. S. 318. No. 8. und 9. aufgestellten und ähnlicher Lehrsätze.

1. Es ist $\frac{RS.RP}{QS.QP} = \frac{RW.RV}{QW.QV}$ (Taf. III. Fig. 7.).

Beweis. Zieht man durch Q die EF parallel mit BD, aus dem Durchschnittspunct G die GH parallel mit AF und die SV in I schneidende Verbindungslinie EH, so ist EH parallel mit AD; folglich $\triangle DRS \sim \triangle EIQ$, also $\frac{RS}{IQ} = \frac{DR}{EQ} = \frac{RW}{QW}$. Aber $IQ : QS = HQ : AQ = GQ : FQ$, mithin $IQ = \frac{QS.GQ}{FQ}$, folglich $\frac{RS}{IQ} = \frac{RS.FQ}{QS.GQ} = \frac{RW}{QW}$. Ferner ist $\frac{RV}{QV} = \frac{RB}{FQ}$; daher $\frac{RS.FQ.RB}{QS.GQ.FQ} = \frac{RW.RV}{QW.QV}$, und da $\frac{RB}{GQ} = \frac{RP}{QP}$, so ist $\frac{RS.RP}{QS.QP} = \frac{RW.RV}{QW.QV}$.

2. Es ist $\frac{PQ.PR}{SQ.SR} = \frac{PW.PV}{SW.SV}$ (Fig. 8.).

Beweis. Zieht man EF parallel mit AD, aus G die GH parallel mit AB, und von F durch H die FI, welche parallel mit BD sein wird, so läfst sich der Beweis ähnlich wie bei **1** führen.

Zusätze. 1. Es ist $\frac{PR^2}{QS^2} = \frac{RW.RV.PW.PV}{QW.QV.SW.SV}$ nach Lehrsatz **1.** und **2.** (Product.)

2. Es ist $\frac{PQ^2}{RS^2} = \frac{PW.PV.QW.QV}{SW.SV.RW.RV}$ nach Lehrsatz 2. und 1. (Quotient.)

3. Fallen die Puncte W und V in v zusammen, und setzt man dann statt der grofsen Buchstaben S, R, Q, P die kleinen s, r, p, q, so ist

a) $\frac{rp.rs}{qp.qs} = \frac{rv^2}{qv^2}$ nach Lehrsatz 1. *b*) $\frac{pq.pr}{sq.sr} = \frac{pv^2}{sr^2}$ nach Lehrsatz 2.

c) $\frac{pr}{qs} = \frac{rv.pv}{qv.sv}$ nach Zusatz 1. *d*) $\frac{pq}{rs} = \frac{pv.qv}{sv.rv}$ nach Zusatz 2.

4. Fallen die Puncte R und Q zusammen in den Durchschnittspunct der Diagonalen und bezeichnet man diesen mit Q, so ist

$$\frac{PQ^2}{SQ^2} = \frac{PW.PV}{SW.SV} \text{ nach Lehrsatz 2.}$$

5. Fallen nun auch die Puncte W und V in den Durchschnittspunct der verlängerten Seiten DC und AE, und bezeichnet man denselben mit V, so ist $\frac{PQ^2}{SQ^2} = \frac{PV^2}{SV^2}$ oder $\frac{PQ}{SQ} = \frac{PV}{SV}$.

6. Zieht man (Fig. 9.) SV durch Q, EH mit AD, und IM mit BC parallel und verlängert die BD, bis sie HE trifft, so wie die AC und AB, bis sie IM schneiden, so ist 1) $EP = HP$; 2) $FP = GP$; 3) $IS = MS$; 4) $KS = LS$, folglich auch 5) $EF = GH$ und 6) $IK = ML$.

Über die Zerlegung gebrochener Functionen in Partial-Brüche.

Der zu zerlegende echte Bruch

$$\frac{P}{Q} = \frac{x^{n-1} + b\,x^{n-2} \ldots + m}{x^n + b_1 x^{n-1} \ldots + m_1}$$

sei auf die Form

$$\frac{P}{(x-\alpha)^r (x-\beta)^s \ldots (x-\mu)^u \ldots (x-w)^z}$$

gebracht, wo also

$$r + s \ldots + u \ldots + z = n.$$

Man setze

1. $$\frac{P}{Q} = \frac{A}{(x-\alpha)^r} + \frac{B}{(x-\beta)^s} \ldots + \frac{M}{(x-\mu)^u} \ldots + \frac{R}{(x-\nu)^z},$$

so werden die unbestimmten ganzen Functionen A, $B \ldots M \ldots R$ die Gröfse x resp. bis zur $r-1$ten, $s-1$ten, $\ldots u-1$ten, $\ldots z-1$ten Potenz enthalten. Um nun z. B. den Zähler M zu finden, verwandele man die Gleichung (1.) in folgende:

2. $$M = \frac{P(x-\mu)^u}{Q} - \frac{A(x-\mu)^u}{(x-\alpha)^r} - \frac{B(x-\mu)^u}{(x-\beta)^s} \ldots - \frac{R(x-\mu)^u}{(x-w)^z};$$

hierin setze man $x-\mu=y$ also $x=\mu+y$ und bezeichne durch P_1, Q_1, A_1, B_1, ... R_1 das, worin dadurch P, Q, A, B, ... R übergehen, so erhält man

$$3.\quad M=\frac{P_1 y^u}{Q_1}-\frac{A_1 y^u}{(\mu-\alpha+y)^r}-\frac{B_1 y^u}{(\mu-\beta+y)^s}\ldots.-\frac{R_1 y^u}{(\mu-w+y)^z}.$$

Entwickelt man nun die negativen Glieder durch die Division in Reihen nach Potenzen von y, so werden sie sämmtlich mit einem y^u enthaltenden Gliede anfangen, also sämmtlich von einer höhern Ordnung als M sein, welches x, und folglich auch y nur bis zur $u-1$ten Potenz enthält. Also kann M blofs in dem Gliede $\frac{P_1 y^u}{Q_1}$ enthalten, und mufs denjenigen Theilen desselben gleich sein, worin y bis zur $u-1$ten Potenz vorkommt. Nun ist $\frac{P_1 y^u}{Q_1}$ so viel als $\frac{P(x-\mu)^u}{Q}$, also so viel als $\frac{P}{Q}$, wenn man in Q den Factor $(x-\mu)^u$ wegläfst. Man darf daher, um den Zähler M des Partialbruchs $\frac{M}{(x-\mu)^u}$ zu finden, nur in dem Nenner des gegebenen Bruchs $\frac{P}{Q}$ den Factor $(x-\mu)^u$ weglassen, darauf in dem entstehenden Bruch $\frac{P}{Q(x-\mu)^u}$, $x-\mu=y$ setzen nnd hierauf diesen Bruch durch die Division in eine Reihe nach Potenzen von y auflösen. Diejenigen Theile dieser Reihe, welche niedrigern Potenzen von y als die $u$te enthalten, sind zusammengenommen M und man findet $\frac{M}{y^u}$ oder $\frac{M}{(x-\mu)^u}$ in x ausgedrückt, wenn man wieder $x-\mu$ statt y setzt.

Auf gleiche Weise findet man die übrigen Partialbrüche.

Beispiel. Es sei

$$\frac{4x+3}{(x+2)^3(x+1)}=\frac{A}{(x+2)^3}+\frac{B}{x+1},$$

so findet man $\frac{A}{(x+2)^3}$, wenn man in $\frac{4x+3}{x+1}$, $x+2=y$ also $x=y-2$ setzt und dividirt. Dieses giebt $\frac{4y-8+3}{y-2+1}=\frac{-5+4y}{-1+y}=5+y+y^2+y^3\ldots.$ also ist $A=5+y+y^2$ und $\frac{A}{y^3}=\frac{5}{y^3}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}$ oder

$$\frac{A}{(x+2)^3}=\frac{5}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}.$$

Setzt man ferner in $\frac{4x+3}{(x+2)^3}$, $x+1=y$ also $x=y-1$ und dividirt nach y, so findet man $\frac{4y-4+3}{(y-1+2)^3}=\frac{-1+4y}{1+3y+3y^2+y^3}=-1+7y-18y^2\ldots.$; also ist $B=-1$ und $\frac{B}{x+1}=-\frac{1}{x+1}$. Folglich ist zusammengenommen

$$\frac{4x+3}{(x+2)^3(x+1)}=\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}.$$

25.

Mémoire sur les fonctions discontinues.

(Par Mr. *G. Libri* de Florence.)

Introduction.

La question de la discontinuité des fonctions arbitraires, qui complètent les intégrales des équations aux différentielles partielles, agitée d'abord entre Daniel Bernoulli, Euler et d'Alembert, et discutée depuis par les plus grands géomètres, parait avoir été résolue par M. Fourier qui a montré le premier comment l'on pouvait déterminer, dans chaque cas particulier, les fonctions arbitraires de manière à satisfaire aux conditions initiales du problème, même lorsque celles-ci n'obéissent pas aux lois de continuité. Les formules que cet illustre géomètre a trouvées sont propres à exprimer une fonction discontinue quelconque, dont les diverses parties, comprises entre des limites données de la variable, suivent une marche dissemblable, et sont représentées par des expressions différentes. Dans ces formules, les valeurs que la fonction doit prendre dans chaque cas et les conditions de discontinuité, sont combinées implicitement: cependant il nous a paru, que l'on pouvait toujours concevoir une fonction discontinue, comme étant égale à la somme d'un nombre donné de fonctions, chacune desquelles a une valeur continue entre deux limites connues, et qui s'évanouit hors de ces limites: dès-lors tout se réduit à trouver une fonction, qui donne une valeur constante entre deux limites données de la variable, et qui se réduise à zéro pour toutes les autres valeurs de la même variable; car en multipliant cette fonction, qui exprime la condition de discontinuité, par la fonction connue qui donne les valeurs que la formule doit prendre entre deux limites assignées, on aura l'expression cherchée entre les mêmes limites, et on parviendra à représenter, par une somme d'expressions semblables, la valeur de la fonction discontinue pour des valeurs quelconques de la variable. Cependant on voit, que par cette méthode on obtiendrait pour les limites, des valeurs qui seraient égales à la somme de celles que l'on aurait, en considérant ces limites comme appartenant successivement à chacune des fonctions qui viennent y aboutir.

En discutant les diverses valeurs que prennent quelques intégrales définies lorsqu'on fait varier les constantes qu'elles renferment, nous sommes aisément parvenus à trouver des formules, qui ont une valeur constante entre deux limites données et qui hors de ces limites s'évanouissent toujours. Ces formules cependant ne donnent pour les limites, que la moitié de la valeur constante qu'elles ont entre ces mêmes limites; de manière que si la fonction discontinue qu'il s'agit de représenter est un polygone on obtiendra, pour l'ordonnée de chaque sommet, la demi-somme des ordonnées qu'auraient dans ce point les deux côtés qui viennent s'y couper, et on trouvera dans ce cas seulement une valeur exacte aux limites. Mais on peut obtenir d'autres expressions dont la valeur soit toujours exacte aux limites, ou qui même devienne égale à une quantité quelconque; et nous montrons comment on peut les trouver.

Il résulte de là, que selon que pour exprimer les conditions de discontinuité, on aura fait usage d'une formule qui est exacte aux limites, ou d'une qui ne l'est pas, on obtiendra, aprés avoir multiplié par la fonction qui doit donner les valeurs, une formule qui représentera exactement la valeur de la fonction discontinue même aux limites, dans le premier cas, et qui ne sera pas exacte dans le second. Cela nous a fait soupçonner que comme, dans les formules que l'on avait trouvées en traitant les différens cas de la discontinuité des fonctions, on avait toujours réuni implicitement la fonction qui donne la valeur en général, à celle qui exprime la condition de discontinuité, sans discuter la valeur de celle-ci aux limites, et sans séparer en facteurs ces deux fonctions, il avait pu arriver dans quelques cas que l'on eût fait usage d'une formule de discontinuité qui ne fût pas exacte aux limites. En effet en cherchant à vérifier notre supposition sur quelques exemples de fonctions discontinues, discutées par les géoèmtres qui se sont occupés de la théorie de la chaleur, nous avons trouvé, pour quelques-unes de ces formules, la moitié de la valeur qu'elles devaient avoir aux limites: d'autres expressions, qui représentaient deux portions de courbe qui se coupent aux limites, nous ont donné pour ces points des valeurs exactes, comme cela devait arriver d'après notre analyse. Nous avons appliqué les mêmes considérations à quelques séries que l'on savait représenter des fonctions discontinues, et dans quelques cas nous avons trouvé aux limites la moitié de la valeur cherchée; mais dans d'autres exemples, ayant rencontré des valeurs qui

n'étaient pas la demi-somme de celles qu'avait la fonction très-près des limites, nous avons reconnu par là, que sans avoir discuté dans chaque formule la marche de la fonction qui exprime la condition de discontinuité, il est impossible d'assigner *à priori* d'une manière générale les valeurs des limites, et qu'il faut toujours les vérifier *à posteriori*.

Tout ce que nous venons de dire sur les valeurs que les fonctions discontinues prennent aux limites, tient spécialement à l'analyse pure; ces considérations seraient utiles dans les applications, si l'on pouvait supposer que les lois physiques restent les mêmes aux limites, lorsque les fonctions qui expriment les conditions initiales du problème changent brusquement de nature; mais cette hypothèse est peu vraisemblable, et n'est pas confirmée par les observations.

Toutes les formules que l'on avait trouvées jusqu'à présent, pour exprimer les fonctions discontinues, contenaient des séries infinies ou des intégrales définies, et l'on supposait qu'elles formaient une classe particulière de transcendantes: cependant en considérant les diverses valeurs des formules qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, on peut parvenir à représenter les fonctions discontinues en général, par des expressions qui ne contiennent que des fonctions logarithmiques et circulaires. Nous donnons pour exemple une de ces formules, et en l'appliquant à quelques cas particuliers, nous en déduisons des conséquences assez singulières. Ces expressions peuvent servir dans la détermination des valeurs des intégrales définies, et sont d'un grand usage dans la théorie des fonctions entières, comme nous espérons le montrer dans la suite de ces mémoires.

Analyse.

On sait que l'intégrale définie $A = \int_0^\infty \frac{dq}{q} \sin qx$ a pour valeur $\frac{\pi}{2}$, tant que x demeure positif et plus grand que zéro; et c'est dans ce sens qu'il faut entendre l'expression des géomètres, que la valeur de cette intégrale est indépendante de x; car lorsque $x = 0$, on trouve $A = 0$; et en faisant x négatif on obtient $A = -\frac{\pi}{2}$. Il résulte de là que l'intégrale définie

$$B = \int_0^\infty \frac{dq}{q} \sin bq \cos qx = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dq}{q} \sin(b+x)q + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dq}{q} \sin(b-x)q,$$

a pour valeur $\frac{\pi}{2}$ lorsque x a une valeur quelconque comprise entre $x=-b$, et $x=+b$; que pour $x=\pm b$, on trouve $B=\frac{\pi}{4}$; et que depuis $x=b$, jusqu'à $x=\infty$, et depuis $x=-b$, jusqu'à $x=-\infty$, on obtient $B=0$. On voit par conséquent que la formule

$$C=\frac{\pi}{2}+\int_0^\infty \frac{dq}{2}\sin qx,$$

a pour valeur zéro, depuis $x=0$, jusqu'à $x=-\infty$; que pour $x=0$, elle donne $C=\frac{\pi}{2}$, et que pour toutes les valeurs positives de x, on a $C=\pi$. De même la formule

$$D=\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin bq\cos(x-a-b)q,$$

fournira $D=0$, depuis $x=a$, jusqu'à $x=-\infty$, et depuis $x=a+2b$, jusqu'à $x=\infty$; pour $x=a$, et pour $x=a+2b$, on obtiendra $D=\frac{\pi}{4}$; et $D=\frac{\pi}{2}$, depuis $x=a$, jusqu'à $x=a+2b$. Maintenant si l'on multiplie l'intégrale D, par la fonction $\frac{2}{\pi}\varphi(x)$, on aura l'expression

$$E=\frac{2}{\pi}\varphi(x)\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin\frac{bq}{2}\cos\left(x-a-\frac{b}{2}\right)q,$$

qui aura pour valeur zéro, depuis $x=a$, jusqu'à $x=-\infty$, et depuis $x=a+b$, jusqu'à $x=\infty$: et qui depuis $x=a$, jusqu'à $x=a+b$, exprimera exactement la fonction $\varphi(x)$, excepté pour les deux limites $x=a$, $x=a+b$, pour lesquelles on aura $E=\frac{\varphi(a)}{2}$, $E=\frac{\varphi(a+b)}{2}$. En faisant les mêmes considérations sur la formule

$$\frac{2}{\pi}\varphi_1(x)\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin\frac{cq}{2}\cos\left(x-a-b-\frac{c}{2}\right)q,$$

on trouvera des résultats semblables; et pourtant l'expression

$$F=\frac{2}{\pi}\varphi(x)\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin\frac{bq}{2}\left(x-a-\frac{b}{2}\right)q+\frac{2}{\pi}\varphi_1(x)\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin\frac{cq}{2}\cos\left(x-a-b-\frac{c}{2}\right)q$$

deviendra nulle depuis $x=a$, jusqu'à $x=-\infty$, et depuis $x=a+b+c$ jusqu'à $x=\infty$; et donnera $F=\frac{\varphi(a)}{2}$, pour $x=a$, et $F=\frac{\varphi_1(a+b+c)}{2}$ pour $x=a+b+c$; et $F=\frac{\varphi(a+b)\varphi_1(a+b)}{2}$, pour $x=a+b$; et coïncidera avec la fonction $\varphi(x)$ depuis $x=a$, jusqu'à $x=a+b$; et avec la fonction $\varphi_1(x)$, depuis $x=a+b$, jusqu'à $x=a+b+c$.

Si les deux fonctions $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, sont telles, qu'elles puissent représenter deux portions de deux courbes qui se coupent lorsque $x=a+b$, on aura pour le point d'intersection $\varphi(a+b)=\varphi_1(a+b)$; et pourtant la formule F sera exacte même pour la valeur $x=a+b$, puisque dans ce cas $F=\frac{\varphi(a+b)+\varphi_1(a+b)}{2}=\varphi(a+b)$. L'on voit par là que les formules précédentes peuvent servir à représenter le contour d'un polygone dont les côtés sont des courbes quelconques: ce qu'on ne saurait faire si nos expressions donnaient pour les limites une valeur quelconque autre que $\frac{\varphi(a+b)+\varphi_1(a+b)}{2}$, puisque dans les polygones la loi de continuité venant à se rompre à chaque sommet, les formules que nous avons trouvées donnent pour tous ces points la demi-somme des deux ordonnées que l'on obtient en les considérant comme appartenant tantôt à l'un, tantôt à l'autre des deux côtés qui viennent s'y couper.

Si l'on voulait exprimer une fonction discontinue de x, qui donnât l'unité pour toutes les valeurs de x comprises entre $x=a$, $x=a+b$, sans excepter ces limites, et qui fût constamment égale à zèro pour toutes les autres valeurs réelles de x, on trouverait aisément la formule

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin\frac{bq}{2}\cos\left(x-a-\frac{b}{2}\right)q \\ +\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin(x-a)q\right)\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin\frac{bq}{2}\cos\left(x-a-\frac{b}{2}\right)q \\ +\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin(x-a-b)q\right)\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin\frac{bq}{2}\cos\left(x-a-\frac{b}{2}\right)q \end{array}\right\}$$

$$=-2\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin\frac{bq}{q}\cos\left(x-a-\frac{b}{2}\right)q\right)^2+\frac{3.2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin\frac{bq}{2}\cos\left(x-a-\frac{b}{2}\right)q.$$

On peut parvenir directement au même résultat en observant que si l'on indique par y l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq}{q}\sin\frac{bq}{q}\cos\left(x-a-\frac{b}{2}\right)q,$$

le problème que nous venons de résoudre, se réduit à trouver une fonction de y telle que pour $y=1$, et pour $y=\frac{1}{2}$ elle donne $\varphi(y)=1$, et pour $y=0$ elle fournisse $\varphi(y)=0$; puisque 1, $\frac{1}{2}$ et 0, sont les trois valeurs de y; d'où l'on déduit

$$\varphi(y)=-2(y-1)(y-\tfrac{1}{2})+1=-2y^2+3y.$$

On peut trouver une infinité de formules propres à vérifier les conditions précédentes; mais on voit qu'elles conduiront toutes à des expressions du second degré, puisque il s'agit de trouver une équation qui ait deux racines. En général si l'on avait une fonction discontinue quelconque, qui eût seulement un nombre fini n de valeurs différentes dans une étendue finie ou infinie de la variable, il est clair que l'on pourrait, dans le même intervalle, la réduire à n'exprimer qu'une valeur constante donnée, à l'aide d'une équation du degré n qui aurait pour racines les diverses valeurs de la fonction connue. On pourrait même à l'aide de la théorie des équations, transformer une fonction discontinue, qui n'aurait qu'un nombre déterminé de valeurs, en une autre fonction discontinue de forme donnée quelconque; ce qui du reste ne saurait offrir aucune difficulté dans l'application.

Maintenant il résulte des considérations précédentes, que lorsque par les conditions d'un problème on sera conduit à une formule qui contiendra des fonctions discontinues, cette formule sera exacte aux limites, ou non, selon que l'on y sera parvenu à l'aide des expressions précédentes qui représentent exactement la fonction même aux limites, ou de celles qui ne donnent pour ces points, que la moitié des valeurs cherchées.

Pour appliquer ces réflexions à quelque cas particulier, nous considèrerons le mouvement linéaire de la chaleur dans une barre infinie de très-petite épaisseur, en supposant que les températures initiales des points de la barre situés entre $x=-1$, $x=+1$, aient pour valeur commune 1, et que tous les autres points depuis $x=-1$, jusqu'à $x=-\infty$, et depuis $x=1$, jusqu'à $x=\infty$, soient à la température zéro. Les géomètres qui ont traité cette question, ont trouvé qu'en indiquant par t le tems écoulé depuis le commencement de l'observation, par v la température du point que l'on considère, et par x sa distance à l'origine des coordonnées, on avait l'équation

$$v = \frac{2e^{-bt}}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq}{q} e^{-kq^2 t} \cos qx \sin q;$$

maintenant si l'on fait $t=0$, dans cette formule, on devrait retrouver les températures initiales; mais par la discussion que nous avons faite précédemment de l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq}{q} \sin q \cos qx,$$

on trouve qu'elle satisfait aux conditions initiales du problème pour toutes les valeurs de x, excepté pour $x = \pm 1$; car pour ces valeurs elle donne $v = \frac{1}{2}$. Ainsi l'équation précédente n'exprime pas les conditions initiales, telles que nous les avions demandées; et correspond à un état initial qui donnerait $v = 0$, depuis $x = -1$, jusqu'à $x = -\infty$, et depuis $x = 1$, jusqu'à $x = \infty$; fournirait $v = \frac{1}{2}$ pour $x = \pm 1$; et $v = 1$, depuis $x = -1$, jusqu'à $x = 1$.

Pour représenter l'état des températures permanentes dans une barre échauffée par un foyer dont la température est 1, on a la formule

$$v = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq \cos qx}{1+q^2},$$

qui exprime deux courbes logarithmiques se coupant lorsque $x = 0$, à une distance égale à l'unité au dessus de l'axe des abscisses: maintenant comme au point d'intersection on a $e^\circ = 1$, on sera dans le cas d'un polygone, et l'équation sera exacte même pour les limites de chaque fonction; ce qui peut se vérifier aisément, puisqu'en faisant $x = 0$, on a

$$v = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq}{1+q^2} = \frac{2.\pi}{\pi.2} = 1.$$

C'est peut-être par des considérations semblables, que l'on parviendrait à trouver *à priori* pourquoi la série

$$\left(\frac{1-\cos a}{1}\right)\sin x + \left(\frac{1-\cos 2a}{2}\right)\sin 2x + \left(\frac{1-\cos 3a}{3}\right)\sin 3x + \text{etc.}$$

(dont la somme est $\frac{\pi}{2}$ tant que l'on donne à x une valeur quelconque comprise entre 0 et a, et qui se réduit à zéro pour une valeur quelconque de x comprise entre a et π), a pour valeur $\frac{\pi}{4}$ lorsqu'on fait $x = a = \frac{\pi}{2}$; ce qui est aisé à vérifier, puisqu'elle se réduit alors à

$$\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{2}\right)\sin\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{3}\left(1-\cos\frac{3\pi}{2}\right)\sin\frac{3\pi}{2} \ldots + \text{etc.}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} \ldots \text{etc.} = \frac{\pi}{4}.$$

Tout ce que nous avons dit jusqu'ici nous parait démontrer la nécessité de discuter dans chaque cas particulier la valeur des limites dans les fonctions discontinues, à moins que l'on ne connaisse par avance la nature de la formule d'où l'on a déduit les expressions qu'il s'agit de vérifier: car une formule qui exprime une fonction discontinue quelconque est le produit de deux facteurs, dont l'un représente l'équation à laquelle cette formule doit satisfaire entre deux limites données, et l'autre exprime la con-

dition de la discontinuité: et on a vu que celle-ci peut être exacte ou non aux limites. Si ces deux facteurs étaient toujours en évidence, il serait aisé dans tous les cas de vérifier les valeurs des limites; mais dans les formules auxquelles on parvient en résolvant les problèmes qui comportent la discontinuité des fonctions, ces facteurs sont renfermés dans une expression commune, et on ne saurait les séparer. Par conséquent il faut dans chaque cas particulier discuter les valeurs des limites.

Les formules que nous avons trouvées précédemment, et qui mettent en évidence les facteurs dont nous venons de parler, sont utiles dans quelques cas pour faire connaître directement la marche de la fonction discontinue: on trouve par exemple

$$v = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dq\cos qx}{1+q^2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} + \left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{\pi}\right)\int_0^\infty \frac{dq\sin qx}{q};$$

et l'on voit que ces expressions serviraient de même a représenter l'état permanent d'une barre, dans laquelle il y aurait un nombre quelconque de foyers de température constante.

On pourrait aussi, par des formules semblables, exprimer des fonction discontinues à deux ou à un plus grand nombre de variables: pourvu que l'on modifiât convenablement les conditions des limites.

Qu'il nous soit permis de remarquer ici, que l'on fairait disparaître quelques-unes des difficultés qui se rencontrent dans l'emploi des formules de transformation, dont on se sert pour l'intégration des équations aux différentielles partielles, et dans l'étendue qu'il faut attribuer aux fonctions arbitraires discontinues, si l'on faisait usage de la formule

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left\{\frac{\varphi(x+e^{u\sqrt{(-1)}})}{1+(x-t)e^{-u\sqrt{(-1)}}} + \frac{\varphi(x+e^{-u\sqrt{(-1)}})}{1+(x-t)e^{u\sqrt{(-1)}}}\right\} du,$$

que nous avons donnée dans les Mémoires de l'Académie de Turin. Parceque la quantité x qui est indéterminée, et qui doit s'évanouir d'elle-même, sert à détruire les erreurs que l'on pourrait commettre en attribuant au développement de $\varphi(t)$ une forme qui ne lui conviendrait point. Du reste ces considérations, qui sont indispensables pour obtenir des résultats exacts, intéressent spécialement l'analyse des équations aux différentielles partielles qui expriment le mouvement de la chaleur, lorsqu'on suppose que les températures initiales ne sont pas assujetties aux lois de continuité: car en considérant la question sous le rapport physique, il parait peu probable qu'aux limites de ces fonctions discontinues, la communi-

cation de la chaleur de molécule à molécule se fasse d'après la différence des températures.

Jusqu'à présent on n'a représenté les fonctions discontinues réelles, que par des suites infinies ou par des intégrales définies; et l'on ne connait aucune expression finie qui ne renferme que des quantités algébriques et des fonctions exponentielles ou circulaires, mais qui puisse cependant représenter une fonction discontinue. Toutefois en observant qu'en général, lorsque une fonction cesse d'obéir à la loi de continuité, on peut toujours supposer qu'elle passe par $\frac{0}{0}$ au point où elle change brusquement de nature, on parvient à trouver des formules qui ne contiennent que les transcendantes de l'algèbre élémentaire, et qui peuvent exprimer une fonction discontinue quelconque. Sans exposer les recherches qui nous ont conduit à ce résultat, et qui exigeraient de trop longs développemens, nous nous bornerons à vérifier *à posteriori* une de ces expressions, d'où l'on en pourra déduire une infinité d'autres.

Les géomètres qui se sont occupés de la détermination des valeurs particulières des coëfficiens différentiels, ont reconnu depuis long-tems que la fonction $x^n \log x$, qui lorsque $x = 0$ prend la forme $\frac{0}{0}$, se réduit à zéro pour cette valeur de x lorsque n est une quantité positive, et qu'elle devient infinie lorsque n est négative: maintenant si l'on discute les diverses valeurs de l'expression

$$e^{(\log y)\, e^{(\log y)(x-n)}}$$

lorsque $y = 0$, ou ce qui revient au même de l'expression

$$z = e^{(\log 0)\, e^{(\log 0)(x-n)}},$$

on verra que lorsque x est une quantité positive quelconque plus grande que n, on aura $(x-n)\log 0 = -\infty$, et par conséquent

$$x = e^{(\log 0)\, e^{-\infty}} = e^{-\infty\, e^{-\infty}} = e^0 = 1:$$

mais comme on a, lorsque $x = n$,

$$0.\log 0 = 0,$$

on trouvera

$$e^{(\log 0)\, e^{0\,.\,\log 0}} = e^{(\log 0)\, e^0} = e^{-\infty} = 0;$$

et enfin lorsque x est une quantité quelconque comprise entre n et l'infini négatif on aura $x - n = -p$, et par conséquent

$$(x-n)\log 0 = -p(-\infty) = \infty;$$

et partant

$$e^{(\log 0)\,e^{(\log 0)\,(x-n)}} = e^{-\infty e^{\infty}} = e_1^{-\infty} = 0.$$

D'où il résulte que la fonction

$$e^{(\log 0)\,e^{(\log 0)\,(x-n)}}$$

est égale à zéro depuis $x = -\infty$, jusques et inclusivement à $x = n$, et que depuis $x = n$, jusqu'à $x = \infty$, cette fonction a pour valeur l'unité. Ainsi le produit

$$e^{(\log 0)\,e^{(\log 0)\,(x-a)}} \cdot e^{(\log 0)\,e^{(\log 0)\,(a+b-x)}},$$

est nul pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = a$ et $x = -\infty$; et entre $x = a + b$ et $x = \infty$; et est égal à l'unité pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = a$ et $x = a + b$; excepté ces dernières limites pour lesquelles il se réduit à zéro. On peut observer que l'on a

$$e^{(\log 0)\,e^{(\log 0)\,(x-a)}} = 0^{0^{(x-a)}}.$$

Maintenant pour appliquer ces formules à un exemple nous chercherons, comme nous l'avons déjà fait, la formule qui exprime l'état permanent des températures dans une barre très-mince de longueur indéfinie, qui a un foyer de chaleur placé à l'origine des coordonnées et dont la température constante est égale à l'unité; et nous aurons

$$v = e^{x} \cdot 0^{0^{-x}} + e^{-x} \cdot \cos\frac{\pi}{2} 0^{0^{-x}}$$

d'où l'on déduit l'équation

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dq \cos qx}{1+q^2} e^{x} \cdot 0^{0^{-x}} + e^{-x} \cdot \cos\frac{\pi}{2} 0^{0^{-x}}$$

qui donne la relation

$$\left\{e^{x} \cdot 0^{0^{-x}} + e^{-x} \cdot \cos\frac{\pi}{2} 0^{0^{-x}}\right\}^{n} = e^{nx} \cdot 0^{0^{-x}} + e^{-nx} \cdot \cos\frac{\pi}{2} 0^{0^{-x}}.$$

On trouverait de la même manière l'expression d'un grand nombre d'intégrales définies dont on a cru jusqu'ici devoir former des classes distinctes de transcendantes, et qui ne sont que des formules contenant des fonctions logarithmiques et circulaires, dans lesquelles on a donné des valeurs particulières aux constantes qu'elles renferment. Nous montrerons dans la suite de ces recherches l'utilité de ces formules, dans la détermination des valeurs des intégrales définies, et les applications nombreuses qu'on en peut faire à la théorie des nombres, et en général à l'analyse des fonctions entières.

26.

Beweise der ersten Sätze der Theorie der numerischen Facultäten.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

---

1. Bezeichnet man das Product $z.z-1.z-2\ldots.$, wenn es aus n Factoren besteht, durch $\overline{z}^{,n}$, so kann man jede ganze positive Potestät von z in eine Reihe von der Form:

$$1. \quad z^n = A_0^{(n)} + A_1^{(n)}\overline{z-1}^{,1} + A_2^{(n)}\overline{z-1}^{,2} + A_3^{(n)}\overline{z-1}^{,3} + \ldots. + A_n^{(n)}\overline{z-1}^{,n}$$

verwandeln. Setzt man successive $z = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$ so erhält man zur Bestimmung von $A_0^{(n)}$, $A_1^{(n)}$, etc. folgende Gleichungen:

$$1^n = A_0^{(n)},$$
$$2^n = A_0^{(n)} + 1.A_1^{(n)},$$
$$3^n = A_0^{(n)} + 3.A_1^{(n)} + 2.1A_2^{(n)},$$
$$4^n = A_0^{(n)} + 3.A_1^{(n)} + 3.2A_2^{(n)} + 3.2.1A_3^{(n)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(m\text{-}1)^n = A_0^{(n)} + (m\text{-}2)A_1^{(n)} + m\text{-}2.m\text{-}3A_2^{(n)} + m\text{-}2.m\text{-}3.m\text{-}4A_3^{(n)} + \ldots. + \overline{m\text{-}2}^{,m-2}A_{m-2}^{(n)},$$
$$m^n = A_0^{(n)} + (m\text{-}1)A_1^{(n)} + m\text{-}1.m\text{-}2A_2^{(n)} + m\text{-}1.m\text{-}2.m\text{-}3A_3^{(n)} + \ldots. + \overline{m\text{-}2}^{,m-2}A_{m-2}^{(n)} + \overline{m\text{-}1}^{,m-1}A_{m-1}^{(n)}.$$

Multiplicirt man die letzte, die vorletzte u. s. w. dieser Gleichungen mit 1, $-(m-1)$, $\frac{m-1.m-2}{1.2}$, $-\frac{m-1.m-2.m-3}{1.2.3}$ u. s. w., und addirt die Producte, so verschwinden in der Summe die Coëfficienten von $A_0^{(n)}$, $A_1^{(n)}$, $\ldots.$ bis $A_{m-2}^{(n)}$, da sie

$$(1-1)^{m-1};\quad m-1(1-1)^{m-2};\quad m-1.m-2(1-1)^{m-3};\quad \text{etc.}$$

sind, und man erhält:

$$2. \quad \overline{m\text{-}1}^{,m-1}A_{m-1}^{(n)} = m^n - \frac{m\text{-}1}{1}(m\text{-}1)^n + \frac{m\text{-}1.m\text{-}2}{1.2}(m\text{-}2)^n - \frac{m\text{-}1.m\text{-}2.m\text{-}3}{1.2.3}(m\text{-}3)^n \ldots.$$
$$\ldots. \pm \frac{m-1}{1}.2^n \pm 1^n.$$

Dividirt man die Formel (1.) mit z^n und setzt nach der Division $z = \infty$, so erhält man:

$$1 = A_n^{(n)},$$

folglich

3. $$\overline{n}^{,n} = (n+1)^n - \frac{n}{1}.n^n + \frac{n.n-1}{1.2}(n-1)^n - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(n-2)^n + \ldots. \pm \frac{n}{1} 2^n \mp 1^n.$$

2. Eben so erhält man die Coëfficienten der Entwickelung

4. $$(z+\alpha)^n = B_0^{(n)} + B_1^{(n)}\overline{z-1}^{,1} + B^{(n)}\overline{z-1}^{,2} + B_2^{(n)}\overline{z-1}^{,3} + \ldots. + B_n^{(n)}\overline{z-1}^{,n}.$$

indem man successive $z = 1, 2, 3, 4, \ldots.$ setzt, wodurch sich die Gleichungen:

$$(1+\alpha)^n = B_0^{(n)},$$
$$(2+\alpha)^n = B_0^{(n)} + 1.B_1^{(n)},$$
$$(3+\alpha)^n = B_0^{(n)} + 2.B_1^{(n)} + 2.1B_2^{(n)},$$
$$(4+\alpha)^n = B_0^{(n)} + 3.B_1^{(n)} + 3.2B_2^{(n)} + 3.2.1B_3^{(n)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(m-1+\alpha)^n = B_0^{(n)} + m\text{-}2.B_1^{(n)} + m\text{-}2.m\text{-}3B_2^{(n)} + \ldots. + \overline{m-2}^{,m-2}B_{m-2}^{(n)},$$
$$(m+\alpha)^n = B_0^{(n)} + m\text{-}1.B_1^{(n)} + m\text{-}1.m\text{-}2B_2^{(n)} + \ldots. + \overline{m-1}^{,m-2}B_{m-2}^{(n)} + \overline{m-1}^{,m-1}B_{m-1}^{(n)},$$

und woraus sich auf dieselbe Weise wie oben ergiebt

5. $$B_{m-1}^{(n)}\overline{m-1}^{,m-1} = (\alpha+m)^n - \frac{m-1}{1}(\alpha+m-1)^n + \frac{m-1.m-2}{1.2}(\alpha+m-2)^n - \frac{m-1.m-2.m-3}{1.2.3}(\alpha+m-3)^n \ldots. \pm (\alpha+1)^n.$$

6. $$\overline{n}^{,n} = (\alpha+n+1)^n - \frac{n}{1}(\alpha+1)^n + \frac{n.n-1}{1.2}(\alpha+n-1)^n \ldots. \pm (\alpha+1)^n.$$

3. Wenn n eiue ganze positive Zahl ist, so hat man, wie leicht zu zeigen ist:

7. $$\overline{z+1}^{,n} - \overline{z}^{,n} = n\,\overline{z}^{,n-1},$$

also auch

$$\overline{z+2}^{,n} - \overline{z+1}^{,n} = n\,\overline{z+1}^{,n-1};$$

subtrahirt man von dieser die Gleichung (7.) und berücksichtigt sie im zweiten Gliede, so findet man:

8. $$\overline{z+2}^{,n} - 2\,\overline{z+1}^{,n} + \overline{z}^{,n} = n.n-1\,\overline{z}^{,n-2},$$

also auch

$$\overline{z+3}^{,n} - 2\,\overline{z+2}^{,n} + \overline{z+1}^{,n} = n.n-1\,\overline{z+1}^{,n-2},$$

und wenn man wieder von dieser die Gleichung (8.) subtrahirt und die Gleichung (7.) berücksichtigt:

9. $$\overline{z+3}^{,n} - 3\,\overline{z+2}^{,n} + 3\,\overline{z+1}^{,n} - \overline{z}^{,n} = \overline{n}^{,3}\,\overline{z}^{,n-3}.$$

Hieraus läfst sich vermuthen, dafs allgemein sei:

10. $$\overline{z+m}^{,n} - \frac{m}{1}\overline{z+m-1}^{,n} + \frac{m\,m-1}{1.2}\overline{z+m-2}^{,n} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\overline{z+m-3}^{,n} \ldots. = \overline{n}^{,m}\,\overline{z}^{,n-m};$$

wenn diese Gleichnng Statt findet, so ist auch:

$$\overline{z+m+1}^{,n} - \frac{m}{1}\overline{z+m}^{,n} + \frac{m.m-1}{1.2}\overline{z+m-1}^{,n} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\overline{z+m-2}^{,n} \ldots = \overline{n}^{,m}\,\overline{z+1}^{,n-m},$$

und wenn man die Gleichung (10.) davon subtrahirt, und (7.) berücksichtigt, so ergiebt sich:

$$\overline{z+m+1}^{,n} - \frac{m+1}{1}\overline{z+m}^{,n} + \frac{m+1.m}{1.2}\overline{z+m-1}^{,n} - \ldots = \overline{n}^{,m+1}\,\overline{z}^{,n-m-1}.$$

Die Gleichung (10.) gilt also auch für $m+1$, wenn sie für m gilt, folglich ganz allgemein, da sie für $m=2$, 3 richtig ist.

Setzt man $m=n$, so folgt:

11. $$\overline{z+n}^{,n} - \frac{n}{1}\overline{z+n-1}^{,n} + \frac{\overline{n}^{,2}}{\overline{2}^{,2}}\overline{z+n-2}^{,n} - \frac{\overline{n}^{,3}}{\overline{3}^{,3}}\overline{z+n-3}^{,n} + \ldots = \overline{n}^{,n}.$$

4. Die Coëfficienten des Binomiums

12. $$\overline{y+z}^{,n} = \overline{y}^{,n} + A_1^{(n)}\overline{z}^{,1}\overline{y}^{,n-1} + A_2^{(n)}\overline{z}^{,2}\overline{y}^{,n-2} + A_3^{(n)}\overline{z}^{,3}\overline{y}^{,n-3} \ldots$$

findet man auf dieselbe Art; setzt man nemlich $z=0, 1, 2, 3, 4$ etc., so wird

$$\overline{y}^{,n} = \overline{y}^{,n},$$
$$\overline{y+1}^{,n} = \overline{y}^{,n} + 1.A_1^{(n)}\overline{y}^{,n-1},$$
$$\overline{y+2}^{,n} = \overline{y}^{,n} + 2.A_1^{(n)}\overline{y}^{,n-1} + 2.1A_2^{(n)}\overline{y}^{,n-2},$$
$$\overline{y+3}^{,n} = \overline{y}^{,n} + 3.A_1^{(n)}\overline{y}^{,n-1} + 3.2A_2^{(n)}\overline{y}^{,n-2} + 3.2.1A_3^{(n)}\overline{y}^{,n-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\overline{y+m}^{,n} = \overline{y}^{,n} + mA_1^{(n)}\overline{y}^{,n-1} + \overline{m}^{,2}A_2^{(n)}\overline{y}^{,n-2} + \overline{m}^{,3}A_3^{(n)}\overline{y}^{,n-3} + \ldots + \overline{m}^{,m}A_m^{(n)}\overline{y}^{,n-m}.$$

Multiplicirt man nun die letzte, die vorletzte u. s. w. dieser Gleichungen mit $1, -m, \frac{m.m-1}{1.2}, -\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$ u. s. w., so ergiebt sich:

$$\overline{m}^{,m}A_m^{(n)}\overline{y}^{,n-m} = \overline{y+m}^{,n} - \frac{m}{1}\overline{y+m-1}^{,n} + \frac{m.m-1}{1.2}\overline{y+m-2}^{,n} - \ldots$$

und wenn man für das zweite Glied den Werth aus (10.) substituirt

12. $$\overline{m}^{,m}A_m^{(n)} = \overline{n}^{,m},$$

welches die Gleichung für die Binomial-Coëfficienten ist *).

München, den 20. Februar 1831.

---

*) Herr Th. Clausen bemerkt in einem Briefe an den Herausgeber dieses Journals, dafs, wie er zufällig erst nach Absendung des Aufsatzes No. 14. im vorigen Heft, in den Zusätzen zu Lacroix Differential- und Integral-Rechnung gesehen, der im vorigen Heft S. 114. mitgetheilte Beweis des Wilsonschen Theorems schon von Laplace gegeben worden ist. Anm. d. Herausg.

27.

Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes.

(Par MM. *Lamé* et *Clapeyron*, Colonels du Génie au service de Russie.)

(Suite du mémoire No. 19. du cahier précédent.)

26.

Désignons par x_1, y_1, z_1 les projections de la pression P_1^I sur les trois axes des x, y, z, les équations du paragraphe 24. donneront:

$$9.\quad x_1 = m_1 N_1 + m_2 T_3 + m_3 T_2, \quad y_1 = m_1 T_3 + m_2 N_2 + m_3 T_1,$$
$$z_1 = m_1 T_2 + m_2 T_1 + m_3 N_3,$$

et par suite:

$$10.\quad \begin{cases} m_1 = \dfrac{x_I (N_2 N_3 - T_1^2) + y_I (T_1 T_2 - N_3 T_3) + z_I (T_1 T_3 - N_2 T_2)}{N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2}, \\ m_2 = \dfrac{x_I (T_1 T_2 - N_3 T_3) + y_I (N_1 N_3 - T_2^2) + z_I (N_2 T_3 - N_1 T_1)}{N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2}, \\ m_3 = \dfrac{x_I (T_1 T_3 - N_2 T_2) + y_I (T_2 T_3 - N_1 T_1) + z_I (N_1 N_2 - T_3^2)}{N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2}. \end{cases}$$

Si l'on met pour simplifier ces dernières équations sous la forme:

$$11.\quad m_1 = \nu_1 x_1 + \tau_3 y_1 + \tau_2 z_1, \quad m_2 = \tau_3 x_1 + \nu_2 y_1 + \tau_1 z_1,$$
$$m_3 = \tau_2 x_1 + \tau_1 y_1 + \nu_3 z_1,$$

l'équation $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$ exigera que l'on ait:

$$12.\quad (\nu_1 x_1 + \tau_3 y_1 + \tau_2 z_1)^2 + (\tau_3 x_1 + \nu_2 y_1 + \tau_1 z_1)^2 + (\tau_2 x_1 + \tau_1 y_1 + \nu_3 z_1)^2 = 1,$$

ou en développant:

$$(\nu_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) x_1 + (\tau_3^2 + \nu_2^2 + \tau_1^2) y_1 + (\tau_2^2 + \tau_1^2 + \nu_3^2) z_1 +$$
$$2(\nu_1 \tau_3 + \nu_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_2) x_1 y_1 + 2(\tau_2 \tau_3 + \nu_2 \tau_1 + \nu_3 \tau_1) y_1 z_1 + 2(\nu_1 \tau_2 + \tau_3 \tau_1 + \nu_3 \tau_2) z_1 x_1 = 1.$$

Supposons trois axes, menés par le point M que l'on considère, parallèlement aux axes coordonneés des x, y, z, et soit prise snr P_1^I une ligne qui la représente; x_1, y_1, z_1 seront les coordonnées de l'extrémité de cette ligne, relativement à l'origine M, et l'équation (12.) indiquera que cette extrémité est située sur un ellipsoïde ayant son centre en M, dont la ligne P_1^I sera conséquemment un demi-diamètre.

Donc: **Si sur les directions des pressions ou tractions exercées sur tous les élémens plans, passant par le point M,**

on imagine des lignes prises à partir de ce point et respectivement proportionnelles à ces pressions, leurs secondes extrémités seront situées sur un ellipsoïde ayant M pour centre.

27.

Il suit de cette interprétation géométrique que les demi-axes de l'ellipsoïde (12.) donneront, en grandeur et en direction, les pressions ou tractions maxima et minima exercées autour du point M; donc si les axes des x, y, z étaient précisément parallèles à ces axes principaux, les termes en x_1y_1, y_1z_1, z_1x_1 devraient disparaître dans l'équation (12.), ce qui exigeroit que l'on eut entre N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 les trois relations:

13. $\nu_1\tau_3+\nu_2\tau_3+\tau_1\tau_2=0$, $\tau_3\tau_2+\nu_2\tau_1+\nu_3\tau_1=0$, $\nu_1\tau_2+\tau_3\tau_1+\nu_3\tau_2=0$.

Dans ce cas l'équation (12.) seroit de la forme:

$$14.\quad \left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{y}{B}\right)^2+\left(\frac{z}{C}\right)^2=1,$$

et l'on auroit:

$$15.\quad (A\nu_1)^2+(A\tau_3)^2+(A\tau_2)^2=1,\quad (B\tau_3)^2+(B\nu_2)^2+(B\tau_1)^2=1,$$
$$(C\tau_2)^2+(C\tau_1)^2+(C\nu_3)^2=1.$$

Soient h_1, k_1, l_1; h_2, k_2, l_2; h_3, k_3, l_3 les cosinus des angles, que les normales aux élémens plans, sur lesquels les pressions A, B, C sont exercées, font avec les directions de ces pressions, les équations (10.) donneront:

$$16.\quad h_1=A\nu_1,\ k_1=A\tau_3,\ l_1=A\tau_2,\ h_2=B\tau_3,\ k_2=B\nu_2,\ l_2=B\tau_1,$$
$$h_3=C\tau_2,\ k_3=C\tau_1,\ l_3=C\nu_3.$$

Ces expressions transforment ainsi les équations (13):

17. $h_1k_1+h_2k_2+h_3k_3=0$, $k_1l_1+k_2l_2+k_3l_3=0$, $l_1h_1+l_2h_2+l_3h_3=0$.

On conclût de là que les élémens plans sur lesquels s'exercent les pressions A, B, C, sont perpendiculaires entr'eux.

Si donc ces trois élémens étoient parallèles aux plans primitifs des zy, xz, yx, les angles $[A, B]$, $[A, C]$, $[B, C]$ étant droits, les composantes N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, d'après les équations (6.) devraient satisfaire aux relations:

$$\left(\frac{N_1}{A}\right)^2+\left(\frac{T_3}{A}\right)^2+\left(\frac{T_2}{A}\right)^2=1,\quad \left(\frac{T_3}{B}\right)^2+\left(\frac{N_2}{B}\right)^2+\left(\frac{T_1}{B}\right)^2=1,$$
$$\left(\frac{T_2}{C}\right)^2+\left(\frac{T_1}{C}\right)^2+\left(\frac{N_3}{C}\right)^2=1.$$

18. $$\frac{N_1}{A}\frac{T_3}{B}+\frac{T_3}{A}\frac{N_2}{B}+\frac{T_1}{A}\frac{T_2}{B}=0,\quad \frac{N_1}{A}\frac{T_2}{C}+\frac{T_3}{A}\frac{T_2}{C}+\frac{T_2}{A}\frac{N_3}{C}=0.$$
$$\frac{T_3}{B}\frac{T_2}{C}+\frac{N_2}{B}\frac{T_1}{C}+\frac{T_1}{B}\frac{N_3}{C}=0;$$

or on sait que ces équations conduisent par des transformations convenables aux équations:

19. $$\left(\frac{N_1}{A}\right)^2+\left(\frac{T_3}{B}\right)^2+\left(\frac{T_2}{C}\right)^2=1,\quad \left(\frac{T_3}{A}\right)^2+\left(\frac{N_2}{B}\right)^2+\left(\frac{T_1}{C}\right)^2=1,$$
$$\left(\frac{T_2}{A}\right)^2+\left(\frac{T_1}{B}\right)^2+\left(\frac{N_3}{C}\right)^2=1,$$

et il est aisé de voir que les relations (18.) et (19.) ne peuvent être satisfaites en même tems, à moins que T_1, T_2, T_3, ne soient nuls; d'où il suit que les pressions ou tractions principales sont perpendiculaires aux élémens plans, sur lesquels elles exercent leur action.

28.

Ainsi: Un corps solide primitivement homogène, quelles que soient d'ailleurs les forces étrangères qui lui sont appliquées, jouit de cette propriété, que, pour chacun de ses points, il existe trois élémens plans principaux, passant par ce point et respectivement perpendiculaires entr'eux, qui éprouvent de la part des molécules voisines des tractions ou pressions normales. De plus si on imagine un ellipsoïde ayant pour demi-axes les trois pressions normales principales, un quelconque de ses demi-diamètres est la pression oblique exercée sur un élément plan passant par le point M, et tellement placé, que sa normale fait avec les axes de l'ellipsoïde, des angles dont les cosinus sont égaux aux projections du demi-diamètre sur les mêmes axes, respectivement divisées par ces axes eux-mêmes.

29.

Examinons encore le cas, où les pressions principales A, B, C au point M, sont parallèles aux axes des x, y, z; alors les équations (6.) donnent $A=\pm N_1$, $B=\pm N_2$, $C=\pm N_3$, $T_1=0$, $T_2=0$, $T_3=0$. Les forces N_1, N_2, N_3 étant positives lorsque les demi-axes A, B, C correspondront à des tractions, négatives lorsque ces demi-axes représenteront des pressions; pour simplifier, nous représenterons les forcés N_1, N_2, N_3 par les axes A, B, C eux-mêmes, auxquels elles sont égales en valeur

absolue, c'est à-dire que nous supposerons que les quantités A, B, C ont elles mêmes des signes, et sont positives ou négatives suivant qu'elles représentent des tractions ou des pressions.

D'après ces conventions, dans l'ellipsoïde (14.), un demi-diamètre quelconque D_1, dont l'extrémité a pour coordonnées x_1, y_1, z_1, représente la pression oblique exercée sur un plan, dont la normale fait avec les axes des angles ayant pour cosinus:

$$20. \quad m_1 = \frac{x_1}{A}, \quad n_1 = \frac{y_1}{B}, \quad p_1 = \frac{z_1}{C};$$

c'est ce qui résulte du théorème démontré par les équations (7.), ou immédiatement des équations (10.).

Généralement dans les équations (20.) A, B, C, x_1, y_1, z_1, pouvant être positifs ou négatifs, les cosinus m_1, n_1, p_1 seront positifs ou négatifs, et indiqueront dans tous les cas la direction de la normale au plan sur lequel s'exerce la force D_1; si cette direction fait avec le demi-diamètre un angle plus grand qu'un droit, égal à un droit, ou plus petit qu'un droit, D_1 représentera une pression, une force tangentielle ou une traction.

30.

Soient D_1, D_2, D_3 trois pressions obliques exercées au point M, sur trois élémens plans quelconques, perpendiculaires entr'eux, et x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 les projections de ces pressions sur les trois axes principaux, on aura les six équations:

$$21. \quad \begin{cases} \left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{B}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{C}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{x_2}{A}\right)^2 + \left(\frac{y^2}{B}\right)^2 + \left(\frac{z^2}{C}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{x_3}{A}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{B}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{C}\right)^2 = 1; \\ \frac{x_1 x_2}{A^2} + \frac{y_1 y_2}{B^2} + \frac{z_1 z_2}{C^2} = 0, \quad \frac{x_3 x_1}{A^2} + \frac{y_3 y_1}{B^2} + \frac{z_3 z_1}{C^2} = 1, \\ \frac{x_2 x_3}{A^2} + \frac{y_2 y_3}{B^2} + \frac{z_2 z_3}{C^2} = 0. \end{cases}$$

Ces six équations donnent les relations suffisantes et nécessaires, qui doivent exister entre les coordonnées de trois points de l'ellipsoïde (14.) pour que les demi-diamètres qui aboutissent à ces points, représentent les pressions exercées sur trois plans perpendiculaires entr'eux.

D'un autre coté proposons nous de rapporter l'ellipsoïde (14.) à des diamètres conjugués; soient m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2; m_3, n_3, p_3 les cosinus des angles de direction de ces nouveaux axes, on devra se servir

des formules de transformation suivantes:

$x = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z'$, $y = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'$, $z = p_1 x' + p_2 y' + p_3 z'$,

substituer ces valeurs dans l'équation (14.) et égaler à zéro les termes contenant les rectangles $x'y'$, $y'z'$, $z'x'$; ce qui conduira aux équations de condition:

$$22. \quad \frac{m_1 m_2}{A^2} + \frac{n_1 n_2}{B^2} + \frac{p_1 p_2}{C^2} = 0, \quad \frac{m_3 m_1}{A^2} + \frac{n_3 n_1}{B^2} + \frac{p_3 p_1}{C^2} = 0,$$

$$\frac{m_2 m_3}{A^2} + \frac{n_2 n_3}{B^2} + \frac{p_2 p_3}{C^2} = 0;$$

or soient A', B', C' les demi-diamètres conjugués; X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3 leurs projections sur les axes de l'ellipsoïde, on aura évidemment:

$X_1 = A' m_1$, $Y_1 = A' n_1$, $Z_1 = A' p_1$; $X_2 = B' m_1$, $Y_2 = B' n_1$, $Z_2 = B' p_1$;

$$X_3 = C' m_1, \quad Y_3 = C' n_1, \quad Z_3 = C' p_1.$$

Ces relations, l'équation (14.) et les équations (22.) donneront enfin:

$$23. \quad \begin{cases} \left(\frac{X_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{Y_1}{B}\right)^2 + \left(\frac{Z_1}{C}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{X_2}{A}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{B}\right)^2 + \left(\frac{Z_2}{C}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{X_3}{A}\right)^2 + \left(\frac{Y_3}{B}\right)^2 + \left(\frac{Z_3}{C}\right)^2 = 1; \\ \frac{X_1 X_2}{A^2} + \frac{Y_1 Y_2}{B^2} + \frac{Z_1 Z_2}{C^2} = 0, \quad \frac{X_3 X_1}{A^2} + \frac{Y_3 Y_1}{B^2} + \frac{Z_3 Z_1}{C^2} = 0, \\ \frac{X_2 X_3}{A^2} + \frac{Y_2 Y_3}{B^2} + \frac{Z_2 Z_3}{C^2} = 0. \end{cases}$$

Ces six équations donnent les relations suffisantes et nécessaires, qui doivent exister entre les coordonnées de trois points de l'ellipsoïde (14.) pour que les trois demi-diamètres qui y aboutissent, soient conjugués entr'eux.

L'identité des équations (21.) et (23.) démontre que les pressions obliques exercées au point M sur trois élémens plans quelconques perpendiculaires entr'eux, représentent en grandeur et en direction, trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde, ayant pour demi-diamètres toutes les pressions exercées autour du point M.

31.

Les équations (20.) donnent évidemment:

$$24. \quad \frac{x_1 x}{A} + \frac{y_1 y}{B} + \frac{z_1 z}{C} = 0,$$

pour l'équation du plan sur lequel s'exerce une pression oblique D_1, représentée en grandeur et en direction, par le demi-diamètre de l'ellipsoïde (14.) dont l'extrémité a pour coordonnées x_1, y_1, z_1.

Or imaginons une surface du second degré qui auroit pour équation:

$$25. \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \pm R,$$

le plan (24.) sera évidemment parallèle au plan tangent à cette surface, au point d'intersection de cette surface avec le diamètre D_1, prolongé s'il est nécessaire.

Si les pressions principales A, B, C sont toutes les trois positives, ou toutes les trois négatives, c'est-à-dire, si elles correspondent toutes les trois à des tractions, ou toutes les trois à des pressions exercées au point M sur les trois faces principales, l'équation (25.) representera un second ellipsoïde concentrique au premier (14.), ayant ses axes situés sur les mêmes droites et proportionnels en grandeur aux racines quarrés des axes correspondans du premier ellipsoïde.

Si les pressions principales n'ont pas toutes le même signe, l'équation (25.) représentera deux hyperboloïdes, l'un à une nappe, et le second à deux nappes, qui auront le même cône assymptotique, et les mêmes axes. Dans ce cas le cône assymptotique de ces deux hyperboloïdes conjugués, qui a pour équation:

$$26. \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0,$$

viendra rencontrer l'ellipsoïde (14.) suivant une courbe à double courbure; les demi-diamètres de cet ellipsoïde aboutissant aux différens points de cette courbe et considérés comme des pressions seront dans les plans mêmes, sur lesquels elles exercent leur action, lesquels seront tangens au cône assymptotique; ainsi pour chacun de ces plans, les actions des molécules voisines de M, et situées d'un même coté de ce plan, auront une résultante tangentielle au plan, et qui ne tendront qu'à faire glisser sur lui les molécules de sa surface. Tous les demi-diamètres de l'ellipsoïde (14.), intérieurs au cône (26.) représentant des tractions ou des pressions, ceux extérieurs à ce cône représenteront au contraire des pressions ou des tractions; le passage de l'un à l'autre de ces états se faisant au moyen des demi-diamètres situés sur la surface du cône qui représentent des forces tangentielles.

32.

On voit par ce qui précède que les propriétés dont jouissent les pressions exercées autour d'un même point d'un corps solide, dépendent

et se déduisent très simplement des directions et des intensités des pressions principales exercées au même point. D'après cela il est nécessaire de déterminer ces pressions principales, lorsqu'on connait les pressions obliques qui s'exercent sur trois élémens plans quelconques perpendiculaires entr'eux.

Soient toujours comme précédemment N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 les forces normales et tangentielles connues, relativement à trois élémens plans, parallèles aux plans coordonnés auxquels le corps solide est rapporté; soient toujours A, B, C les pressions principales, les équations (3.) donnent:

$$27.\quad \begin{cases} N_1 = m_1^2 A + m_2^2 B + m_3^2 C, \quad N_2 = n_1^2 A + n_2^2 B + n_3^2 C, \quad N_3 = p_1^2 A + p_2^2 B + p_3^2 C; \\ T_1 = p_1 n_1 A + p_2 n_2 B + p_3 n_3 C, \quad T_2 = m_1 p_1 A + m_2 p_2 B + m_3 p_3 C, \\ T_3 = n_1 m_1 A + n_2 m_2 B + n_3 m_3 C; \end{cases}$$

et l'on aura en outre:

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1,$$
$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0, \quad m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 = 0, \quad m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 = 0.$$

Toutes ces équations détermineront les valeurs des pressions principales A, B, C, et les cosinus de leurs angles de direction

$$m_1,\ n_1,\ p_1;\quad m_2,\ n_2,\ p_2;\quad m_3,\ n_3,\ p_3.$$

L'élimination de ces neuf dernières quantités conduit à trois équations entre A, B, C, que l'on peut mettre sous la forme:

$$28.\quad \begin{cases} A + B + C = N_1 + N_2 + N_3, \\ AB + AC + BC = N_1 N_2 + N_3 N_1 + N_2 N_3 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2, \\ ABC = N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2. \end{cases}$$

Ces équations (28.) démontrent que les quantités

$$29.\quad \begin{cases} G = N_1 + N_2 + N_3, \\ H = N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_3 N_1 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2, \\ K = N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2, \end{cases}$$

conservent, pour chaque point du corps les mêmes valeurs lorsqu'on passe d'un système de trois élémens perpendiculaires entr'eux à un autre.

Elles donnent immédiatement la somme algébrique G des trois pressions principales, la somme H de leurs produits 2 à 2, et leur produit total K. On a donc tout ce qu'il faut pour composer l'équation du troisième degré qui auroit pour racines ces trois pressions. Elle sera de la forme:

$$30.\quad \xi^3 - G\xi^2 + H\xi - K = 0.$$

Lorsque les fonctions u, v, w seront déterminées d'après les circonstances connues du corps proposé les équations des paragraphes 12. et 13. donneront les forces normales et tangentielles N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 pour tout point particulier M; les équations (29.) feront ensuite connaître les valeurs numériques des coëfficiens $(-G, +H, -K)$ de l'équation (30.); enfin les racines de cette équation donneront A, B, C, en grandeur et en signe. On connaîtra ainsi l'intensité et la nature de chacune d'elle; il restera à déterminer les plans sur lesquels elles s'exercent; on y parviendra au moyen des considérations suivantes.

33.

Considérons une des pressions principales, A par exemple; comme elle agit perpendiculairement au plan qui lui correspond, les équations du §. 24. donneront:

$$31.\quad \begin{cases} m_1(N_1-A)+m_2T_3+m_3T_2=0, \quad m_1T_3+m_2(N_2-A)+m_3T_1=0, \\ m_1T_2+m_2T_1+m_3(N_3-A)=0, \end{cases}$$

d'où l'on conclût:

$$32.\quad m_1(AT_1+T_2T_3-N_1T_1) = m_2(AT_2+T_3T_1-N_2T_2) = m_3(AT_3+T_2T_1-N_3T_3).$$

On déduit aisèment des équations (32.) que l'équation du plan perpendiculaire à la direction de A, au point M, est:

$$33.\quad \frac{x'-x}{AT_1+T_2T_3-N_1T_1}+\frac{y'-y}{AT^2+T_1T_2-N_2T_2}+\frac{z'-z}{AT_3+T_1T_2-N_3T_3}=0$$

x, y, z étant les coordonnées du point M, et x', y', z' les coordonnées courantes. On aurait les équations des plans sur lesquels s'exercent les pressions B et C, en substituant successivement dans l'équation précédente B et C à la place de A.

34.

Il convient de considérer le cas où l'une des pressions principales, A par exemple, seroit égale à zéro. Ce cas se présentera toutes les fois que la quantité K, dernier terme de l'équation (30.) seroit nulle, c'est-à-dire toutes les fois que l'équation de condition:

$$34.\quad T_1^2N_1+T_2^2N_2+T_3^2N_3=2T_1T_2T_3+N_1N_2N_3,$$

sera satisfaite par les composantes des pressions exercées au point M, sur trois élémens plans parallèles aux trois plans coordonnés.

L'équation (34.) exprime que le dénominateur commun des équations (10.) est égal à zéro; or ces équations donnent les valeurs des cosi-

nus des angles, que doit faire, avec les trois axes coordonnés, la normale à l'élément plan sur lequel une presssion P_1, ayant pour composantes x_1, y_1, z_1 exerce son action; ces cosinus seraient donc infinis, si les numérateurs des expressions (10.) n'étoient pas nuls en même tems. Ainsi les composantes, x_1, y_1, z_1 d'une quelconque des pressions exercées autour du point M, doivent satisfaire, dans les cas que nous considérons, aux trois équations:

$$35.\quad \begin{cases} x_1(T_1^2 - N_2N_3) + y_1(N_3T_3 - T_1T_2) + z_1(N_2T_2 - T_1T_3) = 0, \\ x_1(N_3T_3 - T_1T_2) + y_1(T_2^2 - N_1N_3) + z_1(N_1T_1 - T_2T_3) = 0, \\ x_1(N_2T_2 - T_3T_1) + y_1(N_1T_1 - T_2T_3) + z_1(T_3^2 - N_1N_2) = 0. \end{cases}$$

Or il se trouve que ces équations sont identiques entr'elles en vertu de l'équation (34.), qui exprime seule que les rapports de leurs coëfficiens respectifs sont les mêmes.

D'après cela, si l'on imagine par le point M pris pour origine, trois axes coordonnés parallèles aux anciens, x_1, y_1, z_1 seront les coordonnées de l'extrémité de la droite, représentant en grandeur et en direction la pression P_1, et les équations (35.) indiqueront que cette droite, quel que soit le plan sur lequel s'exerce la pression P_1, est située dans un plan déterminé, représenté par l'axe quelconque de ces équations.

35.

Ainsi: lorsqu'en un point M d'un corps solide une des pressions principales est nulle, c'est-à-dire lorsque l'équation (34.) est satisfaite, les directions de toutes les pressions exercées autour de ce point, sont situées sur un même plan.

La position de ce plan étant déterminée par les équations (35.), imaginons que ce plan soit parallèle au plan des xy; alors les composantes de toutes les pressions suivant l'axe des z seront nulles, et l'on devra supposer dans les formules précédentes Z_1, Z_2, Z_3 ou T_2, T_1, N_3, égales à zéro; alors les formules (6.) deviennent:

$$36.\quad \begin{cases} P_1 = \sqrt{(N_1^2 + T_3^2)},\quad P_2 = \sqrt{(N_2^2 + T_3^2)},\quad P_3 = 0, \\ T_3(N_2 + N_1) = P_1P_2\cos[P_1, P_2], \end{cases}$$

d'où

$$(N_1N_2 - T_3^2)^2 = P_1^2P_2^2\sin^2[P_1, P_2].$$

En outre si l'on désigne par x_1, y, les composantes d'une pression quelconque P_1^1, et par m_1, m_2, m_3 les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à l'élément plan sur lequel cette pression s'exerce, on aura d'après les équations (9.)

$$x_1 = m_1 N_1 + m_2 T_3, \quad y_1 = m_1 T_3 + m_2 N_2,$$

et par suite:

37. $$m_1 = \frac{N_2 x_1 - T_3 y_1}{N_2 N_1 - T_3^2}, \quad m_2 = \frac{N_1 y_1 - T_3 x_1}{N_1 N_2 - T_3^2}, \quad m_3 = \pm\sqrt{(-m_1^2 - m_2^2)}.$$

La troisième de ces équations démontre que chaque pression P_1 exerce son action sur deux plans différens, ayant la même trace et la même inclinaison sur le plan des pressions, en sorte que leurs normales ont la même projection sur ce plan, et sont symétriquement placées par rapport à lui; en vertu de cette symétrie il suffit de considérer les normales situées au dessus du plan des pressions.

36.

Les équations (37.) donnent:

38. $$(N_2 x_1 - T_3 y_1)^2 + (N_1 y_1 - T_3 x_1)^2 = (N_1 N_2 - T_3^2)^2 (1 - m_3^2).$$

Cette équation démontre que les pressions correspondantes à toutes les normales formant une surface conique droite autour de l'axe des z, sont les demi-diamètres d'une même ellipse située dans le plan des pressions, et ayant le point M pour centre. Cette ellipse toujours semblable à elle même, et toujours semblablement placée, augmente au centre du cône avec l'angle au centre du cône de normales que l'on considère; elle obtient sa plus grande étendue lorsque cet angle devient droit, et que le cône de normales se confond avec le plan des pressions; son équation est alors:

$$(N_1 x_1 - T_3 y_1)^2 + (N_1 y_1 - T_3 x_1)^2 = (N_1 N_2 - T_3^2)^2$$

ou bien en vertu des équations (36.):

39. $$P_2^2 x_1^2 + P_1^2 y_1^2 - 2 P_1 P_2 x_1 y_1 \cos(P_1, P_2) = P_1^2 P_2^2 \sin^2(P_1, P_2).$$

Tous les demi-diamètres de cette ellipse représentent les pressions exercées sur des élémens plans perpendiculaires au plan des pressions.

37.

Les ellipses (38.), (39.) ont toutes leurs axes sur les deux mêmes droites; si les axes des x et des y étoient parallèles à ces axes eux mêmes, $\cos(P_1, P_2)$ devrait être nul dans l'équation (39.), qui seroit nécessairement de la forme:

40. $$P_2^2 x_1^2 + P_1^2 y_1^2 = P_1^2 P_2^2, \text{ ou } \left(\frac{x_1}{P_1}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{P_2}\right)^2 = 1;$$

les deux demi-diamètres P_1, P_2 représenteraient alors les deux pressions principales exercées sur les deux élémens plans principaux perpendiculaires entr'eux et au plan des pressions.

Pour coordonner ces cas avec le cas général, représentons ces pressions principales par A et B, l'équation (40.) deviendra

$$41. \quad \left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{B}\right)^2 = 1;$$

toutes les ellipses (38.) seront représentées par la formule:

$$42. \quad \left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{B}\right)^2 = 1 - m_3^2;$$

une pression P_1^1 quelconque, demi-diamètre d'une des ces ellipses, agira sur un plan dont la normale fera avec les axes des angles dont les cosinus seront:

$$43. \quad m_1 = \frac{x_1}{A}, \quad m_2 = \frac{y_1}{B}, \quad m_3 = \sqrt{(1 - m_1^2 - m_2^2)},$$

cet élément plan lui-même aura pour équation:

$$44. \quad \frac{x_1 x}{A} + \frac{y_1 y}{B} + \sqrt{\left(1 - \left(\frac{x_1}{A}\right)^2 - \left(\frac{y_1}{B}\right)^2\right)} \cdot z = 0,$$

sa trace sur le plan des pressions sera évidemment parallèle à la tangente à la courbe reprèsentée par l'équation:

$$45. \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = \pm R,$$

au point où cette courbe est rencontrée par le demi-diamètre P_1^1; cette propriété permettra d'assigner géométriquement la position de l'élément plan demandé.

Lorsque les pressions principales A et B sont de même signe, la courbe (45.) est une ellipse, concentrique aux ellipses (42.), ayant ses axes sur les mêmes droites, et proportionnelles aux racines carrées des pressions principales correspondantes. Lorsque A et B sont de signes contraires, l'équation (45.) représente deux hyperboles, ayant pour asymptotes communes les droites comprises dans l'équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 0.$$

Lorsque le plan des pressions n'est pas parallèle à l'un des plans coordonnés, une des équations (35.) indique sa position; l'équation (30.) donne toujours les deux pressions principales A, B, et l'équation (33.) les plans sur lesquels elles agissent.

38.

Considérons encore le cas où l'équation (30.) auroit deux racines égales à zéro; c'est-à-dire où, independamment de l'équation (34.), on auroit encore $H = 0$, ou:

$$46. \quad N_1 N_2 + N_3 N_1 + N_2 N_3 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2.$$

Pour reconnaître les liaisons qui existent alors entre les pressions exercées autour du point M, remarquons que les équations (35.), conséquences nécessaires de l'équation (34.), représenteront toujours un plan sur lequel toutes les pressions devront être dirigées, qu'on pourra toujours conséquemment prendre ce plan pour plan des xy, et reprendre la discussion du cas précédent aux équations (35.). Dans cette nouvelle position des coordonnées on doit avoir $N_3 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, et l'équation (46.) sera réduite à

$$47. \quad N_1 N_2 = T_3^2.$$

Cette nouvelle équation de condition exprime que le dénominateur des expressions m_1, m_2 (37.) est égal à zéro; ces cosinus seroient donc infinis, si les numérateurs correspondans n'étoient nuls en même tems. Il résulte de là que dans le cas dont il s'agit ici, les composantes x_1, y_1 d'une pression P_1^1 quelconque, prise dans le plan des pressions, doivent satisfaire aux deux nouvelles équations:

$$48. \quad N_2 x_1 - T_3 y_1 = 0, \quad T_3 x_1 - N_2 y_1 = 0;$$

mais ces équations sont identiques en vertu de l'équation (47.), et elles représentent une ligne droite totalement déterminée.

39.

Il résulte delà que lorsque l'équation (30.) a deux racines égales à zéro, c'est-à-dire lorsque les équations (34.) et (46.) sont satisfaites, ou enfin: lorsque deux pressions principales sont nulles, toutes les pressions exercées sur tous les élémens plans passant par le point M sont dirigés suivant la même ligne droite.

La plus grande des pressions dirigées suivant cette ligne droite sera la pression principale unique A, donnée par l'équation (30.), et sera exercée sur le plan qui lui sera perpendiculaire, et qui sera donné par l'équation (33.); en sorte que la position de cette ligne sera déterminée.

En vertu du théorème déduit des équations (7.), on obtiendra la pression exercée sur un élément plan quelconque, en projetant sur sa normale la pression principale A, et portant ensuite la projection obtenue sur l'axe principal; d'où il suit que tous les élémens plans également inclinés à cet axe, éprouveront une pression égale.

Ce cas est celui qui se présenteroit en chaque point d'une tige prismatique, tirée ou pressée dans le sens de sa longueur par une force également distribuée sur sa section; en négligeant toutefois l'influence de la pression atmosphérique.

Troisième section. Cas simples.

Cas d'un prisme indéfini.

40.

L'un des cas les plus simples que l'on puisse considérer, est celui d'un prisme, tiré dans le sens de sa longueur par une force distribuée uniformément sur tous les points de la section transversale. Alors chaque molécule se mouvra, dans le sens des arêtes, d'une quantité proportionnelle à sa distance à une section supposée en repos. Si l'on suppose en outre que l'expérience soit fait dans un fluide soumis à une certaine pression, chaque molécule s'éloignera ou se rapprochera d'un axe quelconque supposé fixe, pris dans l'intérieur du prisme et parallèle à ses arêtes.

Si l'on prend cet axe pour axe des z, et deux droites perpendiculaires entr'elles, tracées dans le plan de la section que nous supposons en repos, pour axes des x et des y, le mouvement des molécules qui correspond au cas présent, sera donné par les formules:

$$u = ax, \quad v = ay, \quad w = bz;$$

a et b étant deux constantes qui dépendent de la traction à laquelle le prisme est soumis, et de la pression du fluide dans lequel se fait l'expérience. On désignera par T la traction exercée sur un millimètre carré de la section du prisme, et par P la pression du fluide environnant.

On verra d'abord que les équations d'équilibre (8.) sont immédiatement satisfaites, et l'on trouvera pour les composantes des pressions qui agissent sur trois plans perpendiculaires, passant par un point quelconque, et parallèles aux plans coordonnés, les formules suivantes:

$$\begin{array}{lll} X''=0, & X'=0, & X=A(4a+b), \\ Y''=0, & Y'=A(4a+b), & Y=0, \\ Z''=A(2a+3b), & Z'=0, & Z=0. \end{array}$$

Les composantes X'', Y''; X', Y', Y, Z étant nulles, on en conclut que l'on peut prendre Z'', Y' et X pour les pressions principales. Les constantes a et b doivent d'ailleurs satisfaire aux équations:

$$A(2a+3b) = T, \quad A(4a+b) = -P,$$

d'où

$$a = -\frac{1}{A}\cdot\frac{3P+T}{10}, \quad b = \frac{1}{A}\cdot\frac{P+2T}{5}.$$

Le mouvement des molécules est ainsi exprimé par les formules:

$$u = -\frac{1}{A}\cdot\frac{3P+T}{10}x, \quad v = -\frac{1}{A}\cdot\frac{3P+T}{10}y, \quad w = \frac{1}{A}\cdot\frac{P+2T}{5}z.$$

41.

Les valeurs des pressions étant indépendantes des coordonnées du point que l'on considère, leur distribution autour d'un point sera la même dans toute l'étendue du corps. Pour se représenter la loi de leurs variations, imaginons que sur les directions des pressions principales, qui correspondent à un point quelconque, on construise l'ellipsoïde, et les hyperboloïdes représentés par les équations

$$\frac{x^2}{P^2}+\frac{y^2}{P^2}+\frac{z^2}{T^2}=1,\quad -\frac{x^2}{P}-\frac{y^2}{P}+\frac{z^2}{T}=1,\text{ et }-\frac{x^2}{P}-\frac{y^2}{P}+\frac{z^2}{T}=-1;$$

ces surfaces étant de révolution, leur construction pourra être opérée de la manière suivante: on portera sur l'axe des z des lignes proportionnelles à T et à $\sqrt{T}$, sur l'axe des x des lignes proportionnelles à P et à $\sqrt{P}$; sur T et P, comme axes, on construira une ellipse et sur $\sqrt{T}$ et $\sqrt{P}$ comme axes deux hyperboles conjuguées, ainsi que leurs asymptotes communes; la révolution de ces courbes autour de l'axe des z engendrera les surfaces du second degré dont les équations précèdent, celle des asymptotes engendrera le cône droit asymptotique aux deux hyperboloïdes. Il suit de ce mode de génération, et des principes établis dans la seconde partie de ce mémoire, que dans le cas qui nous occupe, la pression ou la tension qui a lieu dans une direction quelconque, et son inclinaison au plan sur lequel elle agit, resteront les mêmes pour toutes les directions qui feront le même angle avec l'axe des z; il suffit donc d'examiner ce qui se passe dans le plan des zx.

La ligne T, située sur l'axe des z, représente une tension principale; pour une autre direction, la tension sera égale au demi-diamètre de l'ellipse méridienne, située sur cette direction; cette même droite prolongée rencontrera l'une des hyperboles conjuguées; le plan tangent, en ce point de rencontre, à l'hyperboloïde de révolution correspondant, donnera la direction du plan sur lequel agit la traction oblique que l'on considère; l'angle, fait avec ce plan par cette traction, diminuera à mesure que sa direction s'éloignera de celle de la tension principale; il sera nul quand cette direction coïncidera avec le cône asymptotique; cette direction continuant toujours à s'éloigner de l'axe des z, la tension deviendra une pression; son intensité sera toujours représentée par le rayon vecteur de l'ellipsoïde, et la direction du plan sur lequel elle agit, sera celle du plan

tangent au second hyperboloïde, au point où ce rayon vecteur vient rencontrer cette surface.

42.

Tout est ainsi connu dans le nouvel état d'équilibre que nous considérons, hormis la constante A, qui dépend de la nature du corps soumis à l'expérience; on voit que cette constante est en relation avec l'alongement W qu'éprouve un prisme de la substance proposée, soumis à une traction T au milieu d'un fluide à une pression P.

Or supposons que l'on prenne un prisme solide, et qu'on le soumette d'abord uniquement à la pression atmosphérique, représentée par P; on aura alors $T=-P$, et une longueur z du prisme s'alongera de $W=-\frac{1}{A}.\frac{P}{5}.z$. Si, dans cet état, on le soumet à une traction égale à F kilogrammes par millimètre carré, on aura $T=F-P$, et l'alongement sera: $W=\frac{1}{A}.\frac{2F-P}{5}.z$.

Ainsi une longueur z du prisme dans le vide, deviendra, soumise à la pression atmosphérique: $z\left(1-\frac{1}{A}.\frac{P}{5}\right)$, et si alors on soumet le prisme à une traction de F kil. par millimètre carré, la longueur primitive z deviendra: $z\left(1-\frac{1}{A}.\frac{P}{5}\right)+z.\frac{1}{A}.\frac{2F}{5}$; son alongement par l'effet de la traction F sera donc $\frac{1}{A}.z\frac{2F}{5}$, et le rapport de l'alongement, à la longueur $z\left(1-\frac{1}{A}\ \frac{P}{5}\right)$, sera $\frac{\frac{2F}{5}}{A-\frac{P}{5}}$, quantité proportionnelle à la traction F, ce qui est d'accord avec l'expérience. Soit donc, pour une certaine substance, l la fraction dont l'unité de longueur d'un prisme s'alonge pour une traction de F kilogrammes par millimètre carré, on aura $\frac{\frac{2F}{5}}{A-\frac{P}{5}}=l$, d'où $A=\frac{2}{5}\ \frac{F}{l}+\frac{P}{5}$.

Si l'on admet que le fer forgé s'alonge de $\frac{1}{10000}$ de sa longueur pour une traction de 2 kil. par $mm.c.$ (Duleau), nous aurons pour le fer: $A=8000-\frac{1}{5}P$. Les expériences sur l'alongement du fer ayant été

faites sous la pression atmosphérique qui équivaut à environ 0,01 kil. par $mm.c.$, on voit que $\frac{1}{5}P$ est tout à fait négligéable; mais il est sans doute certains corps solides pour lesquels on ne pourroit, sans erreur sensible, négliger l'influence de la pression atmosphérique.

43.

On voit en général que pour connaître la quantité A, relative à une substance donnée, il suffit de connaître de combien un prisme de cette substance s'alonge par une traction déterminée, pourvu que cette traction elle-même n'ait pas dépassé les limites de son élasticité.

Nous avons recueilli à cet égard, dans un ouvrage de Mr. Tredgold, des données d'expériences qui nous ont permis de dresser la table suivante:

Substances.		Valeurs de A.
Fer forgé		8000 kil.
fonte		5177 -
étain		1294 -
plomb		202 -
laiton		2510 -
bronze pour les canons		2696 -
marbre blanc		709 -
chine	dans le sens des fibres	478 -
sapin	dans le sens des fibres	566 -

Les auteurs qui ont fait des expériences sur l'extensibilité des corps, soumis à des tractions dans le sens de leur longueur, ne sont pas assez d'accord entr'eux pour qu'on soit certain de déduire de ces expériences des valeurs exactes de A; aussi les résultats contenus dans la table précédente ne peuvent être regardés que comme une approximation.

La détermination de A est de la plus grande importance pour le calcul numérique des variations de forme qu'éprouve un corps solide, soumis à des pressions extérieures; mais il est bon de remarquer qu'elle n'influe pas sur la manière dont se distribuent les pressions dans l'intérieur du corps.

(La suite dans le cahier prochain.)

28.

Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques.

(Par l'éditeur.)

Note préliminaire.

A la fin d'un petit mémoire sur la convergence de la série du binôme, inséré dans le second cahier du cinquième tome du journal des mathématiques que je publie, où j'ai appliqué la méthode de d'Alembert à la série du binôme pour en juger la convergence, j'ai promis (pag. 196.) de traiter cet objet encore d'une autre manière directe, en opérant immédiatement sur l'expression générale et identique du reste de la série, par une certaine méthode générale d'évaluer les restes des séries, développées suivant les différences au lieu des différentielles; méthode qui s'applique au théorème général de Taylor d'une manière semblable à celle qu'a donnée Mr. Lagrange pour l'évaluation des restes de la série particulière de Taylor et qui a été perfectionnée par Mr. Ampère.

Je veux m'acquitter ici de cette promesse. Mais comme il étoit nécessaire de présenter d'abord les dévéloppemens et théorèmes généraux mêmes dont on voulait faire une application particulière, comme, aussi, la théorie des puissances elle même étoit presque inséparable de l'objet qu'on alloit traiter, et que d'un autre côté il se présentait ainsi une bonne occasion et un moyen facile de faire encore d'autres applications des principes fondamentaux, une fois qu'ils seraient établis, ce mémoire, destiné originairement à un objet très spécial, a reçu une beaucoup plus grande étendue, et embrasse maintenant, comme applications des principes généraux qu'il présente, presque toute la théorie des puissances, des logarithmes, des quantités exponentielles et fonctions angulaires, suivie des points principaux de la théorie des factorielles et facultés analytiques; tout cela suivant les vues qui semblent être propres à ces objets.

Quant à la théorie des puissances, des logarithmes et fonctions angulaires, on pourra être étonné, de me voir reprendre des objets traités tant de fois; mais on trouvera dans le mémoire même les raisons qui m'y

ont engagé. On remarquera qu'effectivement la théorie ordinaire est encore très imparfaite tant pour la rigueur des démonstrations que pour la conséquence, et qu'elle n'est pas exempte de lacunes, imperfections qui proviennent, à ce qu'il semble, de la séparation et du morcellement d'objets qui ont une seule et même source, de l'omission de points essentiels, par exemple, de la recherche de la convergence des séries auxquelles on parvient, et de l'usage de procéder des cas particuliers aux cas généraux, au lieu de suivre la voie inverse. D'après ces motifs il ne semble pas inutile de reprendre ces objets, d'autant moins, qu'ils entrent dans les élémens, qui surtout doivent être bien établis et n'offrir jamais de lacunes ni de démonstrations foibles.

Il est vrai que si dans le mémoire présent on excepte quelques théorèmes et éclaircissemens généraux, et quelques théorèmes de la théorie des facultés analytiques, les résultats nouveaux qu'il contient ne sont qu'en très petit nombre; mais on y trouvera plusieurs vues nouvelles, ainsi que la pratique d'une méthode, qui seule me semble être propre à l'analyse et pour ainsi dire lui appartenir comme innée. Ce ne sont donc pas les résultats, mais c'est surtout la méthode, à laquelle je prie le lecteur de vouloir bien accorder son attention. On en verra les effets, et l'on trouvera que par son secours les difficultés que laisse la méthode ordinaire, peuvent effectivement être vaincues et les lacunes remplies.

Depuis un nombre d'années je prépare un traité d'analyse qui doit embrasser cette science dans toute son étendue et dans son état actuel. Un tel ouvrage me semble devoir devenir très utile à la science, et je le crois même d'une nécessité urgente; car la science analytique s'est, surtout dans ce dernier tems, tellement étendue et ramifiée, qu'il n'est presque plus possible à celui qui l'étudie d'en embrasser toutes les parties comme formant un ensemble. Le problème que je me suis proposé présente sans doute de très grandes difficultés. La seule collection des objects nombreux qu'il embrasse en forme la moindre partie. Il s'agit surtout du système, et pour cela il ne suffit pas de ranger les objets dans un ordre tel que les théorèmes et propositions ne se rapportent jamais qu'aux théorèmes et propositions qui précèdent: il s'agit de suivre la liaison intime et naturelle des propositions jusqu'à leur origine, de rapprocher les objets qui ont la même source, et de faire voir, par la doctrine elle même, son organisme et son développement naturel. Il s'agit de cette méthode non-

arbitraire, qui convient à l'objet, et cette méthode est le point le plus difficile dans une science, et en même tems le plus essentiel. Les combinaisons de vérités connues, même pour en découvrir de nouvelles, ne forment pour ainsi dire que la pratique de la science; la méthode en est l'esprit. La seule force d'invention a plus ou moins besoin du secours du hasard, pour arriver à de nouvelles idées heureuses, qui puissent agrandir le domaine de l'analyse. La véritable méthode, savoir celle qui se tire de l'essence et de l'organisme de la science elle même, est le moyen direct et sûr d'en franchir les bornes. Je sens donc fort bien l'immense difficulté de ma tâche, et je n'oublie pas que je puis être accusé de témérité, d'oser entreprendre un tel ouvrage. Mais je serai content, si mon essai contribuera au moins à encourager d'autres personnes, à suppléer ce que j'aurai peut être manqué ou négligé.

J'ai parlé de mon entreprise parceque le mémoire présent peut être aussi regardé comme un échantillon du traité que j'ai en vue. C'est pourquoi je le présente sous la forme d'un cours élémentaire, plutôt que sous celle d'un mémoire destiné aux personnes consommées dans la science: Il fera surtout voir par un exemple la méthode que je me propose de suivre.

J'entre en matière.

I. Définition et proprietés des puissances.

1.

On ne peut pas dire généralement qu'une puissance p. e. u^y est un produit de y facteurs égaux à u. Cette définition cesse déjà d'être bonne si y est une fraction, parcequ'on ne peut pas multiplier le nombre u p. e. $\frac{2}{3}$ ou $\frac{8}{5}$ fois par lui même. Il est vrai que, dans ce cas, on peut dire que les puissances sont les racines du nombre u p. e. que $u^{\frac{1}{3}}$ est le nombre qui, multiplié trois fois par lui même, donne u. Mais cette dernière définition n'est pas exacte si l'exposant y est un nombre irrationnel, puisqu'il n'existe pas de fraction qui puisse exprimer la valeur irrationnelle de l'exposant. Ici on pourroit encore recourir à l'approximation, mais elle n'offriroit pas d'idée claire et précise de l'objet; et

si enfin l'exposant est une quantité imaginaire, l'approximation ne réussit pas non plus.

Donc en allant des cas particuliers aux cas généraux, on ne parvient pas à quelque définition générale et précise des puissances bonne pour les élémens.

2.

Il est plus naturel, et même il n'y a ici, pas plus que dans plusieurs cas de l'analyse, d'autre moyen que de supposer hypothétiquement les propriétés fondamentales d'une fonction encore inconnue, pour en tirer ses autres propriétés, son développement en séries et son rapport avec d'autres quantités. Si en premier lieu on trouve que les résultats tirés des propriétés supposées ne sont pas en contradiction entre eux, on sera sûr que la fonction supposée existe réellement; et si, en second lieu, les résultats coïncident dans les cas particuliers avec les expressions des puissances dans les mêmes cas, rien n'empêche de donner le nom de puissance à la fonction supposée. Le doute que la fonction supposée soit véritablement et précisement ce qu'on a coutume d'appeler puissance, n'est qu'apparent, car, en partant des cas particuliers pour procéder à la découverte des propriétés générales des puissances, on ne trouve pas ces proprietés, on ne fait également que les supposer pas à pas. On fait au fond la même chose que nous faisons ici, mais avec un détour inutile et par une voie incertaine et exposée aux erreurs. La marche vraiment analytique, qui mène des expressions générales aux résultats particuliers, est la voie naturelle et sûre; tandis que la voie inverse n'est qu'une sorte d'induction, dont les résultats doivent être nécessairement plus ou moins incertains.

Supposons donc une fonction encore inconnue $f(u, y)$ des deux quantités u et y, qui ait les propriétés: que si y varie d'une quantité arbitraire k, les deux équations

$$1. \quad f(u, y) \cdot f(u, k) = f(u, y + k) \text{ et}$$
$$2. \quad f(f(u, y), k) = f(u, yk)$$

ont lieu généralement et pour toutes les valeurs de u, y et k.

Au lieu de la notation peu commode de la dépendance de la quantité inconnue des élémens u et y au moyen de la lettre f nous pourrons

l'exprimer aussi par la seule position des élémens et nous écrirons

$$3. \quad u^y . u^k = u^{y+k} \text{ et}$$

$$4. \quad (u^y)^k = u^{yk}.$$

Ces deux équations exprimeront les propriétés fondamentales de la fonction inconnue que nous supposons hypothétiquement et que nous appellerons arbitrairement puissance. L'élément u s'appellera racine, l'autre élément y exposant, et nommément si l'on écrit

$$5. \quad u^y = z,$$

nous dirons que

u est la racine de la puissance z à exposant y,
y l'exposant de la puissance z de la racine u et
z la puissance de la racine u pour l'exposant y.

On donne encore d'autres noms aux quantités u, y, z, savoir base, logarithme et logarithmande: nous en parlerons plus bas.

Nous ferons souvenir encore une fois que u^y n'exprime nullement un produit de facteurs égaux exclusivement, ni quelque autre valeur d'une puissance dans un cas particulier, mais plutôt cette fonction inconnue soumise aux deux conditions exprimées par les équations (3. et 4.).

Il s'agit maintenant de tirer des propriétés générales (3. et 4.) les autres propriétés des puissances, pour en trouver les valeurs dans les cas particuliers. Mais il faut que cela se fasse sans recourir à autre chose qu'à ce que les équations (3. et 4.) expriment, et aux principes du calcul qui entrent dans les expressions mêmes.

3.

Quant à ces principes, ce sont ceux de la théorie du positif et négatif et des quatre premières opérations: addition, multiplication et les inverses soustraction et division. Car le cas de la multiplication de deux puissances (éq. 3.) est celui de l'addition des exposans, et si k est négatif, on tombe dans la soustraction; le cas de l'élévation d'une puissance à une autre est le cas de la multiplication des exposans, et si le nouvel exposant est une fraction, la division s'emploie. Il faut donc que la théorie du positif et négatif, et celle des quatre premières opérations, précèdent celle des puissances. Nous les supposons établies, en nous reservant pour une autre occasion l'essai des éclaircissemens qui peut-être seront nécessaires. Nous nous bornerons seulement à annoncer

ici que la théorie des quatre premières opérations peut être donnée d'une manière semblable à celle dont on va se servir pour la théorie des puissances.

4.

I. Faisons $y = 1$ et $k = 1$ dans la seconde équation fondamentale (4.) elle donnera $(u^1)^1 = u^{1.1}$. Mais, suivant la théorie de la multiplication, le produit 1.1 est 1; donc on a $(u^1)^1 = u^1$. Soit pour un moment $u^1 = w$, l'équation qu'on vient de trouver donne $w^1 = w$; donc en écrivant u au lieu de w, on a

$$6. \quad u^1 = u.$$

Voilà le premier théorème tiré des équations fondamentales.

II. Soit dans la première équation fondamentale (3.) $k = 0$ et $y = 1$, elle donnera $u^1 . u^0 = u^1$ ou bien, u étant $= u^1$ (6.), $u . u^0 = u$. De là on tire $u^0 = \frac{u}{u}$. Mais en vertu de la théorie de la multiplication, si le diviseur égale le dividende, le quotient est l'unité, donc

$$7. \quad u^0 = 1.$$

C'est le second théorème tiré des équations fondamentales.

III. Supposons dans la première équation fondamentale (3.) $k = -y$, elle donne $u^y . u^{-y} = u^{y-y} = u^0$ et puisque $u^0 = 1$ (7.), $u^y . u^{-y} = 1$ et par suite

$$8. \quad u^{-y} = \frac{1}{u^y}.$$

C'est un troisième théorème tiré des équations fondamentales. Puisqu'en vertu de la théorie de la multiplication $u^y . \frac{1}{u^k} = \frac{u^y}{u^k}$ et en vertu de l'équation (8.) $\frac{1}{u^k} = u^{-k}$ on peut y ajouter comme corollaire

$$9. \quad u^y . u^{-k} = \frac{u^y}{u^k}.$$

IV. Faisons $u^y = z$ dans la seconde équation fondamentale, elle donne $z^k = u^{y\,k}$ et si l'on fait $k = \frac{1}{y}$, $z^{\frac{1}{y}} = u^1$; donc puisque $u^1 = u$ (6.) on a

$$10. \quad z^{\frac{1}{y}} = u, \quad u^y \text{ étant } = z.$$

C'est la quatrième conséquence qu'offrent les équations fondamentales. Elle apprend que la racine d'une puissance à exposant quelconque peut être regardée comme une puissance de la puissance même, ayant pour exposant le quotient 1 divisé par l'exposant primitif.

Puisqu'en vertu de la seconde équation fondamentale (4.) par ex. $(w^k)^{\frac{1}{y}} = w^{k.\frac{1}{y}}$, et si dans l'équation (10.) on fait $z = w^k$, on a pour corollaire:

$$11. \quad u = w^{\frac{k}{y}}, \text{ si } u^y = w^k.$$

V. Si dans la seconde équation fondamentale (4.) on fait $u^y = z$, elle donne $z^k = u^{yk}$. Mais en vertu de la première équation fondamentale (3.) on a $u^k . u^{yk} = u^{k+yk} = u^{k(1+y)}$, donc, u^{yk} étant $= z^k$, $u^k . z^k = u^{k(1+y)}$. Mais $u . z = u . u^y$, ou bien, u étant $= u^1$ (7.), $u . z = u^1 . u^y$. Cela donne, en vertu de la première équation fondamentale (3.) $u . z = u^{(1+y)}$, d'où $(uz)^k = (u^{1+y})^k$. De là on tire $(uz)^k = u^{k(1+y)}$, $(u^{1+y})^k$ étant égal à $u^{k(1+y)}$. Mais nous avons trouvé plus haut $u^{k(1+y)} = u^k . z^k$. Donc on a

$$12. \quad (uz)^k = u^k . z^k.$$

Faisant $u = u_1$ et $z = u_2 u_3$, l'équation (12.) donne $(u_1 u_2 u_3)^k = u_1^k . (u_2 u_3)^k$ et puisque en vertu de la même équation $(u_2 u_3)^k = u_2^k u_3^k$, on a $(u_1 u_2 u_3)^k = u_1^k u_2^k u_3^k$. En continuant, on trouve de la même manière $(u_1 u_2 u_3 u_4)^k = u_1^k u_2^k u_3^k u_4^k$ et généralement

$$13. \quad (u_1 u_2 u_3 \ldots . u_n)^k = u_1^k u_2^k u_3^k \ldots . u_n^k.$$

Voilà un cinquième théorème tiré des équations fondamentales. Il fait voir que la puissance d'un produit des fonctions est égal au produit des puissances des facteurs prises avec le même exposant.

Si dans l'équation (12.) on écrit z^n au lieu de z, elle donne $(uz^n)^k = u^k (z^n)^k$, ou bien, parcequ'en vertu de la seconde équation fondamentale (4.) $(z^n)^k = z^{nk}$, $(uz^n)^k = u^k z^{nk}$. Si dans cette équation on fait $n = -1$ on a $(uz^{-1})^k = u^k z^{-k}$. Mais en vertu de l'équation (8.) $z^{-1} = \frac{1}{z}$ et $z^{-k} = \frac{1}{z^k}$, donc on a comme corollaire

$$14. \quad \left(\frac{u}{z}\right)^k = \frac{u^k}{z^k}.$$

Si u et z représentent des produits de facteurs quelconques, de sorte que $u = u_1 u_2 u_3 \ldots . u_m$ et $z = z_1 z_2 z_3 \ldots . z_n$, l'équation (14.) donne $\left(\frac{u_1 u_2 u_3 \ldots . u_m}{z_1 z_2 z_3 \ldots . z_n}\right)^k = \frac{(u_1 u_2 u_3 \ldots . u_m)^k}{(z_1 z_2 z_3 \ldots . z_n)^k}$, donc en vertu de (13.)

$$15. \quad \left(\frac{u_1 u_2 u_3 \ldots . u_m}{z_1 z_2 z_3 \ldots . z_n}\right)^k = \frac{u_1^k u_2^k u_3^k \ldots . u_m^k}{z_1^k z_2^k z_3^k \ldots . z_n^k}.$$

VI. Si dans la première équation fondamentale (3.) les exposans y et k sont tous les deux égaux à l'unité, l'équation donne $u^1.u^1 = u^{1+1} = u^2$, ou bien, u^1 étant $= u$ (7.) $u^2 = u.u$. Si dans l'équation (3.) on fait $y = 2$, $k = 1$, elle donne $u^2 u^1 = u^3$, ou bien, u^2 étant $= u.u$ et $u^1 = u$, $u^3 = u.u.u$ etc. Généralement, n étant un nombre entier, on aura

16. $u^n = u.u.u....$ (n facteurs).

Ce sixième théorème, tiré des équations fondamentales, fait voir qu'une puissance à exposant entier n'est autre chose que le produit d'autant de facteurs égaux à la racine de la puissance qu'il y a d'unités dans l'exposant. Mais il n'y a que le seul cas d'exposant entier dans lequel une puissance puisse être représentée par un produit des facteurs. Si l'exposant n'est pas un nombre entier, la décomposition de la puissance en facteurs, comme il est aisé de voir, n'a pas lieu. C'est donc aussi le seul cas d'exposant entier où la définition que les puissances soient des produits de facteurs, ne soit pas en defaut.

5.

Soit dans l'équation (12.) $z = 1$, elle donne $(u.1)^k = u^k.1^k$, ou bien, $u.1$ étant u,

17. $u^k = u^k.1^k$.

Divisant cette équation par u^k, on aura

18. $\frac{u^k}{u^k} = 1^k$.

Mais la valeur de 1^k n'est pas bornée à être toujours l'unité; car si par ex. $k = \frac{1}{2}$, de sorte qu'en vertu de la première équation fondamentale $1^k.1^k = 1^{\frac{1}{2}}.1^{\frac{1}{2}} = 1^1 = 1$, la quantité 1^k a les deux valeurs différentes $+1$ et -1, puisque les produits $+1.+1$ et $-1.-1$ sont également $= 1$ tous les deux. Si $k = \frac{1}{3}$, de sorte que $1^k.1^k.1^k = 1^{\frac{1}{3}}.1^{\frac{1}{3}}.1^{\frac{1}{3}} = 1^1 = 1$, la quantité 1^k a trois valeurs différentes, savoir $+1$, $\frac{-1+(-3)^{\frac{1}{2}}}{2}$ et $\frac{-1-(-3)^{\frac{1}{2}}}{2}$, comme on le peut faire voir à l'aide de l'addition et de la multiplication seulement. Ces trois valeurs multipliées chacune deux fois par elle même donnent également l'unité pour produit; et ainsi de suite.

Il suit de cette remarque, que la quantité u^k peut avoir également plus d'une valeur; car si cela n'étoit pas, la valeur de 1^k, en vertu de l'équation (18.) ne pourrait être que l'unité dans tous les cas; résultat contraire à ce que nous venons de trouver.

Nous ne disons pas que 1^k et u^k auront toujours et nécessairement plus d'une valeur; nous faisons voir seulement qu'ils peuvent en avoir plus d'une, et cela suffit pour notre but.

Cela posé, soient v_1, v_2, v_3, ... les différentes valeurs que la quantité u^k peut avoir, le quotient $\frac{u^k}{u^k}$ représentera les quotiens suivants:

19. $\frac{v_1}{v_1}, \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \ldots.; \frac{v_1}{v_2}, \frac{v_2}{v_2}, \frac{v_3}{v_2}, \ldots.; \frac{v_1}{v_3}, \frac{v_2}{v_3}, \frac{v_3}{v_3}, \ldots.;$ etc.

Nous dirons maintenant en premier lieu, que le nombre des valeurs de 1^k ne peut être moindre que celui des valeurs de u^k, car, supposé que u^k ait les n valeurs différentes v_1, v_2, v_3, ... v_n, les n quotiens $\frac{v_1}{v_1}, \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \ldots. \frac{v_n}{v_1}$ parmi ceux (19.) qui tous, en vertu de l'équation (18.) égalent 1^k, donnent déjà n valeurs différentes pour cette dernière quantité.

Nous dirons en second lieu, que le nombre des valeurs de 1^k ne peut être plus grand que celui des valeurs de u^k; car supposons, comme ci-dessus, pour u^k les n valeurs différentes v_1, v_2, v_3, ... v_n et pour 1^k les m valeurs 1_1, 1_2, 1_3, ... 1_m, m s'il est possible étant plus grand que n, les m produits $v_1.1_1$, $v_1.1_2$, $v_1.1_3$, ... $v_1.1_m$ parmi tous ceux qui en vertu de l'équation (17.) égalent u^k, présenteroient déjà plus de valeurs que cette quantité ne doit en avoir suivant l'hypothèse.

Donc 1^k ne peut avoir ni moins ni plus de valeurs que u^k; donc le nombre des valeurs de 1^k est égal à celui des valeurs de u^k.

Mais la même chose ayant lieu pour une valeur quelconque de la base, le nombre des valeurs de u^k étant toujours égal à celui des valeurs de 1^k c'est à dire à un même nombre pour une valeur quelconque de u, il suit de là que le nombre des valeurs différentes qu'une puissance peut avoir, ne peut dépendre de la valeur de la base. Mais, excepté la base, il n'existe pas d'autre quantité dans une puissance que l'exposant; il faut donc que le nombre des valeurs différentes qu'une puissance peut avoir, dépende nécessairement de l'exposant seul. Et en vertu de ce que nous avons démontré ci-dessus, ce nombre sera égal à celui des valeurs de 1^k.

Au reste, l'équation (17.) fait voir que les différentes valeurs que la puissance u^k peut avoir, pourront être exprimées toutes par $u^k.1^k$. Dans cette expression le facteur u^k représente également toute valeur que cette quantité peut avoir. Si donc l'on adopte la notation $|u|^k$ pour exprimer

une valeur déterminée quelconque parmi celles qui conviennent à la quantité u^k, on peut écrire

$$20. \quad |u|^k = u^k 1^k$$

où $|u|^k$ représente indifféremment l'une ou l'autre valeur de u^k.

6.

La seconde équation fondamentale (4.) donne pour $u=1$, $y=n$,

$$21. \quad (1^n)^k = 1^{nk} = (1^k)^n.$$

Si n est un nombre entier positif, la puissance 1^n, en vertu de (§. 4. VI.), est un produit de n facteurs égaux entre eux et à l'unité. La valeur de ce produit est toujours 1, suivant la théorie de la multiplication, quel que soit n. C'est à dire 1^n est toujours 1, n étant un nombre entier positif. Si n est un nombre entier negatif, la valeur de 1^n est encore 1 pour une valeur quelconque de n, puisque en vertu de l'équation (8.) $1^{-n} = \frac{1}{1^n}$. Si $n=0$, 1^n ne cesse d'être 1, car en vertu de l'équation (7.) on a $1^0 = 1$. Donc si n est un nombre entier positif ou négatif, ou bien zéro, 1^n est toujours 1 pour un valeur quelconque de n.

En substituant cette valeur de 1^n dans l'équation (21.) on a

$$22. \quad 1^k = (1^k)^n.$$

Supposons maintenant le cas où 1^k a plus d'une valeur, on voit que toutes les valeurs des puissances $(1^k)^0$, $(1^k)^1$, $(1^k)^2$, ... $(1^k)^{-1}$, $(1^k)^{-2}$, ... ne seront pas nécessairement égales mais au contraire elles seront différentes entre elles, car il n'y a que l'unité qui, multipliée un nombre quelconque de fois par lui même, donne toujours la même quantité. Mais n étant arbitraire dans l'équation (22.), sous la seule condition d'être un nombre entier, l'expression $(1^k)^n$ représentera toutes les quantités $(1^k)^0 = 1$, 1^k, $1^k.1^k$, $1^k.1^k.1^k$, ... $\frac{1}{1^k}$, $\frac{1}{1^k.1^k}$, $\frac{1}{1^k.1^k.1^k}$ .... en même tems. Elle aura donc nécessairement plusieurs valeurs différentes. Mais ces valeurs seront précisément celles que 1^k peut avoir, puisque cette quantité, en vertu de l'équation (22.), s'exprime par $(1^k)^n$.

On voit par là que les différentes valeurs que 1^k peut avoir, ont la propriété qu'on les trouve, quand on multiplie, ou divise continuellement par elle même, une d'entre elles quelconque qui ne soit pas l'unité elle même, comme l'est par exemple celle $(1^k)^0$.

Si donc α_k une des différentes valeurs quelconque de 1^k qui ne soit pas 1, ces différentes valeurs seront

23. $$\alpha_k^0,\ \alpha_k^1,\ \alpha_k^2,\ \alpha_k^3,\ \ldots.\ \alpha_k^n;\ \alpha_k^{-1},\ \alpha_k^{-2},\ \ldots.\ \alpha_k^{-n}.$$

Parmi ces valeurs il se trouve nécessairement celle $\alpha_k^0 = 1$, puisque n peut être également zéro, quel que soit n. Les autres seront différentes entre elles et de 1.

7.

Mais toutes les valeurs de 1^k ne sont différentes entre elles, que dans le cas où nk ne peut être un nombre entier positif ou négatif, quel que soit n. Car si kn étoit entier on auroit $(1^k)^n$, c'est à dire $1^{kn} = 1$. Si k est une fraction dont le dénominateur est m par ex. $k = \frac{m}{\lambda}$ où m et λ signifient des nombres entiers, la puissance $1^{\frac{m}{\lambda}}$ n'aura que λ valeurs différentes, savoir les valeurs

24. $$1,\ (\alpha_k)^1,\ (\alpha_k)^2,\ (\alpha_k)^3,\ \ldots.\ (\alpha_k)^{\lambda-1}.$$

Car la valeur $(\alpha_k)^\lambda$, qui suit la dernière $(\alpha_k)^{\lambda-1}$ n'est autre chose que $(1^k)^\lambda = \left(1^{\frac{m}{\lambda}}\right)^\lambda = 1^m = 1$, c'est à dire la première des valeurs (24.). Donc les valeurs $(\alpha_k)^{\lambda+1} = (\alpha_k)^\lambda (\alpha_k)^1$, $(\alpha_k)^{\lambda+2} = (\alpha_k)^\lambda (\alpha_k)^2$, ... qui suivent celle-ci égalent de nouveau les valeurs $(\alpha_k)^1$, $(\alpha_k)^2$ etc. et la même série des valeurs (24.) recommence toujours. Les valeurs $(\alpha_k)^{-1}$, $(\alpha_k)^{-2}$ .... de $(\alpha_k)^{\frac{m}{\lambda}}$ se trouveront également parmi celles de la série (24.), car soient μ et ν des nombres entiers arbitraires et $\nu < \mu\lambda$, on a $(\alpha_k)^{\mu\lambda} = ((\alpha_k)^\lambda)^\mu = 1^\mu = 1$ donc $(\alpha_k)^{-\nu}$, ou bien $\frac{1}{(\alpha_k)^\nu}$ (8.) $= \frac{(\alpha_k)^{\mu\lambda}}{(\alpha_k)^\nu} = (\alpha_k)^{\mu\lambda-\nu}$. Ici l'exposant $\mu\lambda - \nu$ est, un nombre entier positif puisqu'on a supposé $\nu < \mu\lambda$; donc $(\alpha_k)^{\mu\lambda-\nu}$, c'est à dire $(\alpha_k)^{-\nu}$, est une des quantités de la série (24.). Donc la puissance 1^k n'a que λ valeurs différentes entre elles dans le cas dont il s'agit.

Si, pour abréger, on écrit α au lieu de α_k ou de $\alpha_{\frac{\mu}{\lambda}}$, on a $\alpha^\lambda = 1$ ou bien $\alpha^\lambda - 1 = 0$. Puisqu'ici λ est un nombre entier, la quantité $\alpha^\lambda - 1$ est divisible par $\alpha - 1$ et l'on trouve

25. $$\frac{\alpha^\lambda - 1}{\alpha - 1} = \alpha^{\lambda-1} + \alpha^{\lambda-2} + \alpha^{\lambda-3} \ldots. + 1.$$

Mais α est différent de zéro, de sorte que $\alpha - 1$ n'est pas zéro, donc

$\alpha^\lambda - 1$ étant zero, $\frac{\alpha^\lambda - 1}{\alpha - 1}$ l'est également. Donc l'équation (25.) donne

$$26. \quad 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \ldots + \alpha^{\lambda-1} = 0.$$

Cela fait voir que la somme de toutes les valeurs différentes d'une puissance de l'unité à exposant fractionnaire est zéro.

Si λ est un nombre premier, la quantité $\alpha^\lambda - 1$ n'est divisible que par α lui même, moins l'unité; mais si λ est un produit des nombres premiers $pqr \ldots$, $\alpha^\lambda - 1$ est également divisible par $\alpha - 1$, $\alpha^p - 1$, $\alpha^q - 1 \ldots \alpha^{pq} - 1$ etc. Car si par ex. $\lambda = pqr$ et $\alpha^p = \beta$, on a $\alpha^\lambda - 1 = \alpha^{pqr} - 1 = \beta^{qr} - 1$ et $\alpha^p - 1 = \beta - 1$; donc $\frac{\alpha^{pqr} - 1}{\alpha^p - 1} = \frac{\beta^{qr} - 1}{\beta - 1}$, et $\beta^{pr} - 1$ est divisible par $\beta - 1$. On trouve $\frac{\beta^{qr} - 1}{\beta - 1} = 1 + \beta + \beta^2 \ldots + \beta^{qr-1}$, ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{\alpha^\lambda - 1}{\alpha^p - 1} = 1 + \alpha^p + \alpha^{2p} + \ldots + \alpha^{\frac{\lambda}{p} - 1}.$$

Mais α^λ est toujours $= 1$ et α^p ne l'est pas, donc $\alpha^\lambda - 1$ et $\frac{\alpha^\lambda - 1}{\alpha^p - 1}$ sont zéro. Donc on a

$$27. \quad 1 + \alpha^p + \alpha^{2p} \ldots + \alpha^{\frac{p}{\lambda} - 1} = 0.$$

Cela fait voir que si l'exposant k de la quantité 1^k est une fraction $\frac{m}{\lambda}$ des nombres entiers m et λ, non seulement la somme de toutes les valeurs $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^\lambda$ de 1^k sera zéro, mais que les sommes des groupes de valeurs dont les exposans sont des multiples quelconques des facteurs du nombre λ, s'il y en a, le seront également. Si par ex. $\lambda = 6$ on a non seulement

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 = 0$$

mais aussi

$$1 + \alpha^2 + \alpha^4 = 0 \text{ et}$$
$$1 + \alpha^3 = 0.$$

Nous ne continuerons pas plus loin la recherche des propriétés des puissances de l'unité dans le cas d'exposans fractionnaires.

8.

Si k est un nombre irrationnel ou imaginaire, nk ne peut jamais être un nombre entier pour aucune valeur du nombre entier n. Donc 1^k aura dans ce cas un nombre infini de valeurs différentes entre elles.

Les puissances de 1^k à exposans entiers négatifs ne seront pas nécessairement égales dans ce cas aux puissances à exposans entiers positifs.

Si k est un nombre entier, la quantité 1^k, et aussi, en vertu des équations (17. et 18.), la quantité u^k n'auront qu'une seule valeur.

9.

La propriété des puissances de l'unité trouvée (§. 6.) éclaircit une contradiction apparente de l'expression (13.) savoir

$$28. \quad (u_1 u_2 u_3 \ldots.)^k = u_1^k u_2^k u_3^k \ldots.$$

et de celle (17.)

$$29. \quad u^k = u^k . 1^k$$

qu'on en tire. La contradiction apparente consiste en ce que par ex. l'équation (28.) semble exprimer un beaucoup plus grand nombre de valeurs à droite qu'à gauche. Car si par ex. la quantité $(u_1 u_2 u_3 \ldots.)^k$ a λ valeurs différentes, chacun des facteurs u_1^k, u_2^k, u_3^k .... à droite en aura autant, et si le nombre des facteurs est m, il paraît qu'il y aura λ^m valeurs à droite et seulement λ à gauche, puisqu'en multipliant les facteurs à droite, leurs valeurs se combinent. Egalement l'équation (29.) semble exprimer λ^2 valeurs à droite et seulement λ à gauche.

Considérons en premier lieu l'équation (29.) sous la forme (20.) savoir

$$30. \quad u^k = |u|^k . 1^k$$

où $|u|^k$ signifie une valeur quelconque déterminée de u^k. Soit v_1 une de ces valeurs, l'équation (30.), appliquée à cette valeur, donne les λ valeurs suivantes de u^k:

$$31. \quad u^k = v_1 . 1, \; v_1 \alpha, \; v_1 \alpha^2, \; v_1 \alpha^3, \; \ldots. \; v^1 \alpha^{\lambda-1}.$$

Mais il n'existe que les λ valeurs $v_1, v_2, v_3, \ldots. v_n$ de la quantité u^k; donc une valeur quelconque de cette quantité, autre que celle v_1 par ex. v_2 ne peut être que parmi les valeurs (31.). Soit $v_1 \alpha^m = v_2$, l'équation (30.) appliquée à cette autre valeur de u^k donnera

$$32. \quad u^k = (v_1 \alpha^m) 1, \; (v_1 \alpha^m) \alpha, \; (v_1 \alpha^m) \alpha^2, \; (v_1 \alpha^m) \alpha^3 \ldots. \; (v_1 \alpha^m) \alpha^{\lambda-1}.$$

Mais les produits $\alpha^m . 1$, $\alpha^m . \alpha$, $\alpha^m . \alpha^2$, ... $\alpha^m . \alpha^{\lambda-1}$, comme il est aisé de voir, ne donnent d'autres puissances de α que celles qui déjà sont comprises entre les puissances α^0, α^1, α^2 .... α^λ, puisque $\alpha^\lambda = 1$. Donc l'expression (32.) donne précisément les mêmes valeurs de u^k que celle (31.). Elles se succèdent seulement dans un autre ordre. Il en est de même

des résultats que donnent les autres valeurs v_3, v_4 .... v_λ de u^k en y appliquant l'équation (30.). Donc en multipliant u^k par 1^k dans (29.), le nombre des résultats différents n'est nullement λ^2 mais seulement λ, de sorte que l'équation (29.) n'exprime pas plus de valeurs à droite qu'à gauche.

Il en est de même de l'équation (28.). Car nous venons de voir qu'à l'aide de la multiplication par 1^k les λ valeurs de u_1^k, u_2^k, u_3^k, ... peuvent être toujours réduites à une seule, de sorte que leur inégalité peut être toujours exprimée par celle des puissances de 1^k. Donc les résultats de la combinaison des différentes valeurs de u_1^k, u_2^k .... que produit la multiplication des facteurs, se réduisent toujours à ceux qu'offrent les puissances différentes de $1^k = \alpha$. Mais ces résultats ne présentent que λ valeurs différentes, puisque les puissances α^0, α^1, α^2, ... $\alpha^{\lambda-1}$ reparoissent toujours, quelles que soient les valeurs entières qu'on donne à n. Donc le nombre des valeurs à droite dans l'équation (28.) n'est nullement λ^m, mais seulement λ, et égal à celui des valeurs à gauche.

10.

Puisque, en vertu du paragraphe précédent, les différentes valeurs d'une puissance u^k peuvent être toujours exprimées par une seule valeur déterminée de cette quantité, en la multipliant par les différentes valeurs de 1^k, et que le choix de cette valeur déterminée est arbitraire, on pourra partir par préférence des valeurs réelles de u^k, s'il y en a. Donc en écrivant

$$33. \quad u^k = |u|^k . 1^k,$$

la notation $|u|^k$ signifiera par préférence la valeur réelle de u^k, si une telle valeur existe. Nous verrons plus bas les conditions de l'existence et de la non-existence des valeurs réelles des puissances.

11.

Il y a encore à remarquer qu'en écrivant une seule lettre pour exprimer une puissance, par ex. z au lieu de u^y, comme nous l'avons fait plus haut (§. 4.), cette notation n'est pas incomplète. Il est vrai qu'il auroit fallu écrire $u^y = z . 1^y$ au lieu de $z = u^y$; mais ce qu'on trouve pour une valeur déterminée z de u^y aura lieu également pour toutes les autres valeurs de cette quantité, puisque le choix de la valeur déterminée de la quantité est arbitraire. Si l'expression d'une puissance par une seule lettre se trouve seulement à un des deux côtés d'une équation comme

par ex. dans l'équation (10. §. 4. IV.), et qu'on veuille exprimer en même temps tous les résultants que l'équation puisse présenter, il n'y a qu'à écrire $z.1^y$ au lieu de z. Cela donne dans l'équation (10.) $u = (z.1^y)^{\frac{1}{y}} = z^{\frac{1}{y}}.1^{y.\frac{1}{y}} = z^{\frac{1}{y}}.1 = z^{\frac{1}{y}}$, pour $u^y = z$, de sorte que l'équation (10.) ne change pas de forme.

12.

On voit, par ce qui précède, que tous les théorèmes sur les puissances que nous venons de trouver ont été tirés uniquement des deux équations fondamentales (3. et 4.) sans le moindre secours étranger, sans recourir au développement en séries, ni à l'approximation ou à l'induction. Nous n'avons eu besoin que de la théorie des quatre premières opérations: addition, soustraction, multiplication et division, qui, selon la nature de l'objet, doivent précéder la théorie des puissances. Ce mode de développement semble être propre ici comme ailleurs à la méthode qui convient seule à l'analyse et qui, dans cette science, comme nous l'avons remarqué plus haut, est non moins importante que les résultats eux mêmes.

Mais puisque de cette sorte tout est fondé sur les deux équations hypothétiques (3. et 4.), il faut encore voir si la coexistence des deux équations fondamentales ne peut point être révoquée en doute à cause de quelque contradiction.

La coexistence des deux équations fondamentales (3. et 4.) a été déjà legitimée a posteriori par ce que toutes les conclusions fondées sur les deux équations (3. et 4.) ne nous ont induit nulle part à quelque contradiction. Mais on peut encore prouver a priori, comme suit, que les deux équations (3. et 4.) subsistent l'une à côté de l'autre sans contradiction. En écrivant $1+\frac{k}{y}$ au lieu de k dans l'expression $(u^y)^k$ nous aurons $(u^y)^{1+\frac{k}{y}}$. Cela égale, en vertu de la première équation fondamentale (3.) à $(u^y)^1.(u^y)^{\frac{k}{y}}$ et cette quantité, en vertu de la seconde équation fondamentale (4.) est égale à $u^y.u^{y\frac{k}{y}} = u^y.u^k$ ou bien, en vertu de la première équation fondamentale égale à u^{y+k}. Donc on a suivant les deux équations fondamentales (3. et 4.)

$$34. \quad (u^y)^{1+\frac{k}{y}} = u^{y+k}.$$

Mais le même resultat peut être tiré de la seconde équation fondamentale (3.) seule sans le secours de la première. Car elle donne $(u^y)^{1+\frac{k}{y}} = u^{y\left(1+\frac{k}{y}\right)} = u^{y+k}$. Donc une des deux équations (3. et 4.), appliquée isolément à une puissance quelconque, donne le même résultat que les deux équations appliquées conjointement. Il suit de là que les deux équations ne pourront être en contradiction.

On pourrait donner encore une autre démonstration de la coexistence des deux équations fondamentales, en tirant l'une de l'autre au moyen du passage ordinaire des cas particuliers aux expressions générales. En supposant l'équation (3.), on commenceroit par démontrer l'autre équation (4.) dans les cas où y et k sont des nombres entiers; puis dans les cas où y et k sont fractionnaires, et en passant des valeurs rationnelles aux valeurs irrationnelles par le mode ordinaire, on arriveroit aux cas où les exposans sont irrationnels. Mais ce procédé seroit embarrassant et impliqueroit une sorte d'induction, à cause du passage des cas particuliers aux expressions générales; de l'autre côté on ne toucheroit pas les exposans imaginaires, et enfin on trouveroit que la démonstration, même dans son étendue limitée, ne réussit pas sans faire une seconde hypothèse, savoir celle $u^{\iota} = u$, de sorte qu'au fond on retomberoit dans l'inconvénient d'avoir deux hypothèses au lieu d'une seule. Donc, puisque cette seconde voie n'offre que des pertes sans profit, et que d'ailleurs la coexistence des deux équations (3. et 4.) peut être justifiée parfaitement, comme nous l'avons vu plus haut, les deux hypothèses, ou plutôt postulata, dont nous sommes partis, semblent être préférables.

Avant de passer au développement des puissances en séries, desquelles les fonctions angulaires pourront être tirées immédiatement, nous entamerons la recherche des facultés analytiques, en suivant une marche analogue à celle que nous avons suivie pour les puissances. Après nous donnerons des séries générales de développement applicables également aux puissances, aux facultés et à d'autres fonctions analytiques.

II. Définition et propriétés des facultés analytiques.

13.

En suivant la méthode que nous venons d'appliquer aux puissances, nous supposerons hypothétiquement des fonctions de trois élémens u, x, y soumises aux conditions suivantes:

$$35. \quad f(u, x, y+k) = f(u, x, y) \cdot f(u + y x, x, k),$$

$$36. \quad f(ku, kx, y) = k^y f(u, x, y),$$

$$37. \quad f(u, x, 1) = u.$$

Nous donnerons le nom de facultés analytiques à ces fonctions. Puisque la notation de la dépendance déterminée d'une fonction de ses élémens par une lettre comme f n'est pas commode pour le calcul, et qu'au contraire la juxtaposition est plus simple et plus convenable pour cela, nous exprimerons une faculté analytique, désignée ci-dessus par $f(u, x, y)$, par $(u, +x)^y$. La virgule placée entre les élémens u et x indique que ces élémens ne doivent pas être simplement additionnés, mais plutôt combinés suivant les règles que les équations fondamentales expriment implicitement. Cette notation adoptée, les équations fondamentales des facultés analytiques (35., 36., 37.) se présentent comme suit:

$$38. \quad (u, +x)^{y+k} = (u, +x)^y (u + y x, +x)^k,$$

$$39. \quad (ku, +kx)^y = k^y (u, +x)^y,$$

$$40. \quad (u, +x)^1 = u.$$

Voyons ce qui se tire immédiatement de ces équations à l'aide des règles des quatre premières opérations et de la théorie des puissances.

14.

I. Soit $x = 0$ dans les trois équations (38., 39., 40.), elles donnent

$$41. \quad u^{y+k} = u^y . u^k,$$

$$42. \quad (ku)^y = k^y . u^y,$$

$$43. \quad u^1 = u.$$

Mais ces équations expriment les propriétés caractéristiques des puissances, donc les puissances sont un cas particulier des facultés, savoir celui où des trois élémens u, x, y celui x est zéro.

II. Soit dans la première équation fondamentale (38.) $y=1$ et $k=1$, elle donne $(u,+x)^2=(u,+x)^1(u+x,+x)^1$. Soit en second lieu $y=2$, $k=1$ dans la même équation, on aura

$$(u+x)^3=(u,+x)^2(u+2x,+x)^1,$$

et en vertu de ce qu'on vient de trouver

$$(u,+x)^3=(u,+x)^1(u+x,+x)^1(u+2x,+x)^1.$$

En continuant on trouve

$$(u,+x)^4=(u,+x)^1(u+x,+x)^1(u+2x,+x)^1(u+3x,+x)^1,$$

et généralement

$$(u,+x)^m=(u,+x)^1(u+x,+x)^1(u+2x,+x)^1\ldots.(u+(m-1)x,+x)^1,$$

m étant un nombre entier. Mais en vertu de la troisième équation fondamentale on a $(u,+x)^1=u$; $(u+x,+x)^1=u+x$; $(u+2x,+x)^1=u+2x\ldots$ $(u+(m-1)x,+x)^1=u+(m-1)x$. Donc on a

44. $$(u,+x)^m=u(u+x)(u+2x)(u+3x)\ldots.(u+(m-1)x)$$

pour le cas où m est un nombre entier.

Cela fait voir que dans les cas où des trois élémens u, x, y celui y est un nombre entier, les facultés analytiques seront des produits de facteurs équidifférents. On leur a donné dans ce cas le nom de factorielles.

III. A cause de l'analogie des facultés avec les puissances, et de leur accord dans un cas particulier, nous donnerons à leurs élémens des noms analogues à ceux des élémens des puissances.

Des trois élémens u, x, y d'une faculté $(u,+x)^y$ nous nommerons

le premier u, base,
le second x, différence et
le troisème y, exposant.

Quant à la notation adoptée ci-dessus, elle sera justifiée par le passage des facultés aux puissances, dans le cas d'exposans entiers. Nous avons mis l'exposant au côté droit de la base et un peu plus haut, comme dans les puissances. La différence a été placée à côté de la base, et sur la même ligne, parcequ'elle peut se combiner avec la base par la voie de l'addition, comme on le voit dans les factorielles. Elle a été separée de la base par une virgule, pour indiquer qu'elle ne doit être ajoutée que sous quelques conditions.

On a aussi coutume de désigner une faculté $(u,+x)^y$ par $u^{y,x}$, où la différence est placée à côté de l'exposant; mais il paroît être beaucoup plus naturel et conforme à la nature de la fonction dont il s'agit, de placer la différence à côté de la base, parcequ'elle se combine bien avec elle par la voie de l'addition ou de la soustraction, mais non pas avec l'exposant. Il est bien vrai que les notations dans les mathématiques sont arbitraires, mais elles ne le sont pas absolument; elles ne le sont que jusqu'à de certaines limites tracées par les règles indispensables de la conséquence, sans laquelle les mathématiques n'existent pas. Certes la conséquence est tellement inséparable de cette science qu'il n'est pas permis de la négliger, même dans les points les moins essentiels. Et la notation n'est pas de ces points; elle est beaucoup plus importante qu'elle ne semble l'être à la première vue. Les signes sont la langue des mathématiques et l'art de la notation est celui de cette langue. Qu'on nous pardonne cette remarque: elle est susceptible de nombreuses applications dans toutes les parties de l'analyse.

IV. Si dans la seconde équation fondamentale (39.) l'exposant y est un nombre entier, elle donne en vertu de (II. 44.):

$$45.\quad ku(ku+kx)(ku+2kx)\ldots.(ku+(y-1)kx)=k^y u(u+x)(u+2x)\ldots.(u+(y-1)x).$$

Cette équation est identique et fait voir que les trois équations fondamentales n'impliquent point de contradiction dans le cas d'exposans entiers.

V. Soit dans la première équation fondamentale (38.) $y=0$ et $k=1$, elle donne $(u,+x)^1=(u,+x)^0\,(u,+x)^1$ et en vertu de (40.) $u=(u,+x)^0\,u$. De là on tire $(u,+x)^0=\frac{u}{u}$ ou bien

$$46.\quad (u,+x)^0=1.$$

La valeur d'une faculté quelconque est donc l'unité dans le cas où l'exposant est zéro.

VI. Ecrivons dans la première équation fondamentale (38.) $-y$ au lieu de $+y$ et y au lieu de x, elle donne $(u,+x)^0=(u,+x)^{-y}(u-yx,+x)^y$. Cela donne en vertu de (46.)

$$47.\quad (u,+x)^{-y}=\frac{1}{(u-yx,+x)^y}.$$

Cela exprime une faculté à exposant négatif par une autre dont l'exposant est positif et de la même grandeur.

Si dans (47.) on fait $y=1$, on a $(u,+x)^{-1}=\frac{1}{(u-x,+x)^1}$ et en vertu de (40.)

$$48.\quad (u,+x)^{-1}=\frac{1}{u-x}$$

et si l'on écrit $-x$ au lieu de $+x$,

$$49.\quad (u,-x)^{-1}=\frac{1}{u+x}.$$

VII. L'expression (44.) fait voir que, dans le cas d'exposant entier et positif, la valeur d'une faculté est zéro si la base l'est. L'expression (47.) apprend que, dans le même cas, mais l'exposant étant négatif, la valeur de la faculté n'est pas zéro, mais en vertu de (44.) $(0,+x)^{-y}=\frac{1}{-yx.-(y-1)x.-(y-2)x....-x}$, ou bien

$$50.\quad (0,+x)^{-y}=\pm\frac{1}{x.2x.3x.4x....yx}.$$

Nous verrons plus bas quelles sont les valeurs des facultés à exposans quelconques dans le cas où la base est zéro.

VIII. Si dans la première équation fondamentale (38.) on écrit y à la place de k et k à la place de y, elle donne

$$51.\quad (u,+x)^{y+k}=(u,+x)^k(u,+kx,+x)^y$$

donc on a $(u,+x)^k(u+kx,+x)^y=(u,+x)^y(u+yx,+x)^k$, et de là

$$52.\quad \frac{(u+kx,+x)^y}{(u,+x)^y}=\frac{(u+yx,+x)^k}{(u,+x)^k}.$$

IX. Si dans la seconde équation (39.) on fait $k=\frac{1}{u}$ et puis $k=\frac{1}{x}$, elle donne $\left(1,+\frac{x}{u}\right)^y=\frac{1}{u^y}(u,+x)^y$ et $\left(\frac{u}{x},+1\right)^y=\frac{1}{x^y}(u,+x)^y$; donc

$$53.\quad (u,+x)^y=u^y\left(1,+\frac{x}{u}\right)^y \text{ et}$$

$$54.\quad (u,+x)^y=x^y\left(\frac{u}{x},+1\right)^y.$$

X. Multiplions l'équation (54.) par $1=\frac{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}{(1,+1)^{\frac{x}{u}-1}}$, nous aurons

$(u,+x)^y = x^y \dfrac{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}\left(\frac{u}{x},+1\right)^y}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}$. Mais si dans la première équation fondamentale (38.) on fait $u=1$, $x=1$, $y=\frac{u}{x}-1$, et $k=y$, elle donne $(1,+1)^{\frac{u}{x}-1+y} = (1,+1)^{\frac{u}{x}-1}\left(1+\frac{u}{x}-1,+1\right)^y = (1,+1)^{\frac{u}{x}-1}\left(\frac{u}{x},+1\right)^y$. En substituant cette expression de $(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}\left(\frac{u}{x},+1\right)^y$ dans celle de $(u,+x)^y$ ci-dessus, on trouve

$$55. \quad (u,+x)^y = x^y . \frac{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1+y}}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}.$$

On voit par cette expression, qu'une faculté à base et différence quelconques, peut toujours être exprimée par deux autres facultés dont les bases et les différences sont l'unité. Donc toute faculté peut être réduite à d'autres de la dernière forme.

XI. Si dans la première équation fondamentale (38.) on fait $u=1$, $x=1$ et $k=\frac{u}{x}-1$, elle donne $(1,+1)^{\frac{u}{x}-1+y} = (1,+1)^y (1+y,+1)^{\frac{u}{x}-1}$. Mais en vertu de la seconde équation fondamentale (39.) on a $(1+y,+1)^{\frac{u}{x}-1} = \left(\frac{1}{y}+1,+\frac{1}{y}\right)^{\frac{u}{x}-1} y^{\frac{u}{x}-1}$, donc $(1,+1)^{\frac{u}{x}-1+y} = (1,+1)^y \left(\frac{1}{y}+1,+\frac{1}{y}\right)^{\frac{u}{x}-1} . y^{\frac{u}{x}-1}$. En substituant cette expression dans celle (55.) on a

$$56. \quad (u,+x)^y = \frac{(1,+1)^y \left(\frac{1}{y}+1,+\frac{1}{y}\right)^{\frac{u}{x}-1} . y^{\frac{u}{x}-1} . x^y}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}.$$

Cette expression peut être utile dans le cas où l'exposant y est infiniment grand. Dans ce cas, à cause de $\frac{1}{y}=0$, l'expression (56.) se réduit à

$$57. \quad (u,+x)^y = \frac{(1,+1)^y y^{\frac{u}{x}-1} x^y}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}$$

et si $x=1$, à

$$58. \quad (u,+1)^y = \frac{(1,+1)^y y^{u-1}}{(1,+1)^{u-1}}.$$

Les deux expressions (57. et 58.) n'ont lieu que dans le cas où $y=\infty$.

XII. La première équation fondamentale (38.) donne $(u+yx,+x)^k = \frac{(u,+x)^{y+k}}{(u,+x)^y}$. Faisant $yx=v$, cela se réduit à

$$59. \quad (u+v,+x)^k = \frac{(u,+x)^{\frac{v}{x}+k}}{(u,+x)^{\frac{v}{x}}}.$$

Cette formule sert à exprimer, par deux facultés qui ont la même base et la même différence, une autre faculté qui a la même différence mais une autre base quelconque.

XIII. Si dans la seconde équation fondamentale (39.) on fait $k=\frac{w}{x}$, elle donne $\left(\frac{wu}{x},+w\right)^y = \left(\frac{w}{x}\right)^y (u,+x)^y$. Mais en vertu de la première équation fondamentale (38.) on a

$$(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}+y} = (v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}\left(v+w\left(\frac{u}{x}-\frac{v}{w}\right),+w\right)^y = (v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}\left(\frac{wu}{x},+w\right)^y$$

et de là

$$\left(\frac{wu}{x},+w\right)^y = \frac{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}+y}}{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}}.$$

En substituant cela dans l'expression de $\left(\frac{wu}{x},+w\right)^y$ ci-dessus et multipliant par $\left(\frac{x}{w}\right)^y$, on trouve

$$60. \quad (u,+x)^y = \left(\frac{x}{w}\right)^y \frac{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}+y}}{(v,+w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}}.$$

A l'aide de cette formule on pourra réduire une faculté à deux autres ayant mêmes bases et mêmes différences mais de grandeur arbitraire.

XIV. Si dans l'expression (60.) on fait $v=u$ et $x=w+k$, elle donne $(u,+w+k)^y = \left(\frac{w+k}{w}\right)^y \frac{(u,+w)^{\frac{u}{w+k}-\frac{u}{w}+y}}{(u,+w)^{\frac{u}{w+k}-\frac{u}{w}}}$, ou bien, en mettant x à la place de w, et réduisant:

$$61. \quad (u,+x+k)^y = \left(1+\frac{k}{x}\right)^y \frac{(u,+x)^{-\frac{uk}{x(x+k)}+y}}{(u,+x)^{-\frac{uk}{x(x+k)}}}.$$

Si $x=1$ et qu'on écrive k au lieu de $1+k$, on a

$$62. \quad (u,+x)^y = k^y \frac{(u,+1)^{\frac{u}{x}-u+y}}{(u,+1)^{\frac{u}{x}-u}}.$$

Les formules (61. et 62.) peuvent servir à exprimer par deux facultés à mêmes bases et différences une troisième qui a également la même base mais une autre différence quelconque.

XV. Si dans la seconde équation fondamentale (39.) on fait $k=1$, elle donne

$$63. \quad (u,+x)^y = 1^y (u,+x)^y$$

et de là

$$64. \quad \frac{(u,+x)^y}{(u,+x)^y} = 1^y.$$

Ces équations en vertu des réflexions semblables à celles (§. 5.) font voir, qu'une faculté a plusieurs valeurs différentes, si la puissance de l'unité prise avec l'exposant de la faculté en a, et nommément le même nombre de valeurs que cette puissance elle même. Si donc on veut exprimer une des valeurs différentes quelconque de la faculté, par ex. la valeur réelle, s'il y en a, par $|u,+x|^y$, on pourra écrire

$$65. \quad (u,+x)^y = |u,+x|^y . 1^y$$

et cette équation donnera toutes les valeurs différentes de la faculté, à l'aide des valeurs différentes de la puissance 1^y de l'unité. On voit encore par l'expression (65.) que le nombre des valeurs différentes d'une faculté dépend uniquement de l'exposant et non de la base ou de la différence.

15.

Telles sont les expressions principaux sur les facultés analytiques qui peuvent être tirés immediatement de leurs équations fondamentales supposées hypothétiquement. Au lieu de la troisième équation (40.) on pourroit peut-être faire l'hypothèse d'une autre équation plus générale, analogue à le seconde équation fondamentale des puissances $(u^y)^k = u^{yk}$ (4.), savoir de l'équation

$$66. \quad ((u,+x,+yx)^y)^k = (u,+x)^{ky}$$

qui, combinée avec les deux premières équations (38. et 39.) donneroit la troisième $(u,+x)^1 = u$ et la remplaceroit. Si y et k sont des nombres

entiers, cette équation (66.) donneroit l'expression suivante

67. $$(u,+x)^{\overline{yk}} = u(u+x)(u+2x)\ldots.(u+(y-1)x)$$
$$(u+yx)(u+(y+1)x)\ldots.(u+(2y-1)x)$$
$$(u+2yx)(u+(2y+1)x)\ldots.(u+(3y-1)x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(u+(k-1)yx)(u+((k-1)y+1)x)\ldots.(u+kyx).$$

Nous remettons la recherche de l'équation (66.) et de ses applications à une autre occasion et passons au développement des puissances et des facultés en séries. Et pour exécuter ce développement, nous commencerons par donner les développemens généraux des fonctions en séries.

III. Formules générales de développement.

16.

Il y a des cas où les valeurs numériques d'une fonction, celles de ses élémens étant données, peuvent être calculées à l'aide des quatre premières opérations suivant les expressions des propriétés de la fonction, et il y a en d'autres, plus fréquents, où cela n'est pas possible. Les fonctions qu'on appelle entières et fractionnaires sont dans le premier cas. Les puissances et les facultés le sont également si leurs exposans sont des nombres entiers; car dans ce cas elles ne sont que des produits de facteurs égaux ou équidifférents, qui peuvent être calculés par la multiplication et l'addition seulement. Les puissances à exposans fractionnaires sont encore dans le premier cas si leur racines sont rationnelles. La valeur numérique de toute autre puissance ou faculté ne peut être calculée immédiatement par les expressions en forme finie de leurs propriétés, ni par celles qu'on en tire par la transformation.

Mais tout calcul numérique se réduit enfin à l'addition, soustraction, multiplication et division de nombres entiers, et il n'y a pas au fond d'autre opération pour les nombres. Donc si les valeurs numériques des fonctions ne peuvent pas être calculées immediatement suivant les expressions de leurs propriétés, il n'y a d'autre moyen que de transformer ces expressions en séries de termes composés seulement de fonctions rationnelles entières ou fractionnaires, propres à être calculés par les quatre premières operations. Ces séries seront toujours nécessairement infinies,

car si elles ne l'étoient pas, les fonctions qu'elles représentent seroient, comme dans le premier cas, rationnelles et calculables directement. Mais puisqu'on ne peut pas calculer un nombre infini de termes, le calcul numérique de fonctions irrationnelles ne peut s'exécuter qu'approximativement, et il faut que la série qui représente la fonction soit convergente, c'est-à-dire, que la somme d'un nombre quelconque de ses premiers termes, diffère d'autant moins de la somme de la série totale, que le nombre des termes qu'on calcule est plus grand, que cette différence, ou bien le *reste* de la série, diminue au delà de toute quantité aussi petite qu'on voudra et qu'il soit zéro pour un nombre infini de termes. La série sera d'autant plus utile que sa convergence sera plus rapide.

Le moyen généralement applicable au développement des fonctions en séries, est le même qui fait naitre le calcul différentiel et intégral et le calcul des différences. C'est de faire varier par la voie de l'addition ou soustraction les valeurs des élémens des fonctions et de calculer les variations qu'éprouvent par là les valeurs des fonctions elles mêmes. Les développemens propres pour cela s'exécutent suivant une formule générale, applicable à une fonction quelconque et semblable à la série de Taylor qui en est un cas particulier. On pourroit l'appeler série générale de Taylor. Elle est connue depuis longtems quant à sa forme qui est celle de la série de Newton. Mais la méthode ordinaire de la démontrer ne semble pas être rigoureuse; aussi néglige-t-on ordinairement l'expression finie du reste de la série et la recherche de sa convergence. Il s'agit donc de compléter cela et de donner une démonstration rigoureuse de cette formule. Son développement peut être exécuté par la voie des transformations purement identiques, qui par leur nature sont exemptes de toute incertitude. L'idée principale de ces transformations se trouve dans les mémoires de Mr. Servois des années 1805, 1809 et 1814 sur les principes du calcul différentiel. Nous partirons de cette idée en modifiant son application, surtout dans le cas des différentielles, pour lequel il y a des remarques essentielles à faire et en complétant le développement de la série par l'expression du reste et par la recherche de sa convergence.

17.

Soit Fx une fonction quelconque de x et k une variation quelconque de l'élément x, on pourra écrire identiquement:

$$68. \quad F(x+k) = Fx + k.\frac{F(x+k)-Fx}{k}.$$

En supposant

$$69. \quad \frac{F(x+k)-Fx}{k} = fx$$

on a

$$70. \quad F(x+k) = Fx + k\,fx.$$

Mettons $x+\alpha$ au lieu de x et en même tems $k-\alpha$ au lieu de k, de sorte que $x+k$ conserve la même valeur, l'expression (70.) se transformera en

$$71. \quad F(x+k) = F(x+\alpha) + (k-\alpha)f(x+\alpha).$$

Soustrayant l'expression primitive (70.) de celle (71.) on aura

$$0 = F(x+\alpha) - Fx + (k-\alpha)f(x+\alpha) - kfx$$

ou bien

$$72. \quad 0 = F(x+\alpha) - Fx + (k-\alpha)(f(x+\alpha)-fx) - \alpha fx.$$

Désignons par la caractéristique $\triangle$ les différences des valeurs des fonctions pour les valeurs $x+\alpha$ et x et $k-\alpha$ et k des élémens x et k, l'expression se reduira à

$$73. \quad 0 = \triangle Fx + (k-\alpha)\triangle fx - \alpha fx.$$

Mettons de nouveau $x+\alpha$ au lieu de x et $k-\alpha$ au lieu de k dans cette dernière expression, elle donnera

$$0 = \triangle F(x+\alpha) + (k-2\alpha)\triangle f(x+\alpha) - \alpha f(x+\alpha).$$

En déduisant l'expression (73.), on aura

$$0 = \triangle F(x+\alpha) - \triangle Fx + (k-2\alpha)\triangle f(x+\alpha) - (k-2\alpha)\triangle fx - \alpha\triangle fx - \alpha(f(x+\alpha)-fx)$$

et en écrivant le signe des différences,

$$74. \quad 0 = \triangle^2 Fx + (k-2\alpha)\triangle^2 fx - 2\alpha\triangle fx.$$

En mettant de nouveau $(x+\alpha)$ à la place de x et $k-\alpha$ à la place de k dans la formule (74.) elle donnera

$$0 = \triangle^2 F(x+\alpha) + (k-3\alpha)\triangle^2 f(x+\alpha) - 2\alpha\triangle f(x+\alpha).$$

Déduisant ce résultat de l'expression (74.) on aura

$$0 = \triangle^2 F(x+\alpha) - \triangle^2 Fx + (k-3\alpha)\triangle^2 f(x+\alpha) - (k-3\alpha)\triangle^2 fx - \alpha\triangle^2 fx - 2\alpha(\triangle f(x+\alpha) - \triangle fx),$$

ou bien en mettant le signe $\triangle$,

$$75. \quad 0 = \triangle^3 Fx + (k-3\alpha)\triangle^3 fx - 3\alpha\triangle^2 fx.$$

Continuant la même opération, on aura des résultats toujours semblables et dont la forme est aisée à saisir. Des formules (70. 73. 74. et 75.) et de celles qu'on en peut tirer, en continuant le développement, on aura

$$76.\quad \begin{cases} F(x+k) = Fx + kfx \\ fx = \frac{\triangle Fx}{\alpha} + \frac{k-\alpha}{\alpha}\triangle fx, \\ \triangle fx = \frac{\triangle^2 Fx}{2\alpha} + \frac{k-2\alpha}{2\alpha}\triangle^2 fx, \\ \triangle^2 fx = \frac{\triangle^3 Fx}{3\alpha} + \frac{k-3\alpha}{3\alpha}\triangle^3 fx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \triangle^{n-2} fx = \frac{\triangle^{n-1} Fx}{(n-1)\alpha} + \frac{k-(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\triangle^{n-1} fx, \\ \triangle^{n-1} fx = \frac{\triangle^n Fx}{n\alpha} + \frac{k-n\alpha}{n\alpha}\triangle^n fx. \end{cases}$$

En substituant ces expressions, la seconde dans la première, la troisième dans le résultat etc., on aura

$$77.\quad \begin{cases} F(x+k) = Fx + kfx, \\ F(x+k) = Fx + \frac{k}{\alpha}\triangle Fx + \frac{k(k-\alpha)}{\alpha}\triangle fx, \\ F(x+k) = Fx + \frac{k}{\alpha}\triangle Fx + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 Fx + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 fx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

etc., et généralement, en restituant encore la valeur de fx (69.)

$$78.\quad F(x+k) = Fx + \frac{k}{\alpha}\triangle Fx + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 Fx + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\triangle^3 Fx \ldots$$
$$\ldots + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n Fx$$
$$+ \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n\left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right).$$

Les coëfficiens de $\triangle Fx$, $\triangle^2 Fx$ etc. dans les termes de cette expression sont $\frac{k}{\alpha}$, $\frac{\frac{k}{\alpha}\left(\frac{k}{\alpha}-1\right)}{1.2}$, $\frac{\frac{k}{\alpha}\left(\frac{k}{\alpha}-1\right)\left(\frac{k}{\alpha}-2\right)}{1.2.3}$ .... Si pour abréger on les désigne par $\left(\frac{k}{\alpha}\right)_1$ $\left(\frac{k}{\alpha}\right)_2$ $\left(\frac{k}{\alpha}\right)_3$ ...., on peut aussi écrire

$$79.\quad F(x+k) = Fx + \left(\frac{k}{\alpha}\right)_1 \triangle Fx + \left(\frac{k}{\alpha}\right)_2 \triangle^2 Fx + \left(\frac{k}{\alpha}\right)_3 \triangle^3 Fx \ldots$$
$$\ldots + \left(\frac{k}{\alpha}\right)_n \triangle^n Fx + \left(\frac{k}{\alpha}\right)_n (k - n\alpha)\, \triangle^n \left(\frac{F(x+k) - Fx}{k}\right).$$

Telle est la formule générale de développement qu'on peut appeler formule générale de Taylor. Elle est, comme on voit, semblable à la série de différences de Newton et applicable à une fonction quelconque Fx pour la développer en série. Elle donne en même tems une expression finie du reste de la série. Si l'on désigne par R_n ce reste, savoir celui qui suit les n premiers termes de la série après le terme Fx, on a

$$80.\quad R_n = \left(\frac{k}{\alpha}\right)_n (k - n\alpha) \triangle^n \left(\frac{F(x+k) - Fx}{k}\right)$$
$$= \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.n} \triangle^n \left(\frac{F(x+k) - Fx}{k}\right).$$

La série, comme nous l'avons vu, a été trouvée par le seul moyen de transformations identiques. Son développement est donc établi de la manière la plus rigoureuse. La série est semblable à celle de Mr. Servois, mais elle en diffère en quelque sorte, surtout par l'expression du reste, qui s'offre en même tems.

Quant à l'application de la caractéristique $\triangle$ à l'expression du reste, il y a à remarquer que toutes les fois qu'on écrit $x+\alpha$ au lieu de x il faut, en vertu de la règle adoptée pour le développement, mettre en même tems $k-\alpha$ au lieu de k, de sorte que $x+k$ conserve la même valeur. On aura suivant cette règle par ex.

$$81.\quad \begin{cases} \triangle \dfrac{F(x+k)-Fx}{k} = \dfrac{F(x+k)-F(x+\alpha)}{k-\alpha} - \dfrac{F(x+k)-Fx}{k}, \\ \triangle^2 \dfrac{F(x+k)-Fx}{k} = \dfrac{F(x+k)-F(x+2\alpha)}{k-2\alpha} - 2\dfrac{F(x+k)-F(x+\alpha)}{k-\alpha} + \dfrac{F(x+k)-Fx}{k}. \end{cases}$$

Si l'on vouloit développer l'expression du reste, on trouveroit que tous les termes de la série se détruisent, et cela doit arriver effectivement à cause de l'identité de l'expression. Par ex. si l'on s'arrête au second terme de la série en écrivant

$$F(x+k) = Fx + \frac{k}{\alpha} \triangle Fx + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2} \triangle^2 Fx + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2} \triangle^2 \frac{F(x+k)-Fx}{k},$$

on a

$$F(x+k) = Fx + \frac{kF(x+\alpha)-kFx}{\alpha} + \frac{k(k-\alpha)F(x+2\alpha)-2k(k-\alpha)F(x+\alpha)+k(k-\alpha)Fx}{2\alpha^2}$$
$$+\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2}\left[\frac{F(x+k)-F(x+2\alpha)}{k-2\alpha}-2\frac{F(x+k)-F(x+\alpha)}{k-\alpha}+\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right],$$

et cela donne

$$0 = \left(\frac{k(k-\alpha)-2k(k-2\alpha)+(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2}-1\right)F(x+k)$$
$$+\left(1-\frac{k}{\alpha}+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}-\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2}\right)Fx$$
$$+\left(\frac{k}{\alpha}-\frac{2k(k-\alpha)}{2\alpha^2}+\frac{k(k-2\alpha)}{\alpha}\right)F(x+\alpha)$$
$$+\left(\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}-\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\right)F(x+2\alpha)$$

ou bien $0=0$, comme il faut.

Mais il n'y a nullement à craindre que l'expression (78.), à cause de son identité, soit moins un véritable développement, qu'une transformation vague dont tous les termes se détruisent mutuellement. Si les termes de la série (78.) vont en diminuant, il y a déjà lieu de présumer qu'elle donnera approximativement la valeur de la quantité $F(x+k)$ qu'elle exprime, et si l'on peut démontrer que le reste R_n est zéro pour $n=\infty$, la série sera convergente et donnera effectivement la véritable valeur de $F(x+k)$. Ce seroit une erreur de soupçonner qu'une transformation identique ne puisse fournir un développement réel. Au contraire, tout développement exact ne peut être qu'une transformation identique. Le développement d'une fonction en série convergente n'est jamais qu'une transformation identique de son expression en une autre composée de termes rationnels et décroissants jusqu'à zéro et dont le reste, qui suit un nombre infini de termes, est zéro.

18.

Les quotiens $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$, $\frac{\triangle^3 Fx}{\alpha^3}$, ... des termes de la série générale de Taylor (78.), si l'on y fait $\alpha=0$, n'étant autre chose que les coëfficiens différentiels de la série particulière de Taylor, il semble à la première vue, que cette dernière série puisse être tirée immediatement de la série générale, si l'on suppose que les factorielles $k(k-\alpha)$, $k(k-\alpha)(k-2\alpha)$ ....

pour $\alpha = 0$ se réduisent aux puissances k^2, k^3, k^4 ...., car dans ce cas la série (78.), en y écrivant ∂Fx, $\partial^2 Fx$, ... au lieu de $\frac{\Delta Fx}{\alpha}$, $\frac{\Delta^2 Fx}{\alpha^2}$ .... donne

$$82. \quad F(x+k) = Fx + k\partial Fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 Fx + \frac{k^3}{2.3}\partial^3 Fx \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{k^n}{2.3\ldots.n}\partial^n Fx + \frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.n}\partial^n\left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right)$$

et c'est la série particulière de Taylor.

Cette réduction de la série générale (78.) à la série particulière se justifie complètement dans le cas où la série n'a qu'un nombre fini de termes, car dans ce cas les factorielles $k(k-\alpha)$, $k(k-\alpha)(k-2\alpha)$, ... $k(k-\alpha)(k-2\alpha)$ .... $(k-n\alpha)$ se réduisent pour $\alpha = 0$, sans le moindre doute, aux puissances k^2, k^3, ... k^{n+1}. Mais si la série se prolonge à l'infini, c'est-à-dire que n puisse être ∞, on n'est pas sûr, que la factorielle $k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)$ soit égale à la puissance k^{n+1}, puisque la valeur du facteur $k-n\alpha$ pourroit être quelque autre quantité que k, même ou zéro ou infini pour $\alpha = 0$ et $n = \infty$. On ne peut donc tirer immédiatement la série particulière de Taylor de la série générale dans tous les cas. Son développement a besoin plutôt encore de quelques autres réflexions, et d'autant plus que la série n'a effectivement lieu que sous certaines conditions.

Parmi les modes nombreux de développement qui existent de la série particulière de Taylor, celui que donne Lagrange dans la théorie des fonctions se distingue par sa clarté et sa généralité. Mais ce développement suppose hypothétiquement la forme de la série et sa convergence. Mr. Servois, dans les mémoires cités plus haut, donne un développement de la série sans faire ces hypothèses; mais dans son développement, les coëfficiens différentiels se présentent sous la forme de séries dont la convergence peut offrir des difficultés. Voici comment on peut démontrer la série particulière de Taylor uniquement à l'aide des transformations identiques, et de sorte qu'en même tems les conditions de l'existence du développement se font voir.

I. Soit comme ci-dessus l'équation identique

$$83. \quad F(x+k) = Fx + k\left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right) \text{ et } \frac{F(x+k)-Fx}{k} = fx,$$

de sorte que

$$84. \quad F(x+k) = Fx + kfx.$$

Faisons varier x de α et k de $-\alpha$, comme plus haut, on aura

$$F(x+k) = F(x+\alpha) + (k-\alpha)f(x+\alpha),$$

et en retranchant de cette équation celle (84.)

$$85. \quad 0 = \triangle Fx + k\triangle fx - \alpha f(x+\alpha).$$

Mettons de nouveau $x+\alpha$ et $k-\alpha$ au lieu de x et k, nous aurons

$$0 = \triangle F(x+\alpha) + (k-\alpha)\triangle f(x+\alpha) - \alpha f(x+2\alpha)$$

et en γ retranchant l'équation (85.)

$$86. \quad 0 = \triangle^2 Fx + k\triangle^2 fx - 2\alpha\triangle f(x+\alpha).$$

En mettant encore $x+\alpha$ et $k-\alpha$ au lieu de x et k, l'équation (86.) donne

$$0 = \triangle^2 F(x+\alpha) + (k-\alpha)\triangle^2 f(x+\alpha) - 2\alpha\triangle f(x+2\alpha)$$

et en en déduisant celle (86.)

$$87. \quad 0 = \triangle^3 Fx + k\triangle^3 fx - 3\triangle^2 f(x+\alpha).$$

En continuant toujours la même opération, on aura, comme les équations (83., 84., 85., 86.) le font voir:

$$88. \quad \begin{cases} F(x+k) = Fx + kfx, \\ f(x+\alpha) = \dfrac{\triangle fx}{\alpha} + k\dfrac{\triangle fx}{\alpha}, \\ \dfrac{\triangle f(x+\alpha)}{\alpha} = \dfrac{\triangle^2 Fx}{2\alpha^2} + \dfrac{k}{2}\dfrac{\triangle^2 fx}{\alpha^2}, \\ \dfrac{\triangle^2 f(x+\alpha)}{2\alpha^2} = \dfrac{\triangle^3 Fx}{2.3\alpha^3} + \dfrac{k}{2.3}\dfrac{\triangle^3 fx}{\alpha^3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\triangle^n f(x+\alpha)}{2.3\ldots.(n-1)\alpha^{n-1}} = \dfrac{\triangle^n Fx}{2.3\ldots.n\alpha^n} + \dfrac{k}{2.3\ldots.n}\dfrac{\triangle^n fx}{\alpha^n}. \end{cases}$$

II. Ces équations, puisqu'elles sont identiques, subsistent sans aucune condition ni restriction. Quand on y fait $\alpha = 0$, les quantités $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$, $\frac{\triangle^3 Fx}{\alpha^3}$ .... et $\frac{\triangle fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 fx}{\alpha^2}$, $\frac{\triangle^3 fx}{\alpha^3}$ .... se réduisent aux coëfficiens différentiels de divers ordres des fonctions Fx et fx, que nous désignerons par ∂Fx, $\partial^2 Fx$, $\partial^3 Fx$ ....; ∂fx, $\partial^2 fx$, $\partial^3 fx$ .... Si maintenant fx, c'est-à-dire $\frac{F(x+k)-Fx}{k}$ (69.) est tel, que $f(x+\alpha)$,

$\frac{\Delta f(x+\alpha)}{\alpha}$, $\frac{\Delta^2 f(x+\alpha)}{\alpha^2}$...., dans le cas de $\alpha=0$, ne différent pas de fx, $\frac{\Delta fx}{\alpha}$, $\frac{\Delta^2 fx}{\alpha^2}$...., les quantités $\frac{\Delta f(x+\alpha)}{\alpha}$, $\frac{\Delta^2 f(x+\alpha)}{\alpha^2}$, $\frac{\Delta^3 f(x+\alpha)}{\alpha^3}$.... se réduisent également aux coëfficiens différentiels ∂fx, $\partial^2 fx$, $\partial^3 fx$.... et $f(x+\alpha)$ se réduit à fx. Donc sous cette condition les équations (88.) se réduisent à

$$89.\quad \begin{cases} F(x+k) = Fx + kfx, \\ fx = \partial Fx + k\partial fx, \\ \partial fx = \frac{\partial^2 Fx}{2} + \frac{k\partial^2 fx}{2}, \\ \frac{\partial^2 fx}{2} = \frac{\partial^3 Fx}{2.3} + \frac{k\partial^3 fx}{2.3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{n-1} fx}{2.3....(n-1)} = \frac{\partial^n Fx}{2.3....n} + \frac{k\partial^n fx}{2.3....n}, \end{cases}$$

Substituant ces expressions, la seconde dans la première, la troisième dans le résultat etc. on aura

$$90.\quad \begin{cases} F(x+k) = Fx + k\partial Fx + k^2\partial fx, \\ F(x+k) = Fx + k\partial Fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 Fx + \frac{k^3}{2}\partial^2 fx, \\ F(x+k) = Fx + k\partial Fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 Fx + \frac{k^3}{2.3}\partial^3 Fx + \frac{k^4}{2.3}\partial^3 fx. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

et en général, si l'on restitue encore l'expression de fx (69.)

$$91.\quad F(x+k) = Fx + k\,\partial Fx + \frac{k^2}{2}\partial^2 Fx + \frac{k^3}{2.3}\partial^3 Fx \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{k^n}{2.3....n}\partial^n Fx + \frac{k^{n+1}}{2.3....n}\partial^n\left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right).$$

C'est, comme on voit, la série particulière de **Taylor.** L'expression du reste de la série, qui suit ses n premiers termes après celui Fx et que nous avons désigné plus haut par R_n, est ici

$$92.\quad R_n = \frac{k^{n+1}}{2.3....n}\partial^n\left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right)$$

où la notation ∂^n veut dire, que dans le quotient $\frac{F(x+k)-Fx}{k}$ on doit mettre $x+\alpha$ au lieu de x et $k-\alpha$ au lieu de k, puis retrancher du ré-

sultat le quotient primitif, faire $\alpha = 0$ dans la différence et répéter n fois cette opération.

III. Le développement que nous venons de faire de la série particulière de Taylor s'exécute, comme on voit, seulement à l'àide de transformations identiques. Il est donc exempt de toute incertitude, aussi bien que celui ci-dessus de la série générale de Taylor.

Mais en même tems il fait voir les conditions qui doivent être remplies si l'on veut que la série subsiste. Elles s'expriment par les équations suivantes:

$$93. \quad \left\{ \begin{array}{c} f(x+\alpha) = fx \\ \frac{\triangle f(x+\alpha)}{\alpha} = \frac{\triangle fx}{\alpha} \\ \frac{\triangle^2 f(x+\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\triangle^2 fx}{\alpha^2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\triangle^n f(x+\alpha)}{\alpha^n} = \frac{\triangle^n fx}{\alpha^n} \end{array} \right\} \text{pour } \alpha = 0.$$

Puisque $f(x+\alpha) - fx = \triangle fx$, $\triangle f(x+\alpha) - \triangle fx = \triangle^2 fx$, $\triangle^2 f(x+\alpha) - \triangle^2 fx = \triangle^3 fx$ etc., elles peuvent être aussi exprimées par

$$94. \quad \left\{ \begin{array}{c} \triangle fx = 0 \\ \frac{\triangle^2 fx}{\alpha} = 0 \\ \frac{\triangle^3 fx}{\alpha^2} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\triangle^n fx}{\alpha^{n-1}} = 0 \end{array} \right\} \text{pour } \alpha = 0.$$

ou bien, $\frac{\triangle fx}{\alpha}$ étant $= \partial fx$, $\frac{\triangle^2 fx}{\alpha^2} = \partial^2 fx$, $\frac{\triangle^3 fx}{\alpha^3} = \partial^3 fx$ etc. pour $\alpha = 0$, par

$$95. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha\, \partial fx = 0, \\ \alpha\, \partial^2 fx = 0, \\ \alpha\, \partial^3 fx = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha\, \partial^n fx = 0. \end{array} \right.$$

IV. Les équations (94. et 95.) donnent les conditions de l'existence de la série (91.) et elles les expriment par la quantité $fx = \frac{F(x+k)-Fx}{k}$. Mais on peut les réduire aussi à d'autres qui se rapportent à la fonction Fx elle même.

Les équations (76.), en partant de la seconde, donnent

$$96. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha fx & = & \triangle Fx + (k-\alpha)\triangle fx, \\ \triangle fx & = & \frac{\triangle^2 Fx}{2\alpha} + \frac{k-2\alpha}{2} \cdot \frac{\triangle^2 fx}{\alpha}, \\ \frac{\triangle^2 fx}{\alpha} & = & \frac{\triangle^3 Fx}{3\alpha^2} + \frac{k-3\alpha}{3} \cdot \frac{\triangle^3 fx}{\alpha^2}, \\ \frac{\triangle^3 fx}{\alpha^2} & = & \frac{\triangle^4 Fx}{4\alpha^3} + \frac{k-4\alpha}{4} \cdot \frac{\triangle^4 fx}{\alpha^3}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\triangle^{n-1} fx}{\alpha^{n-2}} & = & \frac{\triangle^n Fx}{n\alpha^{n-1}} + \frac{k-n\alpha}{n} \cdot \frac{\triangle^n fx}{\alpha^{n-1}}. \end{array} \right.$$

Supposons que les équations (94.) ont lieu. Dans ce cas la série (91.) aura lieu également, parceque les équations (94.) expriment les conditions de son existence. Substituant les équations (94.) dans celles (96.) et supposant encore

$$97. \quad \alpha fx = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = 0,$$

on aura

$$98. \quad \left\{ \begin{array}{l} \triangle Fx = 0 \\ \frac{\triangle^2 Fx}{\alpha} = 0 \\ \frac{\triangle^3 Fx}{\alpha^2} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\triangle^n Fx}{\alpha^{n-1}} = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } \alpha = 0.$$

ou bien, $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$ étant $= \partial fx$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2} = \partial^2 fx$, $\frac{\triangle^3 Fx}{\alpha^3} = \partial^3 fx$ . . . . pour $\alpha = 0$, en réunissant (97. et 98.)

$$99. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha fx = 0 \\ \alpha \partial Fx = 0 \\ \alpha \partial^2 Fx = 0 \\ \alpha \partial^3 Fx = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha \partial^n Fx = 0 \end{array} \right\} \text{ pour } \alpha = 0.$$

Si les équations (94.) n'avoient pas lieu, celles (97. et 98.), et par suite (99.) n'auroient pas lieu non plus, comme on le voit par les équations (96.). Donc les équations (99.) expriment les conditions de l'existence de la série (91.) et les équations de condition (95.) sont maintenant réduites à d'autres où entre la fonction Fx. Voyons ce qu'elles donnent pour les coëfficiens ∂Fx, $\partial^2 Fx$ etc.

V. La première des équations (99.) a toujours lieu, même si fx étoit $=\infty$; car puisque la quantité α n'entre pas dans $fx=\frac{F(x+k)-Fx}{k}$, on peut toujours la supposer telle, que αfx soit zéro, par ex. en supposant $\alpha=\frac{1}{(fx)^2}$, on a $\alpha fx=\frac{1}{fx}$ et $\alpha fx=0$, si $fx=\infty$. Mais les autres équations (99.) demandent que les coëfficiens différentiels ∂Fx, $\partial^2 Fx$ .... ne soient pas infiniment grands; car supposons $\partial Fx=\infty$ pour $\alpha=0$, cette quantité étant égale à $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$ on auroit $\frac{\triangle Fx}{\alpha}=\infty$ pour $\alpha=0$, donc $\triangle Fx$ pourroit avoir une valeur finie et ne seroit pas nécessairement zéro, résultat contraire à la première des conditions (98.). Supposons $\partial^2 Fx=\infty$ pour $\alpha=0$, cette quantité étant égale à $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$, on auroit $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}=\infty$ pour $\alpha=0$, donc $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha}$ le seroit également et non pas nécessairement zéro, résultat contraire à la seconde équation (98.) etc.

Les conditions (95.) ou bien (99.) se réduisent donc à ce que ∂Fx, $\partial^2 Fx$ etc. ne doivent pas être ∞. Donc la série particulière de Taylor (91.) ne subsiste que dans les cas où les coëfficiens différentiels ∂Fx, $\partial^2 Fx$, ... $\partial^n Fx$ sont des quantités finies. Elle n'auroit pas lieu si quelques-uns de ces coëfficiens ou un seul coëfficient étoient infinis.

VI. Il y a encore à remarquer que la série particulière de Taylor, si d'ailleurs les coëfficiens différentiels ∂Fx, $\partial^2 Fx$.... ne sont pas des quantités infinies, peut subsister, même dans les cas où k est infiniment grand. Car supposons la condition remplie que ∂Fx, $\partial^2 Fx$ .... sont des quantités finies, les équations (99.) et par suite celles (97. et 98.) auront lieu. Mais si $\alpha Fx=0$ et $\triangle Fx=0$ la première des équations (96.) donne $0=0+(k-\alpha)\triangle fx$, c'est-à-dire $\triangle fx=0$ pour une valeur quelconque de k, et à plus forte raison $\triangle fx=0$ si $k=\infty$. Puis, $\triangle fx$ et $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha}$

étant zéro, la seconde des équations (96.) donne $0 = 0 + \frac{k-2\alpha}{2} \cdot \frac{\Delta^2 fx}{\alpha}$, donc $\frac{\Delta^2 fx}{\alpha}$ est zéro pour une valeur quelconque de k et à plus forte raison $\frac{\Delta^2 fx}{\alpha} = 0$ si $k = \infty$ et ainsi de suite, de sorte que toutes les équations de condition (94.) seront satisfaites également. Donc la série (91.) peut subsister, même dans le cas où k est ∞.

On voit que les conditions que nous venons de trouver pour l'existence et la validité de la série particulière de Taylor doivent nécessairement être connues pour les applications de cette série. D'ailleurs la série n'est pas encore convergente si elle satisfait aux conditions (V.). Ces conditions ne se rapportent qu'à son existence.

19.

Ayant trouvé et démontré les séries que présente le développement d'une fonction quelconque en variant ses élémens, il s'agit maintenant de juger la convergence de ces séries dans les cas définis, c'est-à-dire de juger la valeur du reste de la série. Si cette valeur ne diminue pas en augmentant le nombre des termes et ne converge pas vers zéro, la série est sans but.

Si la valeur du reste de la série pouvoit être trouvée exactement, on pourroit juger immédiatement sa convergence en faisant $n = \infty$ dans l'expression du reste. Si cela donnoit zéro pour la valeur du reste, la série seroit convergente, et divergente dans le cas contraire. Mais il est évidemment impossible de trouver l'expression exacte et finie du reste, toutes les fois que la série est infinie: car si cela étoit possible, on auroit une expression finie de la fonction proposée et sa valeur cesseroit d'être exprimée approximativement par la série comme le demande l'hypothèse, mais par un nombre fini de termes.

Il faudra donc plutôt se contenter d'évaluer approximativement la valeur du reste, c'est-à-dire de trouver des limites dans lesquelles cette valeur doit être comprise.

On connoît les expressions des limites de la valeur du reste de la série particulière de Taylor. Mr. Lagrange les a données par la voie des intégrales définies. Mr. Ampère a simplifié et perfectionné la recherche de ces limites dans un mémoire inséré dans le 13me cahier du journal de l'école polytechnique, et a même étendu ses recherches aux

fonctions de plusieurs variables dans le 11me cahier du 17me tome des annales des mathématiques de Mr. Gergonne. Il ne nous reste donc ici qu'entre prendre la recherche des limites du reste de la série générale de Taylor. Ces limites peuvent être trouvées de la manière suivante.

20.

1. Soit $\varphi(x,k)$ une fonction quelconque des deux quantités x et k, variables toutes les deux, mais soumises à la condition, que si par ex. x varie de α, k varie en même tems de $-\alpha$. Supposons aussi que $\varphi(x,k)$ n'ait pas de valeurs imaginaires ni d'infinies, mais que toutes les valeurs de cette fonction, pour les valeurs différentes de ses élémens x et k, depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à 0, soient réelles et finies, de sorte que $\varphi(x,k)$, dans l'étendue indiquée des élémens, est une fonction continue.

Cela posé, faisons varier continuellement x de α et en même tems, suivant la condition ci-dessus, k de $-\alpha$, on aura en faisant usage du signe $\triangle$,

$$100.\quad \begin{cases} \varphi(x+\alpha,\ k-\alpha) - \varphi(x,k) = \triangle\varphi x, \\ \varphi(x+2\alpha, k-2\alpha) - \varphi(x+\alpha,\ k-\alpha) = \triangle\varphi(x+\alpha), \\ \varphi(x+3\alpha, k-3\alpha) - \varphi(x+2\alpha, k-2\alpha) = \triangle\varphi(x+2\alpha), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi(x+m\alpha, k-m\alpha) - \varphi(x+(m-1)\alpha, k-(m-1)\alpha) = \triangle\varphi(x+(m-1)\alpha). \end{cases}$$

La somme de ces équations est

$$101.\quad \varphi(x+m\alpha, k-m\alpha) - \varphi(x,k) = \triangle\varphi x + \triangle\varphi(x+\alpha) + \triangle\varphi(x+2\alpha) \ldots . \\ \ldots . + \triangle\varphi(x+(m-1)\alpha).$$

La quantité α étant arbitraire, on peut supposer $m\alpha = k$. Cela donne, en divisant par k,

$$102.\quad \frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{k} = \frac{\triangle\varphi x + \triangle\varphi(x+\alpha) + \triangle\varphi(x+2\alpha) \ldots . + \triangle\varphi(x+(m-1)\alpha)}{m\alpha}.$$

Supposons

$$103.\quad \triangle\varphi x + \triangle\varphi(x+\alpha) + \triangle\varphi(x+2\alpha) \ldots . + \triangle\varphi(x+(m-1)\alpha) = m\triangle\varphi(x+\mu\alpha),$$

l'expression (102.) se réduira à

$$104.\quad \frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{k} = \frac{\triangle\varphi(x+\mu\alpha)}{\alpha}.$$

Maintenant l'expression (103.) fait voir que les quantités $\triangle\varphi x$, $\triangle\varphi(x+\alpha)$,

$\triangle\varphi(x+2\alpha)$, ..., soit qu'elles aient toutes le même signe, soit que leurs signes soient différents, ne peuvent être, toutes en même tems, ni plus grandes ni plus petites que la quantité $\triangle\varphi(x+\mu\alpha)$, car si cela étoit, la somme des m quantités $\triangle\varphi x$, $\triangle\varphi(x+\alpha)$, ... seroit ou plus grande ou plus petite que m fois la quantité $\triangle\varphi(x+\mu\alpha)$ et non pas égale à ce multiple de $\triangle\varphi(x+\mu\alpha)$, comme le veut l'équation (103.). Donc, toutes les quantités $\triangle\varphi x$, $\triangle\varphi(x+\alpha)$, ... ne pouvant être égales entre elles, il y en aura nécessairement parmi elles quelques unes de plus grandes et d'autres plus petites que $\triangle\varphi(x+\mu\alpha)$. Donc la valeur de $\triangle\varphi(x+\mu\alpha)$ sera nécessairement comprise entre celle de la plus grande et celle de la plus petite des quantités $\triangle\varphi x$, $\triangle\varphi(x+\alpha)$, $\triangle\varphi(x+2\alpha)$, ... c'est-à-dire entre la plus grande et la plus petite valeur de $\triangle\varphi x$. Donc aussi $\frac{\triangle\varphi(x+\mu\alpha)}{\alpha}$ sera comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{\triangle\varphi x}{\alpha}$, et, $\frac{\triangle\varphi(x+\mu\alpha)}{\alpha}$ étant égal à $\frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{k}$, la valeur de cette dernière quantité sera comprise entre la plus grande et la plus petite valeur que $\frac{\triangle\varphi x}{\alpha}$ ou bien $\frac{\triangle\varphi(x,k)}{\alpha}$ puisse avoir pour les valeurs différentes de x et k, depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à zéro.

II. La quantité α étant arbitraire, on peut la supposer zéro. Dans ce cas la quantité $\frac{\triangle\varphi x}{\alpha}$ se reduit au coëfficient différentiel $\partial\varphi x$. Donc le théorème que nous venons de trouver fait voir, dans ce cas particulier, que la valeur de $\frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{\alpha}$ est toujours plus grande que la plus petite, et plus petite que la plus grande valeur du coëfficient différentiel $\partial\varphi x$, φx étant une fonction continue de x depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à 0. C'est le théorème de Mr. Ampère, qu'il a démontré à l'endroit cité.

21.

Nous allons maintenant appliquer le théorème général du paragraphe précédent à la série générale de Taylor (78.).

I. Mettons dans cette série $k+\alpha$ et $k-\alpha$ au lieu de x et k et déduisons du résultat la série primitive, nous aurons, en désignant le reste de la série suivant (80.) par R_n:

$$0 = F(x+\alpha) - Fx$$
$$+\frac{k-\alpha}{\alpha}\triangle F(x+\alpha) - \frac{k}{\alpha}\triangle Fx$$
$$+\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 F(x+\alpha) - \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\triangle Fx$$
$$+\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)(k-3\alpha)}{2.3\alpha^3}\triangle^3 F(x+\alpha) - \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\triangle^3 Fx$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n F(x+\alpha) - \frac{k(k-\alpha)\ldots k-(n-1)\alpha}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n Fx$$
$$+\triangle R_n$$

ou bien

$$0 = \triangle Fx$$
$$+\frac{k-\alpha}{\alpha}\triangle F(x+\alpha) - \frac{k-\alpha}{\alpha}\triangle Fx - \triangle Fx$$
$$+\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 F(x+\alpha) - \frac{(k-2\alpha)(k-\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 Fx - \frac{(k-\alpha)}{\alpha}\triangle^2 Fx$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^2 F(x+\alpha) - \frac{(k-n\alpha)(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^n Fx$$
$$-\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}\triangle^n Fx$$
$$+\triangle R_n,$$

c'est-à-dire

$$0 = \triangle Fx$$
$$+\frac{k-\alpha}{\alpha}\triangle^2 Fx - \triangle Fx$$
$$+\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^3 Fx - \frac{k-\alpha}{\alpha}\triangle^2 Fx$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^{n+1} Fx - \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-(n-1)\alpha)\triangle^n Fx}{2.3\ldots(n-1)\alpha^{n-1}}$$
$$+\triangle R_n.$$

Dans cette équation tous les termes à droite se détruisent, excepté $\triangle R_n$ et la première partie de l'avant dernière ligne; donc elle donne

$$0 = \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^{n+1} Fx + \triangle R_n,$$

ou bien

$$105. \qquad \triangle R_n = -\frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n}\triangle^{n+1} Fx.$$

Désignons, pour abréger, par T_0, T_1, T_2, ... les termes de la série (78.), de sorte que

$$106. \quad F(x+k) = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 \ldots + T_n + R_n,$$

on a

$$107. \quad T_{n+1} = \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n(n+1)\alpha^{n+1}} \triangle^{n+1} Fx$$

et

$$108. \quad \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^{n+1} Fx = \frac{(n+1)\alpha}{k} T_{n+1},$$

donc en vertu de (105.)

$$109. \quad \frac{\triangle R_n}{\alpha} = -\frac{n+1}{k} T_{n+1}.$$

II. Maintenant

$$110. \quad R_n = \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\alpha^n} \triangle^n \left(\frac{F(x+k)-Fx}{k}\right) \quad (80.)$$

est une fonction de x et k, et le signe $\triangle$ dans son expression veut dire, que x doit être varié de α, et k en même tems de $-\alpha$. $\triangle R_n$ sera une fonction semblable. Donc les quantités R_n et $\triangle R_n$ seront déjà comparables aux fonctions $\varphi(x,k)$ et $\triangle\varphi(x,k)$ (§. 20. I.) en ce qui regarde leur composition. Elles leur seront comparables en tous les points si la fonction R_n a la propriété de n'être ni infini ni imaginaire pour aucune valeur des élémens x et k depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à zéro. Considérons d'abord un nombre fini de termes de la série (78.). Si aucun de ces termes n'est ni infini ni imaginaire ponr aucune valeur des élémens x et k, c'est-à-dire si aucune des différences $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$ .... $\frac{\triangle^n Fx}{\alpha^n}$, et Fx lui même ne l'est pas, la somme des termes sera dans le même cas; et si encore $F(x+k)$ est réel et fini, le reste R_n sera nécessairement une quantité finie et réelle également. Donc si aucune des quantités Fx, $\frac{\triangle Fx}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fx}{\alpha^2}$, ... $\frac{\triangle^n Fx}{\alpha^n}$ dans la série (78.), n étant d'abord supposée un nombre fini, n'est ni infini ni imaginaire, le reste R_n de la série sera une fonction de x et k parfaitement semblable à la fonction $\varphi(x,k)$ (§. 20. I.) et l'on pourra supposer

$$111. \quad R_n = \varphi(x,k).$$

III. Remarquons d'abord qu'en écrivant dans l'expression du reste R_n, $x+k$ au lieu de x, et d'après la condition, 0 au lieu de k, la valeur du reste se réduira à zéro. En effet l'expression (78.) donne

$$112. \quad R_n = \varphi(x,k) = F(x+k) - Fx - \frac{k}{\alpha}\triangle Fx - \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 Fx \ldots .$$
$$\ldots . - \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots.n\alpha^n}\triangle^n Fx$$

et si dans cette équation on fait $x = x+k$ et $k=0$, elle donne

$$113. \quad R_n = \varphi(x+k,0) = F(x+k) - F(x+k) = 0,$$

les valeurs de toutes les quantités $\triangle Fx$, $\triangle^2 Fx$, ... $\triangle^n Fx$ étant supposées finies: donc en composant la quantité $\frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{k}$ pour la valeur actuelle R_n de $\varphi(x,k)$ on voit que cette quantité est $= -\frac{\varphi(x,k)}{k}$ $= -\frac{R_n}{k}$.

IV. Mais suivant le théorème (§. 20. I.) la valeur de la quantité $\frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{k}$ est toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{\triangle\varphi(x,k)}{\alpha}$; donc la quantité $\frac{\varphi(x+k,0)-\varphi(x,k)}{k}$ étant $-\frac{\varphi,k}{k}$ dans le cas actuel, le théorème nous apprend que la valeur de $-\frac{R_n}{k}$ est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{\triangle\varphi(x,k)}{\alpha} = \frac{\triangle R_n}{\alpha}$, ou bien $\frac{R_n}{k}$ entre la plus grande et la plus petite valeur de $-\frac{\triangle R_n}{\alpha}$.

V. Cette dernière quantité est égale à $\frac{n+1}{k}T_{n+1}$ (109.), donc la valeur de $\frac{R_n}{k}$ est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{n+1}{k}T_{n+1}$, ou, ce qui est la même chose, R_n l'est entre la plus grande et la plus petite valeur de $(n+1)T_{n+1}$; T_{n+1} étant le premier terme du reste R_n.

Donc nous venons de trouver le théorème suivant.

Si dans la série générale de Taylor (78.) les valeurs de toutes les quantités $F(x+k)$, Fx, $\triangle Fx$, $\triangle^2 Fx$, ... $\triangle^n Fx$ (n étant supposé

d'abord un nombre fini) sont réelles et finies pour toutes les valeurs des élémens x et k depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à zéro, la valeur du reste R_n de la série, qui suit le n^{me} terme après le premier, est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur que son premier terme T_{n+1} peut avoir pour les différentes valeurs des élémens x et k.

VI. Ce théorème suppose que le nombre des termes de la série qui précèdent son reste est fini. Mais on peut faire voir que, sous les conditions établies, le théorème a également lieu pour un nombre infini des termes.

Si les termes de la série vont en augmentant, elle est évidemment divergente et il n'est plus question du reste. Si les termes sont égaux entre eux, et de même signe, le théorème donne des limites infinies pour la valeur du reste, comme il le faut. Si les termes de la série sont de grandeur égale et de signes différents, la série n'exprime aucune quantité déterminée. Il ne reste donc que le cas où la valeur algébrique des termes de la série va en diminuant par termes ou par groupes de termes.

Si dans ce cas le théorème donne des limites finies pour la valeur du reste R_n qui suit un nombre fini de termes, cela fait voir que la valeur de la série dans toute son étendue est finie, car R_n exprime la somme de tous les termes de la série à l'infini, qui suivent le n^{me} après le premier. Donc aussi une partie quelconque de la série, à partir de son premier terme et allant même jusqu'à l'infini, aura une valeur finie, les termes ayant été supposés décroissants, ou par termes ou par groupes, et la partie ne pouvant être plus grande que le tout. La somme des termes qui précèdent le reste de la série aura donc toujours une valeur finie, même si l'on prend un nombre infini de termes. Mais la condition (II.) de l'exactitude du théorème veut que la somme des termes qui précèdent le reste soit finie; donc le théorème a également lieu pour la valeur du reste dans l'infini.

VII. Si la plus grande et la plus petite valeur du premier terme du reste dans l'infini, prises $(n+1)$ fois, sont zéro toutes les deux, le reste de la série, qui suivant le théorème (V.) est compris entre ces deux limites, le sera également. Donc la série sera convergente dans ce cas.

VIII. Puisque la série générale de Taylor (78.) se réduit à la série particulière du même nom (91.) quand on fait $\alpha = 0$ sous condition

qu'aucun coëfficient différentiel ni le reste ne soient infinis (§. 18. V.) et que cette condition s'accorde avec celle de l'exactitude du théorème des limites du reste de la série générale, qu'aucun de ses termes ne doive être infiniment grand: le théorème aura lieu également pour la série particulière de Taylor et

> la valeur du reste de cette série qui suit un nombre quelconque n de ses termes sera toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur du premier terme du reste, pris $(n+1)$ fois, sous condition qu'aucun coëfficient différentiel ne soit infini ni imaginaire et que la série aille en décroissant. Si ces limites de la valeur du reste sont zéro dans l'infini, la série sera convergente.

22.

Quant à la série générale de Taylor, il y a un cas particulier, où le théorème des limites de la valeur du reste trouvé ci-dessus, ou plutôt la série elle même, n'ont pas lieu si l'on prend à l'infini le reste et la série. C'est celui où toutes les différences $\triangle Fx$, $\triangle^2 Fx$, ... sont égales entre elles et à la fonction Fx, et alternativement positives et négatives. Nous verrons plus bas un exemple de ce cas en traitant des facultés analytiques.

Dans le cas d'exception la série (78.) donne

$$114. \quad F(x+k) = Fx\left(1-\frac{k}{\alpha}+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}-\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3.\alpha^3}\ldots.\right)+R_n.$$

Mais on a, comme on le verra plus bas dans le développement des puissances,

$$115. \quad 1-\frac{k}{\alpha}+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}-\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\ldots.\infty = (1-1)^{\frac{k}{\alpha}}.$$

et $(1-1)^{\frac{k}{\alpha}}$ est zéro toutes les fois que $\frac{k}{\alpha}>0$; donc l'équation (114.) se réduit à

$$116. \quad F(x+k) = R_n.$$

De sorte que l'évaluation du reste R_n de la série par ses termes cesse d'avoir lieu dans l'infini, puisque la série, si on la continue à l'infini, n'existe plus.

Si l'on vouloit appliquer le théorème des limites du reste R_n au cas actuel, en supposant $n=\infty$, on trouveroit pour limites du reste la plus

grande et la plus petite valeur que la quantité $\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\,\alpha^{n+1}}Fx$ peut avoir pour toutes les valeurs des élémens x et k depuis x jusqu'à $x+k$ et depuis k jusqu'à zéro. Mais la quantité $\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\,\alpha^{n+1}}$, comme on le verra plus bas, est zéro pour $n=\infty$ toutes les fois que $\frac{k}{\alpha}$ ou bien $k>0$; donc on trouveroit $R_n=0$ pour $n=\infty$ et la série (114.) donneroit

$$117.\quad F(x+k)=Fx\left(1-\frac{k}{\alpha}+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\ldots\ldots\right)=(1-1)^{\frac{k}{\alpha}}Fx=0,$$

ce qui est évidemment faux. Mais l'application du théorème des limites du reste de la série n'a pas lieu ici, puisque la série qui précède le reste est zéro pour une valeur quelconque de x, si k est >0, de sorte qu'aucun terme pui pouvait servir à l'évaluation du reste n'existe. On verra encore plus clairement la raison de cette exception dans la démonstration même du théorème des limites (§. 21.). En effet une des conditions de l'exactitude de ce théorème, comme le fait voir (§. 21. III.), est, que $\varphi(x+k,0)$ doit être zéro en supposant $R_n=\varphi(x,k)$. Cette condition cesse d'être satisfaite dans le cas actuel, car ici le reste R_n est la quantité $F(x+k)$ elle même, qui n'est pas zéro en y mettant $x+k$ au lieu de x et 0 au lieu de k, mais plutôt invariablement $F(x+k)$. La conclusion de (§. 21. III) que $\varphi(x+k,0)$ est nul puisque tous les termes qui précèdent le reste se détruisent en mettant 0 au lieu de k et $x+k$ au lieu de x excepté le premier terme qui donne $F(x+k)$, de sorte $F(x+k)=F(x+k)+R_n$ et $R_n=0$, n'a pas non plus lieu ici, puisque la série elle même qui précède le reste est zéro et cesse d'exister.

Il est vrai que la somme de la série (114.) qui précède le reste R_n n'est zéro qu'autant que $\frac{k}{\alpha}>0$ ou bien $k>0$ et non pas dans le cas où $k=0$ et $x=x+k$, qui est un de ceux qui se présentent dans l'évaluation des limites du reste. Dans ce cas on a $(1-1)^0=1$ et l'équation (114.) donne $F(x+k)=F(x+k)+R_n$. Mais cette dernière équation donne $R_n=0$. Donc le reste est nul dans ce cas, et cela s'accorde avec le théorème des limites; d'où l'on voit que ce théorème est loin d'être en défaut, même dans ce cas actuel. Il cesse seulement ici d'être généralement applicable.

La valeur du reste de la série est discontinue dans ce cas. En effet l'équation (114.) donne $R_n = F(x+k)$ pour une valeur quelconque de k plus grande que zéro, et $R_n = 0$ pour $k = 0$.

D'ailleurs il n'y a qu'un seul cas, celui de la nonexistence de la série, ou bien de son indépendance des élémens x et k, où le théorème des limites du reste ne soit pas applicable. Il l'est effectivement dans tout autre cas où les termes de la série qui précèdent le reste dépendent des élémens variables x et k.

L'exception de la règle n'a pas même lieu, si la série de développement n'est pas infinie mais plutôt finie; dans ce cas la somme des termes qui précèdent le reste n'est pas zéro, mais elle dépend de x et k; donc le théorème des limites y est applicable. Si l'on ne prend qu'une partie des termes de la série finie, le reste sera compris entre les limites du théorème. Ces limites se réduisent par elles mêmes à zéro à la fin de la série. L'exception, comme nous l'avons dit, n'a donc lieu que dans le seul cas où les différences $\triangle Fx$, $\triangle^2 Fx$, $\triangle^3 Fx$, ... ont des valeurs égales et des signes alternativement différents, et où la série est infinie. Dans ce cas le développement même de la série n'a pas lieu, et par cette raison le théorème des limites n'a lieu non plus ni pour un nombre infini ni pour un nombre fini des termes.

23.

Les limites de la valeur du reste de la série générale de Taylor trouvées (§. 21.) seront ordinairement assez éloignées l'une de l'autre, surtout à cause du coëfficient $n+1$ dans l'expression $(n+1)\,T_{n+1}$, lequel est infiniment grand pour $n = \infty$. Mais il existe des limites beaucoup plus resserrées qu'on trouve comme suit.

I. Nous avons vu plus haut que

$$118. \quad \triangle R_n + \frac{n+1}{k} T_{n+1} = 0 \quad (109.),$$

ou bien

$$119. \quad \triangle R_n + \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n\,\alpha^n} \triangle^{n+1} Fx = 0. \quad (105.)$$

Cela donne

$$120. \quad \triangle R_n + \frac{\alpha(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots n} \cdot \frac{\triangle^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}} = 0.$$

Soit M la plus petite et N la plus grande des valeuus que la quantité

$\frac{\triangle^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$ peut avoir pour les valeurs différentes de x depuis x jusqu'à $x+k$, de sorte que

$$121. \quad \frac{\triangle^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}} > M < N,$$

l'égalité étant la limite pour la valeur des signes $>$ et $<$ et y comprise, on aura en vertu de (120.)

$$122. \quad \triangle R_n + \frac{\alpha(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.n} M < 0$$

et

$$123. \quad \triangle R_n + \frac{\alpha(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.n} N > 0.$$

II. Mettons $k-\alpha$ au lieu de k dans l'expression $\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}$ et déduisons du résultat la quantité primitive, nous aurons

$$\triangle\left(\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}\right) = \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)(k-3\alpha)\ldots.(k-(n+1)\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} - \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}$$

$$= \frac{(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}(k-(n+1)\alpha-k)$$

donc

$$124. \quad -\triangle\left(\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}\right) = \frac{\alpha(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.n}.$$

La quantité à droite dans cette expression est égale au facteurs de M et N dans (122. et 123.); donc ces dernières expressions peuvent être représentées par

$$125. \quad \triangle R_n - M\triangle\left(\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}\right) < 0$$

et

$$126. \quad \triangle R_n - N\triangle\left(\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}\right) > 0,$$

ou bien, M et N étant des constantes sur lesquelles le signe $\triangle$ n'a point d'effet, par

$$127. \quad \triangle\left[R_n - M\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}\right] < 0$$

et

$$128. \quad \triangle\left[R_n - N\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}\right] > 0.$$

Dans ces expressions les quantités qui, sous le signe $\triangle$, suivent R_n ne sont autre chose que la plus petite et la plus grande valeur du premier terme

T_{n+1} du reste R_n; car ce terme est suivant (78.)

$$\textbf{129.}\quad T_{n+1} = \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} \cdot \frac{\triangle^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$$

et M et N en vertu de (121.) sont la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{\triangle^{n+1} Fx}{\alpha^{n+1}}$, donc

$$\textbf{130.}\quad M\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} \text{ est la plus petite valeur de } T_{n+1} \text{ et}$$

$$\textbf{131.}\quad N\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} \text{ est la plus grande valeur de } T_{n+1}.$$

III. Cela posé, si, dans la série (78.), les quantités $F(x+k)$ et Fx avec les $n+1$ premiers termes qui suivent Fx, n étant un nombre fini, ne sont ni imaginaires ni infinies, le reste R_n, comme il a été remarqué (§. 21. II.) ne sera également ni imaginaire ni infini; donc les quantités sous le signe $\triangle$ (127. et 128.) composées du reste R_n et de son premier terme T_{n+1} (130. et 131.) seront des fonctions de x et k ni imaginaires ni infinies pour aucune valeur de leurs élémens. Donc ces quantités seront parfaitement semblables à la fonction $\varphi(x,k)$ supposée (§. 20.) et on pourra faire

$$\textbf{132.}\quad R_n - M\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} = \varphi_1(x,k) \text{ et}$$

$$\textbf{133.}\quad R_n - N\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)} = \varphi_2(x,k).$$

IV. Donc, en vertu de ce qui a été démontré (§. 20.), la valeur de la quantité $\frac{\varphi_1(x+k,0)-\varphi_1(x,k)}{k}$ sera toujours comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{\triangle\varphi_1(x,k)}{\alpha}$, et la quantité $\frac{\varphi_2(x+k,0)-\varphi_2(x,k)}{k}$ entre la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{\triangle\varphi_2(x,k)}{\alpha}$.

Mais nous avons vu (§. 21. III.) que R_n, en y mettant $x+k$ au lieu de x et 0 au lieu de k, se réduit à zéro. Il en est de même des quantités $M\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}$ et $N\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}$, ces quantités ayant k pour facteur. Donc les quantités $\varphi_1(x,k)$ et $\varphi_2(x,k)$, (132. 133), en y mettant $x+k$ au lieu de x et 0 au lieu de k, se réduisent à zéro, et on a $\varphi_1(x+k,0)=0$ et $\varphi_2(x+k,0)=0$. Par là les

quantités $\frac{\varphi_1(x+k,0)-\varphi_1(x,k)}{k}$ et $\frac{\varphi_2(x+k,0)-\varphi_2(x,k)}{k}$ se réduisent à $-\frac{\varphi_1(x,k)}{k}$ et $-\frac{\varphi_2(x,k)}{k}$. Donc en vertu du théorème (§. 20.), que nous venons de citer, la quantité $-\frac{\varphi_1(x,k)}{k}$ sera comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{\triangle\varphi_1(x,k)}{\alpha}$ et la quantité $-\frac{\varphi_2(x,k)}{k}$ entre la plus petite et la plus grande valeur de $\frac{\triangle\varphi_2(x,k)}{\alpha}$ ou bien $-\frac{\alpha\varphi_2(x,k)}{k}$ sera comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de $\triangle\varphi_1(x,k)$ et $-\frac{\alpha\varphi_2(x,k)}{k}$ entre la plus petite et la plus grande valeur de $\triangle\varphi_2(x,k)$.

V. Mais les quantités $\triangle\varphi_1(x,k)$ et $\triangle\varphi_2(x,k)$, comme le font voir (132. et 133.), ne sont autre chose que celles (127. et 128.). Ces dernières quantités, comme le font voir les expressions (127. et 128.), ont la propriété de n'avoir, la première que des valeurs négatives, et la seconde que des valeurs positives. Donc aussi la plus petite et la plus grande valeur de $\triangle\varphi_1(x,k)$ seront négatives en même tems et la plus petite et la plus grande valeur de $\triangle\varphi_2(x,k)$ positives toutes les deux. En appliquant cette remarque au résultat (IV.) on en tire la conclusion que la quantité $-\frac{\alpha\varphi_1(x,k)}{k}$ sera toujours négative, c'est-à-dire <0 et la quantité $-\frac{\alpha\varphi_2(x,k)}{k}$ toujours positive, c'est-à-dire >0. Donc les quantités $\varphi_1(x,k)$ et $\varphi_2(x,k)$ auront nécessairement des signes différents, c'est-à-dire, si l'une est >0, l'autre sera <0.

Mais ces quantités, comme le font voir les expressions (132. 133.), ne sont autre chose que les différences entre le reste R_n et la plus petite et la plus grande valeur de son premier terme. Donc la valeur du reste est comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de son premier terme.

VI. On a supposé jusqu'ici que le nombre des termes qui précèdent le reste est fini (III.), mais en vertu des réflexions (§. 21. VI.) le résultat a lieu encore si même le nombre des termes est infini; donc on a le théorème suivant.

Si dans la série générale de Taylor (78.) les quantités $F(x+k)$ et Fx et tous les termes de la série qui suivent ne sont ni imaginaires ni infinis et vont en diminuant, la valeur du reste R_n qui suit les n

premiers termes après Fx est comprise entre les valeurs de son premier terme $\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.(n+1)}.\frac{\triangle^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}$ correspondantes à la plus grande et à la plus petite valeur que peut avoir la quantité $\frac{\triangle^{n+1}Fx}{\alpha^{n+1}}$ pour les différentes valeurs de x depuis x jusqu'à $x+k$.

On voit que si dans l'infini ces valeurs du premier terme du reste R_n sont zéro toutes les deux, le reste sera zéro également. Donc dans ce cas la série sera convergente. Si les deux valeurs du premier terme du reste dans l'infini ne sont pas nulles mais finies ou infinies et de même signe, la série sera divergente.

VII. Puisque la démonstration de notre théorème a lieu pour une valeur quelconque de x, et même pour $\alpha=0$, qui est le cas de la série particulière de Taylor sous la condition (§. 18. VI.), le théorème s'appliquera également à cette série et il s'énoncera dans ce cas comme suit:

Si dans la série particulière de Taylor (91.) les quantités $F(x+k)$ et Fx et tous les termes de la série qui suivent ne sont ni imaginaires ni infinis et vont en diminuant, la valeur du reste R_n qui suit les n premiers termes après Fx est comprise entre les valeurs de son premier terme $\frac{k^n}{2.3\ldots.(n+1)}\partial^{n+1}Fx$ qui correspondent à la plus grande et la plus petite valeur que peut avoir le coëfficient différentiel $\partial^{n+1}Fx$ pour les différentes valeurs de x depuis x jusqu'à $x+k$.

Si dans l'infini ces valeurs du premier terme du reste R_n sont zéro toutes les deux, le reste sera zéro également et la série sera convergente. Si les deux valeurs du premier terme du reste dans l'infini ne sont pas zéro mais finies ou infinies et de même signe, la série sera divergente.

Le théorème général que nous venons de démontrer donne, comme on voit, dans le cas de la série particulière de Taylor le théorème de Lagrange démontré plus simplement par Mr. Ampère à l'endroit cité.

IV. Application des formules générales de développement aux puissances.

24.

Le secours de formules générales de développement est nécessaire pour l'évaluation des valeurs des puissances dans les cas où la multiplication et l'addition ne suffisent pas seules à leur calcul immédiat suivant les formules fondamentales. Mais ce sont toujours les équations fondamentales d'où il faut partir, même en faisant usage des formules de développement.

Nous commencerons par une remarque préliminaire.

Supposons la puissance

134. $$w^y = z:$$

il y aura trois quantités u, y et z, dont chacune dépend des deux autres. Il y aura donc à calculer

135. $$\begin{cases} z \text{ par } u \text{ et } y, \\ y \text{ par } z \text{ et } u, \\ u \text{ par } y \text{ et } z, \end{cases}$$

et puisque chaque élément peut être varié isolément, l'autre étant regardé comme invariable, il y aura les six problèmes suivans:

136. $$\begin{cases} \text{1. et 2. calculer } z \text{ par } u \text{ et } y \text{ en variant } u \text{ et } y, \\ \text{3. et 4. calculer } y \text{ par } z \text{ et } u \text{ en variant } z \text{ et } u, \\ \text{5. et 6. calculer } u \text{ par } y \text{ et } z \text{ en variant } y \text{ et } z. \end{cases}$$

Mais ces six problèmes, comme on le verra, peuvent être réduits à un seul quant au développement, et les resultats des solutions des autres peuvent être trouvés par les équations fondamentales seules sans nouveau développement.

Il sera naturel de choisir pour faire le développement necessaire, le cas où l'effet de la variation de l'élément regardé comme variable devient évident par les équations fondamentales elles mêmes. C'est celui où l'exposant varie. Car la première équation fondamentale (3.) exprime immédiatement la variation d'une puissance produite par celle de l'exposant. En effet, en variant y de k dans u, on a immédiatement, en vertu de la première équation fondamentale, $u^{y+k} = u^y . u^k$. Donc nous partirons de ce cas là, le second des cas (136.).

25.

Supposons donc

$$137. \quad u^y = z = Fy$$

u **étant regardé comme invariable et** y **seul comme variable.**

La variation de y **étant** k**, la série générale de Taylor (78.) nous donne ici**

$$138. \quad F(y+k) = Fy + \frac{k}{\alpha}\triangle Fy + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\triangle^2 Fy + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)}{2.3\alpha^3}\triangle^3 Fy \ldots .$$
$$\ldots . + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots.n\alpha^n}\triangle^n Fy + \frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.n\alpha^n}\triangle^n\left(\frac{F(y+k)-Fy}{k}\right).$$

Le signe $\triangle$ **veut dire que dans la quantité devant laquelle il est placé, l'élément variable doit être varié de la quantité** α**, et qu'après, la quantité primitive doit être déduite du résultat. Donc on a ici** $\triangle Fy$ **c'est-à-dire** $F(y+\alpha)-Fy = u^{y+\alpha}-u^y$**. Mais en vertu de la première équation fondamentale des puissances (3.) on a** $u^{y+\alpha} = u^y . u^\alpha$**, donc** $\triangle Fy = u^y . u^\alpha - u^y$ **ou bien**

$$139. \quad \triangle Fy = u^y (u^\alpha - 1).$$

De là on trouve

$$140. \quad \begin{cases} \triangle^2 Fy = (u^{y+\alpha}-u^y)(u^\alpha-1) = u^y(u^\alpha-1)(u^\alpha-1) = u^y(u^\alpha-1)^2, \\ \triangle^3 Fy = (u^{y+\alpha}-u^y)(u^\alpha-1)^2 = u^y(u^\alpha-1)(u^\alpha-1)^2 = u^y(u^\alpha-1)^3, \\ \cdots\cdots\cdots\

143. $$(u^\alpha)^{\frac{\gamma}{\alpha}}(u^\alpha)^{\frac{k}{\alpha}} = (u^\alpha)^{\frac{\gamma}{\alpha}}\left[1+\frac{k}{\alpha}(u^\alpha-1)+\frac{1}{2}\frac{k}{\alpha}\left(\frac{k}{\alpha}-1\right)(u^\alpha-1)^2+\frac{1}{2.3}\frac{k}{\alpha}\left(\frac{k}{\alpha}-1\right)\left(\frac{k}{\alpha}-2\right)(u^\alpha-1)^3\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\frac{1}{2.3\ldots.n}\frac{k}{\alpha}\left(\frac{k}{\alpha}-1\right)\left(\frac{k}{\alpha}-2\right)\ldots.\left(\frac{k}{\alpha}-(n-1)\right)(u^\alpha-1)^n\right]$$
$$+\frac{1}{2.3\ldots.n}\frac{k}{\alpha}\left(\frac{k}{\alpha}-1\right)\left(\frac{k}{\alpha}-2\right)\ldots.\left(\frac{k}{\alpha}-n\right)\triangle^n\left(\frac{(u^\alpha)^{\frac{\gamma}{\alpha}}((u^\alpha)^{\frac{k}{\alpha}}-1)}{\frac{k}{\alpha}}\right)$$

et écrivons dans cette série u au lieu de u^α, y au lieu de $\frac{\gamma}{\alpha}$ et k au lieu de $\frac{k}{\alpha}$, nous aurons

144. $$u^\gamma . u^k = u^\gamma\left[1+k(u-1)+\frac{k(k-1)}{2}(u-1)^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}(u-1)^3\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-(n-1))}{2.3\ldots.n}(u-1)^n\right]+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-n)}{2.3\ldots.n}\triangle^n\left(\frac{u^\gamma(u^k-1)}{k}\right).$$

La transformation que nous venons de faire est évidemment praticable dans tous les cas où l'on donne une valeur finie à la quantité arbitraire α, mais elle ne l'est pas dans le seul cas où l'on veut que α soit zéro, car cette valeur de α donneroit dans (143.) $u^\alpha = 1$, $\frac{\gamma}{\alpha} = \infty$ et $\frac{k}{\alpha} = \infty$ de sorte que l'expression (143.) seroit indéfinie. Donc l'expression (144.) a lieu pour une valeur quelconque de α, excepté la seule valeur zéro. Donc aussi cette série est absolument aussi générale que celle (142.), excepté le seul cas $\alpha = 0$.

Si l'on fait $\gamma = 0$, on a, γ^0 étant $= 1$ (7.)

145. $$u^k = 1+k(u-1)+\frac{k(k-1)}{2}(u-1)^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}(u-1)^3\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-(n-1))}{2.3\ldots.n}(u-1)^n+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-n)}{2.3\ldots.n}\triangle^n\left(\frac{u^k-1}{k}\right)$$

et si l'on suppose

146. $$u = 1+x,$$

147. $$(1+x)^k = 1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}x^3\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-(n-1))}{2.3\ldots.n}x^n+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-n)}{2.3\ldots.n}\triangle\left(\frac{(1+x)^k-1}{k}\right)$$

ou bien encore, si pour abréger on veut se servir de la notation des coëfficiens (79.),

148. $$(1+x)^k = 1+k_1x+k_2x^2+k_3x^3....+k_nx^n+(n+1)k_{n+1}\triangle^n\left(\frac{(1+x)^k-1}{k}\right).$$

C'est là la formule connue du binôme, mais dans la plus grande généralité; car les quantités u et k, ou bien x et k, peuvent être tout ce qu'on voudra, réelles ou imaginaires, ou même infinies, le développement de la formule n'étant fondé que sur des transformations identiques qui ont lieu sans aucune condition. En même tems la formule (148.) présente l'expression du reste de la série.

Etant partis immédiatement des équations fondamentales et n'ayant fait que des transformations identiques, la formule du binôme a été trouvée seulement au moyen d'opérations purement élémentaires et d'un seul coup, sans passer successivement des cas particuliers aux cas généraux, comme à l'ordinaire, sans faire aucune supposition hypothétique, comme par. ex. celle de la forme de la série, et sans le secours de l'idée des infiniment-petits ou des limites etc.

Cela est important pour les élémens, et cette première application des formules générales, posées solidement, pourra déjà faire sentir l'effet de cette méthode générale qui est seule, à ce qu'il semble, propre à la nature de l'analyse. On sait combien d'artifices il faut pour le développement ordinaire de la formule du binôme, pour lui donner quelque généralité, et que néanmoins la démonstration n'en ne réussit pas rigoureusement dans tous les cas, par. ex. dans ceux des valeurs imaginaires de la base ou de l'exposant. La méthode générale fait évanouir toutes les difficultés, sans d'autres moyens que les plus élémentaires.

Si l'on n'aimoit pas à mettre les développemens généraux à la tête des élémens, comme cela devroit être effectivement, on pourroit aussi démontrer séparement, et avec une rigueur égale, la formule du binôme, en imitant le développement de la série générale de Taylor pour ce cas particulier. On peut voir cela dans le petit mémoire inseré dans le journal des mathématiques sous le No. 25. tome 4. cahier 3. page 305.

(La suite dans le cahier prochain.)

29.

Umformung einer Reihe von sehr allgemeiner Form.

(Von Herrn Prof. *C. Gudermann* in Cleve.)

Es ist von Euler (in seinen *Instit. calc. diff.*) eine Formel gegeben worden, wodurch sich in vielen Fällen Reihen summiren lassen. Wird nemlich

$$\varphi x = (a + \overset{1}{a} x + \overset{2}{a} x^2 + \overset{3}{a} x^3 + \text{etc.})$$

gesetzt, und ist φx eine bekannte Function von x, so läfst sich die Reihe

$$s = (ay + \overset{1}{a}\overset{1}{y} x + \overset{2}{a}\overset{2}{y} x^2 + \overset{3}{a}\overset{3}{y} x^3 \ldots + \overset{\alpha}{a}\overset{\alpha}{y} x^\alpha + \text{etc.})$$

umformen in

$$s = y.\varphi x + \Delta y.\frac{\partial \varphi x}{\partial x}.\frac{x}{1} + \Delta^2 y.\frac{\partial^2 \varphi x}{\partial^2 x}.\frac{x^2}{1.2} + \Delta^3 y.\frac{\partial^3 \varphi x}{\partial^3 x}.\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

und durch diesen Ausdruck wird die vorgelegte Reihe s summirt, wenn die Reihe $y, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y}$ etc., als eine Hauptreihe betrachtet, endlich zu einer Differenzreihe mit gleichen Gliedern führt; im entgegengesetzten Falle ist die zweite Reihe für s nur als eine Umformung der gegebenen Reihe für s anzusehen.

Es sei jetzt

$$\varphi x = a + \overset{1}{a} x + \overset{2}{a} x(x-\Delta x) + a x(x-\Delta x)(x-2\Delta x) \ldots .$$
$$\ldots . + \overset{\alpha}{a} x(x-\Delta x)(x-2\Delta x)\ldots .(x-\alpha\Delta x+\Delta x) + \text{etc.},$$

oder nach der in meiner Theorie der Potenzial-Functionen gebrauchten Bezeichnungsart:

$$\varphi x = S \overset{\alpha}{a} [x, \Delta x^{\alpha}]$$

und φx wieder eine bekannte Function von x, dann läfst sich die Reihe $s = S \overset{\alpha}{a}.\overset{\alpha}{y}.[x, \Delta x^{\alpha}]$ in eine andere umformen auf folgende Art.

Wenn wir die Differenz der $m$ten Ordnung von φx nehmen, so ist nach bekannten Regeln:

$$\Delta^m \varphi x = S[\alpha^{m}].\overset{\alpha}{a}[x, \Delta x^{\alpha-m}].\Delta x^m.$$

Wird sie mit $[x + m\Delta x, \Delta x^{m}]$ multiplicirt, und beachtet man, dafs $[x + m\Delta x, \Delta x^{m}][x, \Delta x^{\alpha-m}] = [x + m\Delta x, \Delta x^{\alpha}]$ ist, so findet man:

$$[x+m\Delta x, \Delta x]^{m}_{m} \cdot \frac{\Delta^m \varphi x}{\Delta x^m} = S\,[\alpha]^{m}_{m} \cdot a^{\alpha}\,[x+m\Delta x, \Delta x]^{\alpha},$$

oder auch:

$$[x, \Delta x]^{m}_{m} \cdot \frac{\Delta^m \varphi(x-m\Delta x)}{\Delta x^m} = S\,[\alpha]^{m}_{m} \cdot a^{\alpha}\,[x, \Delta x]^{\alpha}.$$

Wenn man noch auf beiden Seiten mit $\Delta^m y$ multiplicirt, darauf m als veränderlich ansieht, und etwa β für m setzt, so giebt die Summation:

$$S\,\Delta^\beta y \cdot [x, \Delta x]^{\beta}_{\beta} \cdot \frac{\Delta^\beta \varphi(x-\beta\Delta x)}{\Delta x^\beta} = S\,A^{\alpha} \cdot a^{\alpha}\,[x, \Delta x]^{\alpha}$$

und hierin ist allgemein $A^{n} = S\,[n]^{\beta} \cdot \Delta^\beta y$, oder einfacher $A^{n} = y^{n}$; daher haben wir:

$$S\,a^{\alpha} \cdot y^{\alpha}\,[x, \Delta x]^{\alpha} = S\,\Delta^\alpha y \cdot \frac{\Delta^\alpha \varphi(x-\alpha\Delta x)}{\Delta x^\alpha} \cdot [x, \Delta x]^{\alpha}_{\alpha} = s.$$

Setzen wir nun $\Delta x = 0$, so verwandelt sich die Facultät $[x, \Delta x]^{\alpha}$ in die Potenz x^α und das Differenzenverhältnifs $\frac{\Delta^\alpha \varphi(x-\alpha\Delta x)}{\Delta x^\alpha}$ in das Differenzialverhältnifs $\frac{\partial^\alpha \varphi x}{\partial x^\alpha}$; daher fällt unsere Formel in diesem besonderen Falle mit der von Euler gegebenen wieder zusammen.

Da die ausgedehnte Anwendbarkeit der allgemeinen Formel am Tage liegt, so ist es unnöthig, durch viele Beispiele die Wichtigkeit derselben auseinander zu setzen, und wir beschränken uns daher auf eines.

Man soll die Reihe

$$0^r \cdot 1 + 1^r \cdot \frac{x}{z} + 2^r \cdot \frac{x(x-1)}{z(z-1)} + 3^r \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{z(z-1)(z-2)} + 4^r \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{z(z-1)(z-2)(z-3)} + \text{etc.},$$

die wir bezeichnen: $s = S\left(\alpha^r \cdot \frac{[x]^{\alpha}}{[z]^{\alpha}}\right)$, summiren. Setzen wir zu dem Ende $\varphi x = S\frac{[x]^{\alpha}}{[z]^{\alpha}}$, so ist $\Delta x = 1$ und $a^{\alpha} = \frac{1}{[z]^{\alpha}}$; ferner $y^{\alpha} = \alpha^r$. Die Reihe für φx läfst sich aber bekanntlich summiren, und es ist

$$\varphi x = \frac{z+1}{z-x+1} = (z+1) \cdot [z-x]^{-1}.$$

Hieraus zieht man

$$\frac{\Delta^\alpha \varphi x}{\Delta x^\alpha} = (z+1) \cdot [z-x-\alpha]^{-(\alpha+1)} = \frac{z+1}{[z-x+1]^{\alpha+1}},$$

und wird die Reihe $(0^r, 1^r, 2^r, 3^r, \ldots)$ als eine Hauptreihe betrachtet,

so ist das Anfangsglied ihrer αten Differenzreihe oder $\Delta^\alpha y = \alpha' . {}^{-\alpha}f^{r-\alpha}$, und deswegen hat man:

$$s = S\,{}^{-\alpha}f^{r-\alpha} . \frac{(z+1).[x]^{\alpha}}{[z-x+1]^{\alpha+1}},$$

oder auch

$$s = S\,{}^{-\alpha}f^{\beta} . \frac{(z+1).[x]^{\alpha}}{[z-x+1]^{\alpha+1}} \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Der gefundene Ausdruck ist also ein geschlossener und würde aus $(r+1)$ Gliedern bestehen, wenn nicht das Glied für $\alpha = 0$ selbst Null wäre. Man hat auch noch

$$s = \frac{z+1}{z-x+1} \cdot \left(S\,{}^{-\alpha}f^{\beta} . \frac{[x]^{\alpha}}{[z-x]^{\alpha}} \right) \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Es bedarf kaum der Erinnerung, dafs die Summation nur dann gilt, wenn unter r eine positive ganze Zahl verstanden wird; x und z hingegen können willkürliche Zahlen sein. Da $[z-x]^{\alpha}[z-x-\alpha]^{\beta} = [z-x]^{r}$ ist, so hat man auch

$$s = \frac{z+1}{[z-x+1]^{r+1}} \left(S\,{}^{-\alpha}f^{\beta} . [x]^{\alpha}[z-x-\alpha]^{\beta} \right) \qquad \text{cond. } (\alpha+\beta=r).$$

Wenn $r = 0$ ist, so ist $\alpha = \beta = 0$; $[x]^{\alpha} = 1$, $[z-x-\alpha]^{\beta} = 1$, ${}^{-\alpha}f^{\beta} = 1$, und man kommt also dann zurück auf:

$$s = \frac{z+1}{z-x+1} = S\,\frac{[x]^{\alpha}}{[z]^{\alpha}}.$$

30.

Demonstrationes theorematum et solutiones problematum quorumdam a celeb. Hill Vol. 7. p. 102. hujus operis propositorum.

(Auct. *Th. Clausen. Mun.*)

---

3. Theor.

$$\int_0^{\pi} du\,(x^2+2ax\cos u+a^2)^{\frac{n}{2}}\cos\left\{ru-n\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{a\sin u}{x+a\cos u}\right)\right\}=\pi a^r x^{n-r}\frac{n.n-1....n-r+1}{1.2....r}$$

pro $r=$ numero integro positivo valet, existente $x>a$.

Quarto hujus operis volumine p. 281. formulis (1.) et (2.) hasce serierum infinitarum summas erui:

$$(1+2z\cos\varphi+z^2)^{\frac{m}{2}}\cos m\,.\,\operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi}=1+\frac{m}{1}z\cos\varphi+\frac{m\;m-1}{1.2}z^2\cos2\varphi+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}z^3\cos3\varphi+....$$

$$(1+2z\cos\varphi+z^2)^{\frac{m}{2}}\sin m\,.\,\operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi}=\frac{m}{1}z\sin\varphi+\frac{m.m-1}{1.2}z^2\sin2\varphi+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}z^3\sin3\varphi+....$$

unde statim sequitur:

$$(1+2z\cos\varphi+z^2)^{\frac{m}{2}}\cos\left(r\varphi-m\,.\,\operatorname{arc\,tg}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi}\right)=\cos r\varphi+\frac{m}{1}z\cos(r-1)\varphi+\frac{m\;m-1}{1.2}z^2\cos(r-2)\varphi+....$$

quae series in $d\varphi$ multiplicata, et a $\varphi=0$ usque ad $\varphi=\pi$ (semiperipheriam circuli) integrata, statim suppeditat:

$$\int_0^{\pi}(1+2z\cos\varphi+z^2)^{\frac{m}{2}}\cos\left(r\varphi-m\,.\,\operatorname{arc\,tang}\frac{z\sin\varphi}{1+z\cos\varphi}\right)d\varphi=\pi\frac{m\,.\,m-1....m-r+1}{1.2....r}z^r;$$

omnibus terminis praeter $(r+1)^{\text{tum}}$ evanescentibus, serieque desuper post quosdam terminos convergente. Quodsi itaque ponatur $z=\frac{a}{x}$; $\varphi=u$; $m=n$; theorema propositum sponte emergit.

10. Theor. $\int_0^{n\pi} x\,dx\log(\sin x)^2=-n^2\pi^2\log 2$ *), **designante n numerum integrum positivum vel negativum.**

---

*) In expositione theorematis signum — omissum est.

Habetur loco s. m.

$$-\log\sin x = \log 2 + \cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x + \tfrac{1}{3}\cos 6x + \ldots;$$

hinc sequitur

$$-\int dx \log\sin x = x\log 2 + \tfrac{1}{2}\left(\sin 2x + \frac{1}{2^2}\sin 4x + \frac{1}{3^2}\sin 6x + \ldots\right)$$

$$-\int dx \int dx \log\sin x = \tfrac{1}{2}x^2\log 2 - \tfrac{1}{4}\left(\cos 2x + \frac{1}{2^3}\cos 4x + \frac{1}{3^3}\cos 6x + \ldots\right);$$

inter limites vero praescriptos $k = 0$, $x = n\pi$, designante n numerum integrum

$$-\int_0^{n\pi} dx \log\sin x = n\pi\log 2$$

$$-\int_0^{n\pi} dx \int_0^{x} dx \log\sin x = \tfrac{1}{2}n^2\pi^2\log 2.$$

Cum vero sit:

$$\int 2x\,dx \log\sin x = 2x\int dx\log\sin x - 2\int dx\int dx\log\sin x,$$

sponte sua valor integralis definiti

$$\int_0^{n\pi} x\,dx\log(\sin x)^2 = -n^2\pi^2\log 2$$

demunat.

16. Probl. Data functione f, invenire functionem φ ex aequatione:

$$\frac{\varphi(fx)}{\varphi x} = \frac{df x}{dx}.$$

Ponatur fx e duobus constare partibus $\psi x + \psi' x$; quod si substituatur in aequationem datam

$$\frac{\varphi(\psi x + \psi' x)}{\varphi x} = \frac{d\psi x}{dx} + \frac{d\psi' x}{dx}$$

suppeditat; inde facile concluditur:

$$\varphi(\psi x + \psi' x) = \varphi(\psi x) + \varphi(\psi' x)$$

atque hinc generaliter:

$$\varphi(\psi x + \psi' x + \psi'' x + \ldots.) = \varphi(\psi x) + \varphi(\psi' x) + (\psi'' x) + \ldots.$$

Cum vero quaelibet functio generaliter loquendo, in seriem infinitam

$$a + bx + cx^2 + \ldots.$$

resolvi potest, nihil restat quam functionem φ pro valore $fx = x^m$ definire. Hoc valore in aequationem datam substisuto, prodit:

$$\frac{\varphi x^m}{\varphi x} = m x^{m-1}$$

cui aequationi per aequationem

$$\varphi x^m = x \frac{d x^m}{d x}$$

satisfit. Unde concludere possumus:

$$\varphi(fx) = x \frac{d fx}{d x}.$$

14. Probl. „Ex aequationibus linearibus:

1) $\frac{1}{2} c_2 = c_1 - c_{29}$;
2) $\frac{1}{2} c_4 = c_2 - c_{28}$;
3) $\frac{1}{2} c_6 = c_3 - c_{27}$;
4) $\frac{1}{2} c_8 = c_4 - c_{26}$;
5) $\frac{1}{2} c_{10} = c_5 - c_{25}$;
6) $\frac{1}{2} c_{12} = c_6 - c_{24}$;
7) $\frac{1}{2} c_{14} = c_7 - c_{23}$;
8) $\frac{1}{2} c_{16} = c_8 - c_{22}$;
9) $\frac{1}{2} c_{18} = c_9 - c_{21}$;
10) $\frac{1}{2} c_{20} = c_{10} - c_{20}$;
11) $\frac{1}{2} c_{22} = c_{11} - c_{19}$;
12) $\frac{1}{2} c_{24} = c_{12} - c_{18}$;
13) $\frac{1}{2} c_{26} = c_{13} - c_{17}$;
14) $\frac{1}{2} c_{28} = c_{14} - c_{16}$;
15) $\frac{1}{3} c_3 = c_1 - c_{19} + c_{21}$;
16) $\frac{1}{3} c_6 = c_2 - c_{18} + c_{22}$;
17) $\frac{1}{3} c_9 = c_3 - c_{17} + c_{23}$;
18) $\frac{1}{3} c_{12} = c_4 - c_{16} + c_{24}$;
19) $\frac{1}{3} c_{15} = c_5 - c_{15} + c_{25}$;
20) $\frac{1}{3} c_{18} = c_6 - c_{14} + c_{26}$;
21) $\frac{1}{3} c_{21} = c_7 - c_{13} + c_{27}$;
22) $\frac{1}{3} c_{24} = c_8 - c_{12} + c_{28}$;
23) $\frac{1}{3} c_{27} = c_9 - c_{11} + c_{29}$;
24) $\frac{1}{5} c_5 = c_1 - c_{11} + c_{13} - c_{23} + c_{25}$;
25) $\frac{1}{5} c_{10} = c_2 - c_{10} + c_{14} - c_{22} + c_{26}$;
26) $\frac{1}{5} c_{15} = c_3 - c_9 + c_{15} - c_{21} + c_{27}$;
27) $\frac{1}{5} c_{20} = c_4 - c_8 + c_{16} - c_{20} + c_{28}$;
28) $\frac{1}{5} c_{25} = c_5 - c_7 + c_{17} - c_{19} + c_{29}$;

quantitatum c tot. quot fieri potest per reliquas definire."

Facile derivatur ex aequationibus 15) et 23), quatuordecimque prioribus aequatio 16), similique modo e 17) et 21) aequatio 20). Porro e 6) et 12) concluditur

$$29)\quad c_{12} = \tfrac{2}{5}c_6 + \tfrac{4}{5}c_{18}; \quad c_{24} = \tfrac{4}{5}c_6 - \tfrac{1}{5}c_{18}$$

in quas aequationes si substituantur 16) et 20), inveniuntur ope quatuordecim prioribus aequationibus 18) et 22). Simili omnino modo 25) e 24) et 28), atque 27) e 25) derivatur. Aequatio 26) denique per 15), 17), 19), 21), 23) atque 24) et 26) obtinetur.

Aequationes igitur hae sub reliquis contentae sunt: 16), 18), 20), 22), 25), 26), 27). Restant ideo viginti et una aequationes, quae si diversae essent, saltem viginti et unam quantitatum c determinare liceret, octo ad libitum assumtis. Jam vero observo in aequationibus 15), 17), 19), 21), 23), 24), 28), quindecim tantummodo quantitatum c occurrere, eas scilicet, quae indici impari gaudent. Quodsi itaque octo harum quantitatum ad libitum assumantur, ita tamen ut nulla harum aequationum assumtioni repugnet; septem reliquae per septem aequationes modo nominatas determinari possunt, si modo nulla sub reliquis contenta est. Assumantur jam quantitates c_1, c_5, c_9, c_{13}, c_{17}, c_{21}, c_{25}, c_{29} tanquam cognitae; tunc per eliminationem prodit:

$$\begin{aligned}
c_3 &= -\tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{3}{5}c_5 + \tfrac{3}{2}c_9 - \tfrac{3}{2}c_{13} + \tfrac{3}{2}c_{17} - \tfrac{1}{2}c_{21} - \tfrac{6}{5}c_{25} + \tfrac{3}{2}c_{29};\\
c_7 &= -\tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{6}{5}c_5 + \tfrac{1}{2}c_9 - \tfrac{1}{2}c_{13} + \tfrac{3}{2}c_{17} - \tfrac{7}{6}c_{21} - \tfrac{3}{5}c_{25} + \tfrac{3}{2}c_{29};\\
c_{11} &= -\tfrac{1}{2}c_1 + \tfrac{2}{5}c_5 + \tfrac{7}{6}c_9 - \tfrac{1}{2}c_{13} + \tfrac{1}{2}c_{17} - \tfrac{1}{2}c_{21} - \tfrac{1}{5}c_{25} + \tfrac{3}{2}c_{29};\\
c_{15} &= \tfrac{3}{4}c_5 + \tfrac{3}{4}c_{25};\\
c_{19} &= \tfrac{3}{2}c_1 - \tfrac{1}{5}c_5 - \tfrac{1}{2}c_9 + \tfrac{1}{2}c_{13} - \tfrac{1}{2}c_{17} + \tfrac{7}{6}c_{21} + \tfrac{2}{5}c_{25} - \tfrac{1}{2}c_{29};\\
c_{23} &= \tfrac{3}{2}c_1 - \tfrac{3}{5}c_5 - \tfrac{7}{6}c_9 + \tfrac{3}{2}c_{13} - \tfrac{1}{2}c_{17} + \tfrac{1}{2}c_{21} + \tfrac{6}{5}c_{25} - \tfrac{3}{2}c_{29};\\
c_{27} &= \tfrac{3}{2}c_1 - \tfrac{6}{5}c_5 - \tfrac{1}{2}c_9 + \tfrac{3}{2}c_{13} - \tfrac{3}{2}c_{17} + \tfrac{3}{2}c_{21} + \tfrac{3}{5}c_{25} - \tfrac{3}{2}c_{29}.
\end{aligned}$$

Aequationes quatuordecim priores omnes quantitates c indice pari gaudentes suppeditant, simulac ceterae innotuere, scilicet nullo negotio c_2, c_6, c_{10}, c_{14}, c_{16}, c_{22}, c_{26}; deinde per aequationes 29) c_{12}, c_{24}; porro ex aequationibus 2), 4), 8), 14) invenitur:

$$c_4 = -\tfrac{2}{15}c_2 + \tfrac{4}{15}c_{14} + \tfrac{8}{15}c_{22} + \tfrac{16}{15}c_{26};$$

cujus ope c_4 atque deinde facile c_8, c_{16}, c_{20}, c_{28} determinantur. En hasce valores:

$$\begin{aligned}
c_2 &= 2c_1 - 2c_{29};\\
c_4 &= -4c_1 + \tfrac{8}{5}c_5 + \tfrac{8}{3}c_9 - \tfrac{8}{3}c_{21} - \tfrac{8}{5}c_{25} + 4c_{29};\\
c_6 &= -6c_1 + \tfrac{18}{5}c_5 + 4c_9 - 6c_{13} + 6c_{17} - 4c_{21} - \tfrac{18}{5}c_{25} + 6c_{29};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c_8 &= -8c_1 + \tfrac{16}{5}c_5 + \tfrac{16}{3}c_9 - 4c_{13} + 4c_{17} - \tfrac{16}{3}c_{21} - \tfrac{16}{5}c_{25} + 8c_{29};\\
c_{10} &= \qquad 2c_5 \qquad\qquad\qquad\qquad - 2c_{25} \qquad ;\\
c_{12} &= -\tfrac{12}{5}c_1 + \tfrac{36}{25}c_5 + \tfrac{16}{5}c_9 - \tfrac{12}{5}c_{13} + \tfrac{12}{5}c_{17} - \tfrac{16}{5}c_{21} - \tfrac{36}{25}c_{25} + \tfrac{12}{5}c_{29};\\
c_{14} &= -6c_1 + \tfrac{18}{5}c_5 + \tfrac{10}{3}c_9 - 4c_{13} + 4c_{17} - \tfrac{10}{3}c_{21} - \tfrac{18}{5}c_{25} + 6c_{29};\\
c_{16} &= -8c_1 + 4c_5 + 4c_9 - 4c_{13} + 4c_{17} - 4c_{21} - 4c_{25} + 8c_{29};\\
c_{18} &= \qquad\qquad 2c_9 \qquad\qquad - 2c_{21} \qquad\qquad ;\\
c_{20} &= \qquad \tfrac{4}{3}c_5 \qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{4}{3}c_{25} \qquad ;\\
c_{22} &= -4c_1 + \tfrac{6}{5}c_5 + \tfrac{10}{3}c_9 - 2c_{13} + 2c_{17} - \tfrac{10}{3}c_{21} - \tfrac{6}{5}c_{25} + 4c_{29};\\
c_{24} &= -\tfrac{24}{5}c_1 + \tfrac{72}{25}c_5 + \tfrac{12}{5}c_9 - \tfrac{24}{5}c_{13} + \tfrac{24}{5}c_{17} - \tfrac{12}{5}c_{21} - \tfrac{72}{25}c_{25} + \tfrac{24}{5}c_{29};\\
c_{26} &= \qquad\qquad\qquad 2c_{13} - 2c_{17} \qquad\qquad\qquad ;\\
c_{28} &= \quad 4c_1 - \tfrac{4}{5}c_5 - \tfrac{4}{3}c_9 \qquad\qquad + \tfrac{4}{3}c_{21} + \tfrac{4}{5}c_{25} - 4c_{29};
\end{aligned}
$$

Hoc itaque modo viginti et una quantitatum per reliquas octo determinatae sunt; cum vero non plures quam viginti et una aequationes diversae datae sunt, plures determinari nequeunt.

München, 15. April 1831.

31.

Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques.

(Par l'éditeur.)

(Suite du mémoire No. 28. du cahier précédent.)

26.

Il s'agit maintenant de la convergence de la série (142.). La recherche en est indispensable, car la série, si elle étoit divergente, ne seroit d'aucune utilité.

I. A la place de la série (142.), si pour le moment on veut laisser de côté le cas $\alpha = 0$, on peut mettre la série (144.) qui, y étant supposé zéro, donne la série du binôme, et qui, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, fait fonction de la série générale (142.) dans tous les cas, excepté le seul cas $\alpha = 0$.

Donc la recherche de la convergence de la série générale se réduit d'abord à celle de la convergence de la série (144.), le cas $\alpha = 0$ étant excepté.

II. Supposons réelles toutes les quantités qui entrent dans l'expression (144.). Dans ce cas le théorème de la convergence (§. 23. VI.) y sera applicable.

III. Suivant ce théorème la série sera convergente si ses termes ne sont pas infinis, s'ils vont en décroissant et si du premier terme de son reste R_n savoir du terme

$$149. \quad T_{n+1} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots(n+1)} u^y (u-1)^{n+1}$$

les valeurs qui correspondent à la plus grande et à la plus petite valeur que peut avoir la quantité

$$150. \quad \frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}} = u^y (u-1)^{n+1} \text{ (140.)}$$

pour les valeurs différentes de y depuis y jusqu'à $y+k$, sont zéro toutes les deux pour $n = \infty$.

IV. Mais le facteur u^y, puisqu'il est commun à tous les termes de la série (144.) à droite et à gauche, et puisque par cette raison il n'influe pas sur la convergence de la série, n'entre pas en calcul. Donc

la série (144.), le facteur u^y étant mis de côté, se réduit à celle du binôme proprement dite, savoir à

151. $$u^k = 1 + k(u-1) + \frac{k(k-1)}{2}(u-1)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}(u-1)^3 \ldots + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots.n}(u-1)^n + R_n$$

ou bien, $1+x$ étant mis à la place de u, à celle ci

152. $$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{2}x^3 \ldots + \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots.n}x^n + R_n$$

et dans tous les cas où cette série séra convergente, la série (144.) le sera également, et même la série générale (142.) le sera, le seul cas $\alpha = 0$ excepté pour cette dernière.

V. La quantité u^y étant effacée dans les expressions (149. et 150.), elles se réduisent à

153. $$T_{n+1} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots.(n+1)}(u-1)^n = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots.n}x^n \text{ et}$$

154. $$\frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}} = (u-1)^{n+1} = x^{n+1}.$$

Puisqu'ici la quantité y, qui est la seule variable, n'entre pas dans (154.), on voit que les conditions de la convergence de la série (151. ou bien 152.) se réduisent à ce que ses termes ne doivent pas être infinis, qu'ils doivent aller en décroissant et que T_{n+1} (153.) doit être zéro pour $n = \infty$.

VI. On voit qu'aucun des n premiers termes de la série (151.), ou de la série (152.), n étant fini, n'est infini, les quantités qui y entrent étant supposées finies. Donc la première des conditions de la convergence est remplie. Mais la seconde condition, que les termes doivent aller en décroissant, au moins vers l'infini, séra satisfaite d'elle même si le terme T_{n+1} est zéro pour $n = \infty$. Donc la recherche de la série (144.) se réduit en dernière analyse à celle de ce terme, et en vertu de ce qui a été dit plus haut, il n'y a qu'à voir si

155. $$T_{n+1} = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-n)}{2.3\ldots.(n+1)}x^{n+1} \quad (153.)$$

est zéro pour $n = \infty$, ou non.

VII. Il y a quatre cas. La quantité x peut être ou zéro, ou ± 1, ou > 1, ou entre 0 et 1. Les autres valeurs négatives de x rentrent dans celles-ci, parcequ'il ne s'agit point du signe du terme T_{n+1}.

Premier cas, $x = 0$.

VIII. Dans ce cas la formule (152.) donne $(1+0)^k = 1$ et il n'existe point de série.

Second cas, $x = \pm 1$.

IX. Si dans ce cas $k = -1$, l'expression (155.) donne

$$156. \quad T_{n+1} = \pm \frac{1.2.3....(n+1)}{1.2.3....(n+1)} = \pm 1$$

et on voit que T_{n+1} n'est pas zéro pour $n = \infty$. Donc la série (152.) qui exprime $(1 \pm 1)^{-1}$ est divergente.

X. Si $k < -1$, la valeur absolue de T_{n+1} (155.) est encore plus grande que 1. Donc la série (152.) en exprimant $(1 \pm 1)^{-k}$, k étant > 1, est encore divergente.

XI. Si $k > -1$, nous aurons la valeur de T_{n+1} pour $n = \infty$ en appliquant à l'expression de cette quantité (155.) cette autre en facultés (57.) savoir

$$157. \quad (u,+x)^y = \frac{(1,+1)^y y^{\frac{u}{x}-1}.x}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}}$$

qui a lieu pour $y = \infty$. En effet en mettant dans le numérateur de T_{n+1}, $u = k$, $x = -1$, $y = n+1$ et dans le dénominateur $u = 1$, $y = n+1$, $k = 1$, on a

$$T_{n+1} = \pm \frac{(1,+1)^{n+1}.(n+1)^{-k-1}}{(1,+1)^{-k-1}.(n+1)^{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$158. \quad T_{n+1} = \frac{1}{(1,+1)^{-k-1}(n+1)^{k+1}}$$

et cela donne $T_{n+1} = 0$ pour $n = \infty$, k étant supposé > -1 ou bien $k+1 > 0$.

D'après cela la série (152.) seroit toujours convergente si $x = \pm 1$ et $k > -1$; mais il y a ici à excepter le cas de $(1-1)^k$, si k est > -1 et < 0. Car dans ce cas l'autre condition de la convergence de la série, qu'aucun terme ne doit être infini, n'est pas satisfaite, puisque dans ce cas $(1-1)^k$ est infini lui même. Donc l'expression de $(1-1)^k$ par la série (152.) n'est convergente que dans le cas où $k > 0$; celle de $(1-1)^k$ l'est toujours, k étant > -1.

XII. Il y a encore les cas $k = 0$. Dans ce cas la série (152.) donne $(1+x)^k = 1$. Donc on a $(1 \pm 1)^0 = 1$.

Troisieme cas, $x > 1$.

XIII. Supposons $x = 1 + z$, on a en vertu de (152.)

159. $x^{n+1}=(1+z)^{n+1}=1+(n+1)z+\frac{(n+1)n}{2}z^2+\frac{(n+1)n(n-1)}{2.3}z^3\ldots\ldots\frac{(n+1)n(n-1)\ldots.1}{2.3\ldots.(n+1)}z^{n+1}.$

Cette série, n étant un nombre entier, finit par le terme $\frac{(n+1)n(n-1)\ldots.1}{2.3\ldots.(n+1)}z^n$, car les coëfficiens de tous les termes suivants ont $n-n=0$ pour facteur et sont zéro par cette raison, de sorte que la série donne la valeur complète de $(1+z)^{n+1}=x^{n+1}$. Mais tous les termes de la série (159.) sont positifs, z ayant été supposé positif; donc la somme de la série est plus grande que chacun de ses termes. Elle est donc par ex. plus grande que le terme

160. $$\frac{(n+1)n(n-1)\ldots.(n-(m-1))}{2.3\ldots.m}z^m.$$

Mais ce terme, m étant supposé un nombre fini, est évidement ∞, si l'on suppose $n=\infty$. Donc le second facteur de T_{n+1} savoir $(1+z)^{n+1}$, ou bien x^{n+1}, est une quantite infinie si $x>1$ et $n=\infty$.

XIV. Cela posé, soit en premier lieu $k=-1$ ou $k<-1$, nous avons vu (IX. et X.) que dans ce cas le premier facteur $\frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-n)}{2.3\ldots.(n+1)}$ de T_{n+1} (155.) n'est pas nul; donc T_{n+1} dans le cas actuel n'est pas zéro pour $n=\infty$, mais au contraire infini. Donc la série (152.) est divergente si $x>1$ et $k=$ ou <-1.

XV. Soit en second lieu $k>-1$.

En appliquant à l'expression de T_{n+1} (155.) celle (157.) on a

161. $$T_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(1,+1)^{-k-1}(n+1)^{k+1}},$$

comme le fait voir (158.). Mais x^{n+1} ou bien $(1+z)^{n+1}$, comme on l'a vu ci-dessus (XIII.) est plus grand que $\frac{(n+1)n(n-1)\ldots.(n-(m-1))}{2.3\ldots.m}z^m$ (160.), donc

162. $$T_{n+1}>\frac{z^m}{2.3\ldots.m\,(1,+1)^{-k-1}}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)\ldots.(n-(m-1))}{(n+1)^{k+1}}.$$

Ici le nombre m est fini. Mais il peut être supposé toujours plus grand que $k+1$ et les facteurs $n+1, n, n-1, \ldots. n-(m-1)$ peuvent être jugés égaux entre eux si $n=\infty$. Donc on a $T_{n+1}>0$ et même ∞ pour $n=\infty$.

Donc la série (152.) x étant >1, est divergente dans le cas $k>-1$. Donc elle est toujours divergente si $x>1$.

XVI. Il faut cependant excepter le cas $k=0$. Dans ce cas on a toujours $(1+x)^0=1$.

Quatrième cas, $x<1$ et >0.

XVII. On peut supposer dans ce cas $x=\frac{1}{1+z}$, de sorte que $x^{n+1}=\frac{1}{(1+z)^{n+1}}$ où z est positif. Puisque $(1+z)^{n+1}$ est infini pour $n=\infty$ (XIII.), le facteur x^{n+1} de (155.) sera zéro dans le cas actuel pour $n=\infty$.

XVIII. Soit en premier lieu $k>-1$, l'autre facteur $\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n)}{2.3\ldots(n+1)}$ de (155.), comme nous l'avons vu ci-dessus (XI.), est également zéro pour $n=\infty$, donc T_{n+1} est zéro si $k>-1$, et la série (152.) est convergente dans ce cas.

XIX. Dans le cas $k=0$ on a toujours $(1+x)^0=1$.

XX. Soit en second lieu $k=-1$ ou <-1. Supposons $k=-1-\varepsilon$, ε étant positif et au moins zéro. Substituant $x=1+z$ et $k=-1-\varepsilon$ dans (155.) on a

163. $$T_n=\pm\frac{1+\varepsilon}{1+z}\cdot\frac{2+\varepsilon}{2+2z}\cdot\frac{3+\varepsilon}{3+3z}\cdots\frac{m+\varepsilon}{m+mz}\cdot\frac{m+1+\varepsilon}{m+1+(m+1)z}\cdots$$

Ici le facteur $\frac{m+\varepsilon}{m+mz}$, m étant assez considérable, sera <1 quels que soient ε et z, puisque mz pourra toujours surpasser ε. Les facteurs qui suivent $\frac{m+\varepsilon}{m+mz}$ seront encore plus petits et iront toujours en diminuant. Mais d'après la remarque (XIII.) un produit d'un nombre infini de facteurs, chacun moindre que l'unité, est déjà zéro. Donc le produit (163.) où les facteurs sont <1 et vont en diminuant le sera à plus forte raison, si $n=\infty$. Donc T_{n+1} sera également zéro dans le cas actuel et la série (152.) sera convergente.

Elle sera donc toujours convergente dans le quatrième cas.

XXI. En nous résumant, nous pourrons énoncer comme suit ce que nous venons de trouver sur la convergence de la série du binôme

164. $$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}x^3\ldots.+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots.n}x^n+R_n.$$

Cette série, x étant réel, est convergente pour une valeur finie et réelle quelconque de l'exposant k si $x>-1$ et $<+1$. Si $x=-1$ elle est convergente si $k>0$, et si $x=+1$, elle l'est si $k>-1$. Si $k=0$, on a $(1+x)^k=1$ pour une valeur quelconque de x. La série est divergente pour toute autre valeur réelle de x et k.

XXII. La recherche de la convergence de la série du binôme présentée dans le paragraphe présent est celle qui a été annoncée dans le petit mémoire cité au commencement de la note préliminaire du mémoire présent, car, comme on l'a vu, nous avons opéré immédiatement sur l'expression générale du reste de la série. Cette recherche est celle qui étoit destinée à être exclusivement l'objet de ce mémoire et qui l'à occasionné.

On peut voir d'ailleurs par la recherche du paragraphe présent et par celle du mémoire cité, combien la théorie ordinaire du binôme, quoique objet très élémentaire et traité souvent, est incomplète. Même on trouve presenté le théorème du binôme sans la moindre notice sur la convergence de la série qui elle même n'est pas démontrée rigoureusement pour une valeur quelconque de l'exposant, et pourtant la série n'est bonne à rien dans les cas où elle n'est pas convergente.

27.

Nous avons vu (§. 25.) que la série (144.) embrasse de l'expression générale d'une puissance développée en série (142.) tous les cas que présentent les différentes valeurs de la quantité arbitraire α, excepté le seul cas $\alpha = 0$. Mais, comme il est aisé de voir, on tire également la série (144.) de celle (142.) en supposant $\alpha = 1$. Donc tous les cas de l'expression (142.) auxquels donnent lieu les différentes valeurs de α, peuvent être envisagés comme réduits à deux seulement, savoir au cas $\alpha = 1$ et au cas $\alpha = 0$. Le premier embrasse tous les cas correspondants aux différentes valeurs finies quelconques de α. Le second cas subsiste isolément. Nous avons fait dans le paragraphe précédent la recherche de la convergence de la série générale (142.) dans le premier cas, où elle se réduit à la série (144.) et donne la formule du binôme. Il nous reste donc à faire cette recherche pour le cas $\alpha = 0$. Dans ce cas la série générale (142.) nous donnera les quantités dites exponentielles et les logarithmes. Nous commencerons par le développement même d'une puissance en série, sous condition que la quantité arbitraire α du développement général des fonctions doit être supposée zéro.

I. Comme la série particulière de Taylor (91.) est consacrée essentiellement au cas où dans la série générale de Taylor (78.) la quantité α est zéro, nous partirons de cette série particulière. En effet,

dans le développement général de la série (91.) on a eu déjà égard aux conditions particulières de son existence; et si, dans un cas d'application, au lieu de partir de la série particulière de Taylor (91.) on vouloit partir de la série générale (78.), il faudroit qu'on répétât dans le développement particulier ce qu'on a fait dans le developpement général. Or par cette raison il vaut mieux de se servir de la série particulière (78.) dans les cas semblables au cas actuel. Cette série, quoique n'étant qu'un cas particulier de la série générale (78.), est particulièrement propre aux cas où dans la série générale (78.) la quantité arbitraire α doit être supposée zéro.

II. Dans la série particulière de Taylor (91.) les quantités $\frac{\triangle Fy}{\alpha}$, $\frac{\triangle^2 Fy}{\alpha^2}$, $\frac{\triangle^3 Fy}{\alpha^3}$, ... de la série générale se réduisent aux coëfficients différentiels ∂Fy, $\partial^2 Fy$, $\partial^3 Fy$, ...

Dans le cas actuel d'une puissance u^y, on a

$$\frac{\triangle Fy}{\alpha} = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right),\quad \frac{\triangle^2 Fy}{\alpha^2} = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^2,\quad \frac{\triangle^3 Fy}{\alpha^3} = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^3,\ \ldots. \quad (139.\ 140.)$$

donc on a ici:

165.
$$\left\{\begin{array}{l} \partial Fy = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right) \\ \partial^2 Fy = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^2 \\ \partial^3 Fy = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \partial^n Fy = u^y\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^n \end{array}\right\}$$ α étant supposé partout égal à zéro.

Ces expressions de ∂Fy, $\partial^2 Fy$, ... étant substituées dans la série particulière de Taylor (91.) elle nous donnera dans le cas actuel des puissances:

166.
$$u^{y+k} = u^y + k\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)u^y + \frac{k^2}{2}\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^2 u^y + \frac{k^3}{2.3}\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^3 u^y \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{k^n}{2.3\ldots.n}\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^n u^y + \frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.n}\,\partial^n\left(\frac{u^y(u^k - 1)}{k}\right)$$

α étant supposé zéro. Cette série, suivant les conditions de l'existence de la série particulière de Taylor (91.) aura lieu, si aucun des coëfficients différentiels ∂Fy, $\partial^2 Fy$, ... (165.) n'est infini.

III. Dans l'expression du coëfficient différentiel

$$167. \quad \partial^n Fy = u^y \left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^n$$

qui répresente tous les autres, le facteur u^y n'est pas infini si les quantités u et y ne le sont pas. Il ne s'agit donc que de la valeur de l'autre facteur $\left(\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}\right)^n$ pour $\alpha = 0$ et $n = \infty$.

IV. En vertu de (147.) on a

$$168. \quad (1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}x^3 \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots n}x^n \ldots \infty.$$

De là on tire, k étant facteur commun de tous les termes à droite depuis celui kx jusqu'à l'infini

$$169. \quad \frac{(1+x)^k - 1}{k} = x + \frac{k-1}{2}x^2 + \frac{(k-1)(k-2)}{2.3}x^3 + \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{2.3.4}x^4 \ldots$$
$$\ldots + \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-(n-1))}{2.3\ldots n}x^n \ldots \infty.$$

et en faisant $k = 0$,

$$170. \quad \frac{(1+x)^0 - 1}{0} = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 \ldots \pm \frac{1}{n}x^n \ldots \infty.$$

Cette équation peut être présentée sous les deux formes suivantes

$$171. \quad \frac{(1+x)^0 - 1}{0} = \frac{x}{2}(2-x) + \frac{x^3}{3.4}(4-3x) + \frac{x^5}{5.6}(6-5x) \ldots + \frac{x^n}{n(n+1)}(n+1-nx) \ldots \infty \text{ et}$$

$$172. \quad \frac{(1+x)^0 - 1}{0} = x - \frac{x^2}{2.3}(3-2x) - \frac{x^4}{4.5}(5-4x) - \frac{x^6}{6.7}(7-6x) \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)n}(n-(n-1)x) \ldots \infty.$$

Si dans ces expressions x est réel et >0 et <1 tous les termes à droite dans la première expression seront positifs et tous les termes à droite de la seconde, excepté le premier terme x, seront négatifs. Donc la valeur de $\frac{(1+x)^0 - 1}{0}$ sera necessairement >0 et $<x$, c'est-à-dire >0 et <1, x étant supposé <1. Donc, u étant mis au lieu de $1+x$, on trouve que la valeur de $\frac{u^0 - 1}{0}$ est >0 et <1, si u est >1 et <2.

Mais la n^{me} puissance d'une quantité comprise entre 0 et 1, et qui pour cela peut être représentée par $\frac{1}{1+z}$, où z est >0, est, suivant ce qui a été demontré (§. 26. XIII. et XVI.) $= 0$ pour $n = \infty$. Donc on a ici

$$173. \quad \left(\frac{u^0 - 1}{0}\right)^n = 0 \text{ pour } n = \infty, \; u \text{ étant } > 1 \text{ et } < 2.$$

V. Nous venons donc de trouver que des deux facteurs u^y et $\left(\frac{u^\alpha-1}{\alpha}\right)^n$ du coëfficient différentiel $\partial^n Fy$ **(167.)** le premier u^y n'est pas infini et l'autre $\left(\frac{u^\alpha-1}{\alpha}\right)^n$, u étant >1 et <2, ne l'est pas non plus pour $\alpha=0$ et pour aucune valeur de n, mais au contraire qu'il est zéro pour $n=\infty$. Donc les conditions de l'existence de la série **(166.)** seront satisfaites et la série aura lieu d'abord pour toutes le valeurs de u entre 1 et 2 et pour une valeur quelconque de k.

VI. Mais on peut faire voir que la série **(166.)** aura lieu également pour une valeur quelconque réelle et positive de u. En effet la série (166.) ayant lieu pour une valeur quelconque de k, on peut écrire mk au lieu de k et my au lieu de y où m est tout ce qu'on voudra. La série subsistera encore et on aura

$$174.\quad u^{my+mk}=u^{my}+mk\left(\frac{u^0-1}{0}\right)u^{my}+\frac{m^2k^2}{2}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^2u^{my}\ldots.$$
$$\frac{m^nk^n}{2.3\ldots.n}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^n u^{my}+\frac{m^{n+1}k^{n+1}}{2.3\ldots.n}\partial^n\left(\frac{u^{my}(u^{mk}-1)}{mk}\right),$$

u étant toujours entre 1 et 2. Cela posé, mettons également mk au lieu de k dans la série **(145.)** qui a lieu sans aucune condition, elle nous donnera, u^{mk} étant $=(u^m)^k$

$$175.\quad (u^m)^k=1+mk(u-1)+\frac{mk(mk-1)}{2}(u-1)^2\ldots.+\frac{mk(mk-1)(mk-2)\ldots.(mk-(n-1))}{2.3\ldots.n}(u-1)^n\ldots.$$

De là on tire

$$\frac{(u^m)^k-1}{k}=m\left[(u-1)+\frac{mk-1}{2}(u-1)^2+\frac{(mk-1)(mk-2)}{2.3}(u-1)^3\ldots.+\frac{(mk-1)(mk-2)\ldots.(mk-(n-1))}{2.3\ldots.n}(u-1)^n\ldots.\right],$$

et si l'on fait $k=0$,

$$176.\quad \frac{(u^m)^0-1}{0}=m\left[(u-1)-\tfrac{1}{2}(u-1)^2+\tfrac{1}{3}(u-1)^3\ldots.\pm\frac{1}{n}(u-1)^n\ldots.\right].$$

Mais la série **(145.)** elle même donne

$$\frac{u^k-1}{k}=(u-1)+\frac{k-1}{2}(u-1)^2+\frac{(k-1)(k-2)}{2.3}(u-1)^3\ldots.+\frac{(k-1)(k-2)\ldots.(k-(n-1))}{2.3\ldots.n}(u-1)^n\ldots.$$

et pour $k=0$

$$177.\quad \frac{u^0-1}{0}=(u-1)-\tfrac{1}{2}(u-1)^2+\tfrac{1}{3}(u-1)^3\ldots.\pm\frac{1}{n}(u-1)^n\ldots.$$

donc on a en vertu des deux expressions (176. et 177.)

$$178. \quad \frac{(u^m)^0-1}{0} = m \cdot \frac{u^0-1}{0}.$$

On pourra donc mettre dans la série (174.), qui a lieu indubitablement, $\frac{(u^m)^0-1}{0}$ au lieu de $m \cdot \frac{u^0-1}{0}$, et cela donne

$$179. \quad u^{my+mk} = u^{my} + k\frac{(u^m)^0-1}{0}u^{my} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{(u^m)^0-1}{0}\right)^2 u^{my} \ldots + \frac{k^n}{2.3\ldots.n}\left(\frac{(u^m)^0-1}{0}\right)^n u^{my} \ldots.$$

Mais u étant >1 et <2 et m arbitraire, la puissance u^m peut avoir toute valeur réelle et positive qu'on voudra; donc en écrivant simplement u au lieu de u^m dans (179.), on aura

$$180. \quad u^{y+k} = u^y + k\left(\frac{u^0-1}{0}\right)u^y + \frac{k^2}{2}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^2 u^y \ldots. + \frac{k^n}{2.3\ldots.n}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^n u^y \ldots..$$

où maintenant u a une valeur quelconque réelle et positive. Donc la série (166.) a lieu pour une valeur quelconque réelle et positive de u, pour une valeur quelconque réelle de y et pour une valeur quelconque réelle ou imaginaire de k.

28.

Ayant trouvé les conditions de l'existence de la série (166. ou 180.) il s'agit maintenant de sa convergence.

I. Si l'on veut supposer réelles toutes les quantités qui entrent dans la serie, le théorème de la convergence (§. 23. VI.) y sera applicable.

II. Suivant ce théorème la série sera convergente si ses termes ne sont pas infinis, s'ils vont en décroissant et si du premier terme de son reste R_n savoir du terme

$$181. \quad T_{n+1} = \frac{k^{n+1}}{2.3\ldots.(n+1)}u^y\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^{n+1}$$

les valeurs qui correspondent à la plus grande et à la plus petite valeur que peut avoir la quantité

$$182. \quad \partial^n Fy = u^y\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^{n+1}$$

pour les valeurs différentes de y depuis y jusqu'à $y+k$ sont zéro toutes les deux pour $n=\infty$.

III. Mais le facteur u^y, puisqu'il est commun à tous les termes de la série (180.) à droite et à gauche, et puisque par cette raison il n'influe pas sur la convergence de la série, n'entre pas en calcul. Donc la série (180.), le facteur u^y ayant été supprimé, se réduit à

$$183. \quad u^k = 1 + k\left(\frac{u^0-1}{0}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^2 \ldots + \frac{k^n}{2.3\ldots.n}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^n \ldots$$

et dans tous les cas où cette série est convergente, la série (180.) le sera également.

IV. La quantité u^y étant effacée dans les expressions (181. et 182.) elles se réduisent à

$$184. \quad T_{n+1} = \frac{k^{n+2}}{2.3\ldots.(n+1)}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^{n+1} \text{ et}$$

$$185. \quad \partial^n Fy = \left(\frac{u^0-1}{0}\right)^{n+1}.$$

Mais puisque la quantité y, qui est la seule variable, n'entre plus dans (185.), on voit que les conditions de la série (183. ou bien 180.) se réduisent à ce que ses termes ne doivent pas être infinis, qu'ils doivent aller en décroissant et que T_{n+1} (184.) doit être zéro pour $n = \infty$.

V. On voit qu'aucun des n premiers termes de la série (183. ou 180.), n étant fini, n'est pas infini; les quantités qui y entrent, savoir u et k, étant supposées finies, car nous avons trouvé que $\frac{u^0-1}{0}$ est entre 0 et 1, si u est entre 1 et 2, et $= m\frac{u^0-1}{0}$ pour une valeur quelconque positive u^m de u. Donc la première des conditions de la convergence de la série est satisfaite. Mais la seconde condition, que les termes doivent aller en décroissant, au moins vers l'infini, sera satisfaite d'elle même si le terme T_{n+1} est zéro pour $n = \infty$. Donc la recherche de la série (183. ou bien 180.) se réduit en dernière analyse à celle de ce terme, et il n'y a qu'à voir si T_{n+1} (184.) est zéro pour $n = \infty$ ou non.

VI. Comme $\frac{u^0-1}{0}$ est toujours une quantité finie, on peut supposer

$$186. \quad k \cdot \frac{u^0-1}{0} = \lambda$$

ou λ est fini. Par cela l'expression (184.) se réduit à

$$187. \quad T_{n+1} = \frac{\lambda^{n+1}}{2.3....(n+1)}$$

et il ne s'agit que de voir si la valeur absolue de cette quantité est zéro ou non pour $n = \infty$, λ étant une quantité finie quelconque.

VII. Supposons la valeur absolue de λ plus grande que le nombre entier μ et plus petite que $\mu+1$. Puis mettons T_{n+1} dans la forme

$$188. \quad T_{n+1} = \frac{\lambda}{2.3....\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu+1} \cdot \frac{\lambda}{\mu+2} \cdot \frac{\lambda}{\mu+3} \cdot .... \cdot \frac{\lambda}{n+1}.$$

On voit que dans cette expression le premier facteur $\frac{\lambda^\mu}{2.3....\mu}$ est toujours une quantité finie. Le second facteur $\frac{\lambda}{\mu+1}$, λ ayant été supposé plus petit que $\mu+1$, est <1. Les autres facteurs qui suivent sont encore plus petits. Donc T_{n+1} n'est pas plus grand que $\frac{\lambda^\mu}{2.3....\mu} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu+1}\right)^{n+1-\mu}$. Mais $\frac{\lambda}{\mu+1}$ étant <1, cette quantité peut être supposée $= \frac{1}{1+z}$, où z est positif; donc T_{n+1} n'est pas plus grand que $\frac{\lambda^\mu}{2.3....\mu} \cdot \frac{1}{(1+z)^{n+1-\mu}}$. Mais en vertu de ce qui a été démontré (§. 26. XIV et XVII.) $\frac{1}{(1+z)^{n+1-\mu}}$ est zéro pour $n = \infty$. Donc aussi T_{n+1}, le facteur $\frac{\lambda^\mu}{2.3....\mu}$ de cette quantité étant fini, n'est pas plus grand que zéro pour $n = \infty$. C'est-à-dire T_{n+1} est zéro pour $n = \infty$, λ, ou bien k et u, ayant des valeurs quelconques.

Donc la série (183.) ou bien celle (180.) est convergente dans tous les cas où y et k ont des valeurs réelles quelconques et u une valeur réelle positive quelconque.

29.

Voyons ce que nous donne d'ailleurs la série (183.) dont nous venons d'examiner l'existence et la convergence.

I. Nous avons vu (§. 27. IV.) que si u est entre 1 et 2, la quantité $\frac{u^0-1}{0}$ est entre 0 et 1, et (§. 27. VI. 178.) que $\frac{(u^m)^0-1}{0} = m\frac{u^0-1}{0}$, où m peut être tout ce qu'on voudra. De là on voit qu'en donnant à m une valeur convenable, on peut faire $m.\frac{u^0-1}{0} = 1$. Donc aussi $\frac{(u^m)^0-1}{0}$ peut être $= 1$ pour une valeur convenable de u^m, ou bien de u, en écrivant simplement u au lieu de u^m. Soit e la valeur encore inconnue de u pour

laquelle $\frac{u^0-1}{0}=1$, la série (183.) donne dans ce cas

$$189. \quad e^k = 1+k+\frac{k^2}{2}+\frac{k^3}{2.3}+\frac{k^4}{2.3.4}\ldots\ldots+\frac{k^n}{2.3\ldots\ldots n}\ldots\ldots$$

Par cette série même on trouve sur le champ la valeur de e si l'on fait $k=1$, savoir

$$190. \quad e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}\ldots\ldots = 2{,}7182818285\ldots\ldots$$

C'est la valeur de u pour laquelle $\frac{u^0-1}{0}=1$, de sorte que

$$191. \quad \frac{e^0-1}{0}=1.$$

II. Maintenant une puissance quelconque u^y peut être exprimée également par toute autre racine v, si on lui donne un exposant convenable. En effet, soit $v^m=u$, on a

$$192. \quad z = u^y = v^{my}$$

et si au lieu de v on met la quantité e (190.) et $e^u=u$, on a

$$193. \quad z = u^y = e^{uy}.$$

Si l'on donne une valeur déterminée à la racine d'une puissance, de sorte que l'exposant seul suffise pour exprimer la valeur de la puissance, on donne le nom de logarithme à l'exposant et celui de base à la racine. C'est la seule différence dans le sens des mots exposant et logarithme. La puissance elle même s'appelle aussi logarithmande. Si la base u est toujours la même pour une suite quelconque de logarithmandes, cette suite présente un système logarithmique, et la racine commune aux puissances en est la base. Dans l'expression (192.) y est le logarithme du logarithmande z ayant u pour base, et en même tems my est le logarithme du même logarithmande z ayant v pour base. Si les logarithmes d'un système quelconque ont la quantité e (190.) pour base, c'est-à-dire la valeur de u qui donne $\frac{u^0-1}{1}=1$, on les appelle naturels ou hyperboliques. Les logarithmes sont ceux de Briggs, si leur base est le nombre 10. On voit que cela ne diffère pas de ce qui est en usage. Mais même par cette raison il étoit nécessaire de l'énoncer, vu les différences qu'offre ce petite mémoire dans les autres parties.

IV. Quant à la notation des logarithmes, on les désigne ordinairement par leur nom abrégé log. Mais cette notation est évidemment incomplète et vague toutes les fois que la base n'est pas déterminée une fois pour toutes, de sorte qu'elle ne varie pas dans tout le cours du calcul. Comme le terme logarithme ne désigne pas parfaitement la quantité qu'on a en vue sans l'enoncé de la base, parcequ'un nombre infini de logarithmes d'un même nombre est possible suivant les valeurs différentes de la base, il est indispensablement nécessaire d'énoncer encore la valeur de la base supposée. Cela pourra se faire commodément et convenablement en mettant le signe de la base au dessus du mot log. par exemple en écrivant dans le cas (192.).

$$194. \quad y = \overset{u}{\log} z, \quad my = \overset{v}{\log} z.$$

On peut même fort bien supprimer le terme log et mettre seulement la base du côté gauche du logarithmande et un peu plus haut, par ex. comme suit

$$195. \quad y = {}^{u}z, \quad my = {}^{v}z$$

car cette dernière notation n'est guères consacrée à un autre objet et elle n'est pour ainsi dire qu'une abréviation de celle (194.). Je me sers ordinairement de cette notation abrégée (195.); mais pour me rapprocher de l'usage ordinaire autant que l'objet paraît le permettre, je conserverai ici la notation (194.). Il est vrai que celle-ci n'est pas généralement en usage non plus: ordinairement on n'écrit que le mot log. et dans les cas où l'obscurité devient trop grande, on énonce additionnellement la base en mots. Mais cela n'est pas bien fait. Il est vrai qu'enfin il est possible d'énoncer toute une formule algébrique par des mots au lieu de signes. Mais le signes valent mieux, et comme on sait, même une partie considérable de la force de l'analyse lui est donnée par l'emploi de signes, moyen extrêmement propre et efficace de combiner les conclusions et les théorèmes, dont la composition au moyen de mots seuls, sans le secours de signes, ne seroit guère possible. Dans les cas où il ne s'agit que d'une seule et même base, on peut sans doute se dispenser de l'écrire, comme, par ex. et par comparaison, il n'est pas besoin dans un calcul analytique où n'entre qu'une seule variable, d'écrire cette variable dans les coëfficiens différentiels. Dans ces cas la notation ordinaire suffit. Mais si plusieurs bases entrent dans le calcul des logarithmes, il est nécessaire de les

énoncer, et cela se fait plus convenablement au moyen des signes qu'au moyen des mots.

V. Si $z = u^y = v^{my}$ on tire des équations (194.)

$$196. \quad \overset{v}{\log} z = m \overset{u}{\log} z$$

et dans le cas $v = e$ et $m = \mu$, c'est-à-dire dans le cas $z = u^y = e^{\mu y}$ (193.)

$$197. \quad \overset{e}{\log} z = \mu \overset{u}{\log} z.$$

Puisque $\overset{u}{\log} z$ exprime l'exposant y même dans $u^y = z$, on a dans le cas $y = 1$, c'est-à-dire $z = u$,

$$198. \quad \overset{u}{\log} u = 1$$

donc en vertu de (196. et 197.)

$$199. \quad \overset{v}{\log} u = m \quad \text{et} \quad \overset{e}{\log} u = \mu.$$

Cela, étant substitué dans les mêmes équations (196. et 197.), donne

$$200. \quad \overset{v}{\log} z = \overset{u}{\log} z \overset{v}{\log} u \quad \text{et} \quad \overset{e}{\log} z = \overset{u}{\log} z \overset{e}{\log} u,$$

ou bien

$$201. \quad \overset{v}{\log}(u^y) = \overset{u}{\log}(u^y) \overset{v}{\log} u \quad \text{et} \quad \overset{e}{\log} z = \overset{u}{\log}(u^y) \overset{e}{\log} u,$$

ou bien encore

$$202. \quad \overset{v}{\log}(u^y) = y \overset{v}{\log} u \quad \text{et} \quad \overset{e}{\log} z = y \overset{e}{\log} u.$$

De (200.) on tire

$$203. \quad \overset{u}{\log} z = \overset{v}{\log} z . \frac{1}{\overset{v}{\log} u} = \overset{e}{\log} z . \frac{1}{\overset{e}{\log} u}.$$

Cela fait voir que pour trouver le logarithme d'une quantité quelconque z, la base étant u, par celui de la même quantité pour la base v ou e, il n'y a qu'à diviser ce dernier logarithme par celui de la nouvelle base, tiré du système précédent des logarithmes. En partant des logarithmes dits naturels, le multiplicateur $\frac{1}{\overset{e}{\log} u}$ (203.) est le module du nouveau système, qui a u pour base.

Si w est une nouvelle base, les équations (202.) donnent $\overset{v}{\log}(u^y) = y \overset{v}{\log} u$ et $\overset{w}{\log}(u^y) = y \overset{w}{\log} u$, donc

$$\textbf{204.}\quad \frac{\overset{v}{\log}(u^y)}{\overset{w}{\log}(u^y)} = \frac{\overset{v}{\log} u}{\overset{w}{\log} u}$$

et cela fait voir que les logarithmes d'une même puissance quelconque u^y, tirés des systèmes différents des logarithmes, sont en raison des logarithmes des bases v et w des deux systèmes sans que l'exposant y y entre.

VI. Si l'on suppose $u = e^m$, e étant toujours la quantité (190.) on a

$$\textbf{205.}\quad m = \overset{e}{\log}(e^m) = \overset{e}{\log} u.$$

Mais $u = e^m$ donne $u^k = (e^m)^k = e^{mk}$. Donc en vertu de (189.), en y mettant mk au lieu de k,

$$\textbf{206.}\quad u^k = 1 + mk + \frac{(mk)^2}{2} + \frac{(mk)^3}{2.3} \ldots + \frac{(mk)^n}{2.3\ldots n} \ldots\ldots$$

et puisque m, comme nous venons de voir, peut être exprimé par $\overset{e}{\log} u$,

$$\textbf{207.}\quad u^k = 1 + k\overset{e}{\log} u + \frac{(k\overset{e}{\log} u)^2}{2} + \frac{(k\overset{e}{\log} u)^3}{2.3} \ldots + \frac{(k\overset{e}{\log} u)^n}{2.3\ldots n} \ldots\ldots$$

En comparant cette formule à l'expression de u^k (183.) on voit que

$$\textbf{208.}\quad \frac{u^0 - 1}{0} = \overset{e}{\log} u.$$

La formule (178.) donne le même résultat en y faisant $u = e$. En effet elle donne dans ce cas $\frac{(e^m)^0 - 1}{0} = m\,\frac{e^0 - 1}{0}$. Mais $\frac{e^0 - 1}{0} = 1$ (191.) donc $\frac{(e^m)^0 - 1}{1}$ ou bien $\frac{u^0 - 1}{0} = m$, et puisque $m = \overset{e}{\log} u$ (205.), $\frac{u^0 - 1}{0} = \overset{e}{\log} u$, comme (208.).

On appelle **séries exponentielles** les séries semblables à celles (207. et 189.). Elles sont, comme il a été démontré plus haut, convergentes pour une valeur quelconque de k et u.

VII. En mettant $1 + x$ au lieu de u dans (208.) on a

$$\textbf{209.}\quad \overset{e}{\log}(1+x) = \frac{(1+x)^0 - 1}{0}$$

et en vertu de (170.)

$$\textbf{210.}\quad \overset{e}{\log}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 \ldots \pm \frac{1}{n}x^n \ldots\ldots$$

Cette série, comme il a été démontré (§. 27. IV.) est d'abord convergente dans les cas où x est >0 et <1. Mais elle l'est également si $x<0$ et >-1. Car si x est négatif, la série (210.) se réduit à $\overset{e}{\log}(1-x) = -\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\ldots.+\frac{1}{n}x^n\ldots..\right)$ où maintenant x est regardé comme positif. La valeur absolue du reste R_n de cette série qui suit le terme $\frac{1}{n}x^n$, savoir $R_n=\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(1+x\frac{n+1}{n+2}+x^2\frac{n+1}{n+3}\ldots.\right)$ est évidemment plus grande que zéro et plus petite que $\frac{x^{n+1}}{n+1}(1+x+x^2\ldots.)=\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1-x}$. Cette seconde limite de la valeur du reste R_n est également zéro pour $n=\infty$ si $x<1$. Donc R_n est zéro pour $n=\infty$ et la série est convergente également dans le cas $x<0$ et >-1. Donc elle est convergente si x tombe entre -1 et $+1$.

Puisqu'en vertu de (203.) pour toute autre base v, $\overset{v}{\log}u=\frac{\overset{e}{\log}u}{\overset{e}{\log}v}$ on a

211. $$\log(1+x)=\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots.\pm\frac{1}{n}x^n\ldots.}{\overset{e}{\log}v}.$$

On sait que les séries peu convergentes (210.) et (211.) qui donnent le logarithme de $1+x$ peuvent être rendues plus convergentes de différentes manières; mais nous ne nous y arrêterons pas.

30.

Dans ce qui précède la quantité z de l'expression $u^y=z$ a été exprimée par y et u de deux manières différentes, savoir par les séries (145. et 207.). Ces deux séries différentes, exprimant une seule et même quantité, viennent des deux valeurs $\alpha=1$ et $\alpha=0$ que peut avoir la quantité arbitraire α dans le développement général des fonctions (78.). De plus la quantité y de l'expression $u^y=z$ a été exprimée en u et z par la série (211.) y étant le logarithme de z pour la base u. Dans la série (211.) $1+x$ et v prennent la place de z et u. Donc, des trois problèmes (135.) qui se présentent dans le developpement des puissances, il ne reste que le troisième, savoir d'exprimer, u par y et z. Mais la solution de ce problème n'exige pas de nouveau développement. De $u^y=z$

on tire $u = z^{\frac{1}{y}}$ (10.), de sorte que u peut être exprimé en z et y au moyen des séries (145. et 207.).

Il y a encore à remarquer que les expressions des puissances que nous venons de présenter n'en donnent qu'une seule valeur. Pour avoir les autres, s'il y en a, il n'y a suivant (§. 9.) qu'à multiplier les expressions par la puissance de l'unité qui a le même exposant.

Maintenant nous venons aux fonctions angulaires qui particulièrement se rapportent aux puissances à exposans imaginaires. Nous en donnerons le développement en faisant voir en même tems qu'il peut être exécuté à l'aide du développement général seul sans avoir recours aux considérations géométriques ni à d'autres considérations étrangères à l'objet.

V. Application de la série générale de développement aux fonctions angulaires.

31.

Il n'y a d'autre condition de l'existence de la série particulière de Taylor (91.) que celle qu'aucun des coëfficiens différentiels qui y entrent ne doit être infini; la quantité k de laquelle varie la variable x peut être tout ce qu'on voudra, réelle ou imaginaire, ou même infinie (à voir §. 18.). Donc aussi les séries que donne la série particulière de Taylor, si on l'applique aux puissances, par ex. les séries (145. 180. 189.) auront lieu pour une valeur quelconque de k, réelle ou imaginaire (à voir §. 27. VI.). Ce n'est pas l'existence des séries, c'est le théorème général (§. 21.) de la convergence des séries tirées du développement général, qui exige que toutes les quantités qui entrent dans ces séries soient réelles, si l'on en veut juger la convergence.

Donc par ex. la série (189.) a lieu pour une valeur quelconque de k, même imaginaire et infinie, et si l'on fait $k = \pm x\sqrt{-1} = \pm ix$, $\sqrt{-1}$ étant supposé $= i$, on a généralement

212.
$$e^{\pm ix} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3....6} \cdots \pm \frac{x^{2n}}{2.3....2n} \cdots$$
$$\pm i\left(x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3....7} \cdots \pm \frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+1)} \cdots\right)$$

pour une valeur quelconque de x. Mais le théorème de la convergence (§. 21.) ne peut être appliqué à cette série, puisqu'il exige la réalité de toutes les quantités.

La série (212.) n'est pas d'ailleurs moins générale que si au lieu de la base e du système de logarithmes naturels on met une quantité quelconque u, comme dans (207.), car $u^{\pm ix}$ étant $= e^{\pm imx}$ si $u = e^m$, il n'y a qu'à écrire mx au lieu de x pour avoir également l'expression de $u^{\pm ix}$ par la voie de la série (212.).

32.

Il s'agit maintenant de chercher les propriétés de l'expression (212.).

I. Désignons la partie réelle de cette expression par $\cos x$ et la partie imaginaire par $i \sin x$, de sorte que

$$213. \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3....6} \cdots \pm \frac{x^{2n-2}}{2.3....(2n-2)} + R_{2n-2} = \cos x$$

$$214. \quad x\left(1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^6}{2.3....7} \cdots \pm \frac{x^{2n-2}}{2.3....(2n-1)}\right) + R_{2n-1} = \sin x.$$

Nous invitons le lecteur à vouloir bien mettre ici à coté les idées du cercle et des lignes géométriques qu'on a coutume d'attacher aux mots *cos* et *sin*. Nous aurions choisi quelques autres signes pour les valeurs de séries (213. et 214.) si on avoit eu à craindre qu'on ne fît pas attention à l'invitation que nous venons de faire. Il ne s'agit ici que des expressions purement analytiques, et si ces expressions donnent en même tems les valeurs de certaines quantités géométriques, c'est à la géométrie et non pas à l'analyse de faire voir cela. Nous sommes absolument indifférents à ce que signifient les séries (213. et 214.) en géométrie. Il seroit évidemment contraire à une bonne méthode de mêler la géométrie à l'analyse. La géométrie peut avoir besoin de l'analyse, mais elle ne peut jamais la précéder ni s'y mêler.

II. La somme de deux termes consécutifs de la série (213.) est

$$215. \quad \pm \frac{x^{2n}}{2.3....(2n+3)} ((2n+1)(2n+2) - x^2)$$

et la somme de deux termes consécutifs de la série (214.)

$$216. \quad \pm \frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+3)} ((2n+2)(2n+3) - x^2).$$

Puisque x a été supposé réel, x^2 et toujours positif, comme n. Donc le facteur $(2n+1)(2n+2)-x^2$ de l'expression (215.) est positif si $2n+1 =$ ou $> x$, et le facteur $(2n+2)(2n+3)-x^2$ de l'expression (216.) l'est si $2n+2 =$ ou $> x$. Donc dans ces cas la somme de deux termes consécutifs dans les deux séries (213. et 214.) prend le signe de son premier terme. Mais les termes des séries (213. et 214.) ont alternativement les mêmes signes et les exposans de x vont en croissant; donc tous les couples de termes qui suivent ceux (215. et 216.) ont les mêmes signes. Donc aussi la somme de tous les termes dès celui $\frac{x^{2n}}{2.3....2n}$ dans (213.) et dès celui $\frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+1)}$ dans (214.), x étant respectivement $=$ ou $< 2n+1$ et $=$ ou $< 2n+2$, ont les mêmes signes que ces premiers termes eux-mêmes. C'est-à-dire les restes des séries (213. et 214.) R_{2n-2} et R_{2n-1} ont les mêmes signes que leurs premiers termes dès $2n+1 =$ ou $> x$ dans (213.) et dès $2n+2 =$ ou $> x$ dans (214.)

III. Donc si l'on continue les séries jusqu'à quelque terme positif dont l'exposant soit assez élevé pour donner $2n+1 =$ ou $> x$ dans la première et $2n+2 =$ ou $> x$ dans la seconde, les sommes de ces parties des séries seront nécessairement plus petites que les sommes des séries prises dans toute leur étendue, les restes étant positifs. Mais si on réunit encore les premiers termes des restes aux sommes des parties detachées des séries, de sorte que maintenant les premiers termes des restes soient négatifs, les signes des termes allant toujours en alternant, les sommes des parties détachées des séries seront nécessairement plus grandes que celles des séries entières, les nouveaux restes étant negatifs.

Si au contraire on continue d'abord les séries jusqu'à quelque terme négatif d'un exposant assez élevé pour donner $2n+1 =$ ou $> x$ dans la première et $2n+2 =$ ou $> x$ dans la seconde, les sommes de ces parties des séries seront, par des raisons semblables, plus grandes que les sommes des séries prises dans toute leur étendue, et plus petites si l'on réunit encore aux partiés détachées des séries les premiers termes des restes.

Donc les sommes des séries (213. et 214.) seront comprises dans tous les cas entre celles des termes qui précèdent les restes R_{2n-2} et R_{2n-1}, x étant respectivement $=$ ou $< 2n+1$ et $=$ ou $< 2n+2$, et celles des

mêmes termes réunis aux premiers termes des restes. Donc zéro et les valeurs des premiers termes des restes seront des limites pour les valeurs des restes, c'est-à-dire

217. R_{2n-2} dans (213.) sera entre 0 et $\pm\frac{x^{2n}}{2.3....2n}$, $2n+1$ étant $=$ ou $>x$, et

218. R_{2n-1} dans (214.) sera entre 0 et $\pm\frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+1)}$, $2n+2$ étant $=$ ou $>x$.

Les valeurs des restes des séries (213. et 214.) seront donc comprises entre celles des valeurs de leurs premiers termes qui correspondent aux plus grandes et plus petites valeurs de x depuis zéro jusqu'à x. Donc le théorème général sur la convergence des séries a lieu également ici.

IV. Si $n=\infty$ les quantités $\pm\frac{x^{2n}}{2.3....2n}$ et $\pm\frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+1)}$, en vertu de ce qui a été démontré (§. 28. VI.), seront zéro; donc dans ce cas les limites des valeurs des restes (217. et 218.) sont zéro toutes les deux. Donc les restes eux mêmes seront nuls. Et puisque $2n+1$ et $2n+2$ peuvent être toujours plus grands que x, quelque grande que soit cette quantité, on voit que les séries (213. et 214.) seront toujours convergentes pour une valeur quelconque de x.

V. Si $x<1$ ou $=1$, les expressions des restes (217. 218.) seront déjà applicables aux séries (213. 214.) dès leurs premiers termes, puisque dans ce cas $2n+1$ et $2n+2=$ ou $>x$ même pour $n=0$. Elles le seront à plus forte raison si des séries on prend plus d'un terme. Donc, x étant supposé $=1$, on trouve que

219. cos 1 est entre 1 et 0, entre 1 et $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, entre $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ et $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3.4}=\frac{13}{24}$ etc.

220. sin 1 entre 0 et 1, entre 1 et $1-\frac{1}{2.3}=\frac{5}{6}$, entre $1-\frac{1}{2.3}=\frac{5}{6}$ et $1-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4.5}=\frac{101}{120}$ etc.

VI. Les expressions (217. et 218.) des limites des restes des séries (213. et 214.) font voir à la vérité que ces limites varient suivant la loi de continuité avec x en même tems; mais il n'est pas démontré par là que les restes eux-mêmes varient suivant cette même loi; et encore moins que tandis que par ex. x augmente, les restes augmentent également; il se pourroit au contraire qu'ils allassent alternativement en croissant et en diminuant. En effet il seroit possible que l'augmentation des termes dont les signes sont égaux l'emportât alternativement

sur celle des termes à signes opposés. Il nous importe, comme on le verra par la suite, de décider cette question.

Si λ exprime un nombre fractionnaire ou irrationnel quelconque, positif et plus petit que x, deux valeurs successives de x, si cette quantité va en augmentant, pourront être représentées par λx et x. Cela posé, la variation de la somme de deux termes consécutifs de la série (213.) sera

$$221. \quad v_1 = \frac{x^{2n}}{2.3....2n}(1-\lambda^{2n}) - \frac{x^{2n+2}}{2.3....(2n+2)}(1-\lambda^{2n+2})$$
$$= \frac{x^{n2}}{2.3....(2n+2)}((2n+1)(2n+2)(1-\lambda^{2n}) - x^2(1-\lambda^{2n+2}))$$

et celle de la somme de deux termes consécutifs de la série (214.)

$$222. \quad v_2 = \frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+1)}(1-\lambda^{2n+1}) - \frac{x^{2n+3}}{2.3....(2n+3)}(1-\lambda^{2n+3})$$
$$= \frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+3)}((2n+2)(2n+3)(1-\lambda^{2n+1}) - x^2(1-\lambda^{2n+3})).$$

Supposons dans (221.) $1-\lambda^{2n+2} < k(1-\lambda^{2n})$. Cela donne $1-\lambda^{2n}+\lambda^{2n}(1-\lambda^2) < k(1-\lambda^{2n})$ et en divisant par $1-\lambda^{2n}$, comme cela est permis, $1-\lambda^{2n}$ étant positif, $1+\lambda^{2n}\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^{2n}} < k$, ou bien

$$223. \quad 1+\lambda^{2n}\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2....+\lambda^{2n-1}} < k.$$

Faisons semblablement $1-\lambda^{2n+3} < k_1(1-\lambda^{2n+1})$ dans (222.). Cela donne $1-\lambda^{2n+1}+\lambda^{2n+1}(1-\lambda^2) < k_1(1-\lambda^{2n+1})$ et en divisant par $1-\lambda^{2n+1}$, $1+\lambda^{2n+1}\frac{1-\lambda^2}{1-\lambda^{2n+1}} < k_1$, ou bien

$$224. \quad 1+\lambda^{2n+1}\frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2....+\lambda^{2n}} < k_1.$$

Puisque λ est positif et <1, λ^{2n} et λ^{2n+1} sont <1, et $1+\lambda$ est $<1+\lambda+\lambda^2....+\lambda^{2n-1}$ $<1+\lambda+\lambda^2....+\lambda^{2n}$; donc les sommes des termes à gauche dans (223. et 224.) seront moindres que 2 et on satisfera aux expressions (223. et 224.) pour toutes les valeurs possibles de λ et pour toutes les valeurs que peut avoir n depuis 1 jusqu'à ∞, en supposant k et $k_1 = 2$. Donc on aura toujours

$$225. \quad 1-\lambda^{2n+2} < 2(1-\lambda^{2n}) \text{ et}$$
$$226. \quad 1-\lambda^{2n+3} < 2(1-\lambda^{2n+1}).$$

Cela fait voir que dans (221.)

227. $(2n+1)(2n+2)(1-\lambda^{2n})-x^2(1-\lambda^{2n+2})>[(2n+1)(2n+2)-2x^2](1-\lambda^{2n})$

et dans (222.)

228. $(2n+2)(2n+3)(1-\lambda^{2n+1})-x^2(1-\lambda^{2n+3})>[(2n+2)(2n+3)-2x^2](1-\lambda^{2n+1})$.

Supposons $x<n+1$ dans (227.) on aura $2x^2<2n^2+4n+2$, donc $(2n+1)(2n+2)$ étant $=4n^2+6n+2$, $(2n+1)(2n+2)-2x^2>0$ pour toutes les valeurs de n depuis 1 jusqu'à l'infini.

Supposons $x=$ ou $<n+1$ dans (228.), on aura $2x=$ ou $<2n^2+4n+2$, donc $(2n+2)(2n+3)$ étant $=4n^2+10n+6$, $(2n+2)(2n+3)-2x^2>0$ pour toutes les valeurs de n depuis 0 jusqu'à l'infini.

Mais $1-\lambda^{2n}$ dans (227.) et $1-\lambda^{2n+1}$ dans (228.) sont également toujours >0. Donc dans (227. et 228.) les quantités à droite, et à plus forte raison celles à gauche, seront toujours positives, sauf les conditions énoncées par les valeurs de x et n. Mais ces quantités sont les facteurs de $\frac{x^{2n}}{2.3....(2n+2)}$ et $\frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+3)}$ dans les expressions des variations de la somme de deux termes consécutifs des séries (213. 214) présentées (221. 222.). Donc ces variations auront nécessairement les mêmes signes que les quantités $\frac{x^{2n}}{2.3....(2n+2)}$ et $\frac{x^{2n+1}}{2.3....(2n+3)}$, ou bien que les premiers des deux termes choisis. Et puisqu'il en est de même, et successivement toujours à plus forte raison, de tous les couples de termes qui suivent, et que les premiers termes de ce couples ont tous les mêmes signes, on voit que les sommes des variations de tous les termes des séries, dès les premiers termes des restes, auront les mêmes signes que ces premiers termes eux mêmes, c'est-à-dire que les variations des restes des séries auront les mêmes signes que celles de leurs premiers termes. Donc les valeurs absolues des restes des séries augmentent suivant la loi de continuité si les valeurs absolues de leurs premiers termes vont en croissant, et elles diminuent si les premiers termes vont en diminuant, sous condition que dans (213.) x soit $<n+1$ et dans (214.) $x=$ ou $<n+1$. Sous cette condition le théorème aura lieu respectivement pour toutes les valeurs de n depuis 1 et depuis 0 jusqu'à l'infini.

VII. Si x est $<$ ou $=1$ on a $x<n+1$ pour $n=1$. Donc le théorème (VI.) sera applicable dans ce cas aux deux séries dès leurs premiers

termes. On voit donc que la diminution de $\cos x$ va en croissant avec x en même tems depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, le second terme $\frac{x^2}{2}$ de la série (213.) étant négatif. Donc si x augmente depuis 0 jusqu'à 1, le cosinus diminue depuis 1 jusqu'à une certaine quantité qui suivant (219.) est entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{13}{24}$. Le sinus va en croissant avec x en même tems, son premier terme étant positif. Si x augmente depuis 0 jusqn'à 1, le sinus augmente depuis 0 jusqu'à une certaine quantité qui suivant (220.) est entre $\frac{5}{6}$ et $\frac{101}{120}$. D'ailleurs les variations du cosinus et du sinus, dont il s'agit, ont lieu en même tems avec celles de x, suivant la loi de continuité.

33.

Ayant trouvé les propriétés principales des séries (213. et 214.): voyons ce qu'on en peut tirer d'ailleurs.

I. En premier lieu il y a à observer que, puisque les séries (213. et 214.) ne donnent qu'une seule valeur de la quantité $e^{\pm ix}$ (212.), il faut pour avoir les autres valeurs, multiplier par $1^{\pm ix}$ les quantités à droite dans (212.). De là on tire les expressions complètes de $e^{\pm ix}$ savoir

$$229. \quad e^{+ix} = 1^{+ix}(\cos x + i \sin x),$$

$$230. \quad e^{-ix} = 1^{-ix}(\cos x - i \sin x).$$

II. En multipliant ces expressions l'une par l'autre, on a

$$231. \quad 1 = \cos x^2 + \sin x^2.$$

Puisque les quantités $\cos x$ et $\sin x$, comme le font voir les expressions (213. et 214.), sont toujours réelles, de sorte que leurs quarrés ne peuvent être négatifs pour aucune valeur de x, l'équation (231.) fait voir que ni $\cos x^2$ ni $\sin x^2$ ne peut être plus grand que 1, c'est-à-dire que toutes les valeurs possibles de $\cos x$ et celles de $\sin x$ sont comprises entre $+1$ et -1

III. En multipliant les équations (229. et 230.) par $e^{\mp iy} = 1^{\mp iy}(\cos y \mp i \sin y)$ elles donnent

$$232. \quad e^{\pm i(x-y)} = 1^{\pm i(x-y)}[\cos x \cos y \pm i \cos y \sin x \mp i \sin y \cos x + \sin x \sin y],$$

et en y mettant $x - y$ au lieu de x,

$$233. \quad e^{\pm i(x-y)} = 1^{\pm i(x-y)}[\cos(x-y) \pm i \sin(x-y)].$$

En égalant les deux expressions de $e^{\pm i(x-y)}$ (232. et 233.) on a

$$234. \quad \cos x \cos y + \sin x \sin y \pm i(\cos y \sin x - \sin y \cos x) = \cos(x-y) \pm i \sin(x-y),$$

et puisque les parties réelles et les parties imaginaires doivent être zéro séparement,

$$235. \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

$$236. \quad \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

IV. Faisons changer mutuellement de place les quantités x et y dans (235. et 236.) on aura

$$\cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x,$$

$$\sin(y-x) = \sin y \cos x - \cos y \sin x.$$

En comparant ces expressions avec celles (235. et 236.) on voit que $\cos(y-x) = \cos(x-y)$ et $\sin(y-x) = -\sin(x-y)$ ou bien, en écrivant x au lieu de $x-y$,

$$237. \quad \cos(-x) = \cos(+x),$$

$$238. \quad \sin(-x) = -\sin(+x).$$

V. Mettant $-y$ au lieu de $+y$ dans (235. et 236.), ces expressions donnent

$$\cos(x+y) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos(-y) - \cos x \sin(-y)$$

et en vertu de (237. 238.)

$$239. \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$240. \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

VI. En mettant $x = y$ dans (235. et 236.) on a

$$\cos 0 = \cos x^2 + \sin x^2 \quad \text{et} \quad \sin 0 = 0,$$

et en vertu de (231.)

$$241. \quad \cos 0 = 1,$$

$$242. \quad \sin 0 = 0.$$

VII. En mettant $x = y$ dans (239. et 240.) on a

$$243. \quad \cos 2x = \cos x^2 - \sin x^2,$$

$$244. \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

VIII. Comme en vertu de théorème (§. 32. VI. VII.) (c'est ici que nous avons besoin de ce théorème) dans le cas où x va en augmentant

depuis 0 jusqu'à 1, $\cos x$ diminue suivant la loi de la continuité depuis 1 jusqu'à une certaine quantité entre $\frac{1}{2} = 0{,}5$ et $\frac{1}{2}\frac{3}{4} = 0{,}5416\ldots$, est $\sin x$ augmente semblablement depuis 0 jusqu'à une certaine quantité comprise entre $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$ et $\frac{1}{1}\frac{0}{2}\frac{1}{0} = 0{,}84166\ldots$, il y aura nécessairement une valeur réelle de x entre 0 et 1 pour laquelle $\sin x$ est égal à $\cos x$. En effet si x est zéro, $\cos x$ est plus grand que $\sin x$, savoir $\cos x = 1$ et $\sin x = 0$, et si $x = 1$, $\cos x$ est plus petit que $\sin x$, savoir $\cos x$ entre 0,5 et 0,5416.... et $\sin x$ entre 0,8333.... et 0,84166.... donc puisque $\cos x$ peut avoir toutes les valeurs possibles depuis 1 jusqu'à une certaine valeur entre 0,5 et 0,5416.... et $\sin x$ toutes les valeurs possibles depuis 0 jusqu'à une certaine valeur entre 0,8333.... et 0,84166.... pendant que x prend également toutes les valeurs possibles entre 0 et 1, il y aura nécessairement quelque valeur de x entre 0 et 1 qui donne $\cos x = \sin x$.

Désingnons par $\frac{1}{4}\pi$ la valeur encore inconnue de x, pour laquelle $\sin x = \cos x$, on aura en vertu de (231.) $1 = \sin x^2 + \sin x^2 = 2\sin x^2$, donc en vertu des équations (243. 244.)

$$245. \quad \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0,$$

$$246. \quad \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1.$$

En substituant (245. et 246.) dans (243. et 244.) on aura

$$247. \quad \cos\pi = 0 - 1 = -1$$

$$248. \quad \sin\pi = 2.0.1 = 0.$$

En mettant $x = \pi$ et $y = \frac{1}{2}\pi$ dans (239. et 240.) on aura en vertu de (245. .... 248.)

$$249. \quad \cos\tfrac{3}{2}\pi = \cos\pi\cos\tfrac{1}{2}\pi - \sin\pi\sin\tfrac{1}{2}\pi = 0,$$

$$250. \quad \sin\tfrac{3}{2}\pi = \sin\pi\cos\tfrac{1}{2}\pi + \cos\pi\sin\tfrac{1}{2}\pi = -1.$$

En mettant $x = \pi$ dans (243. 244.), on a en vertu de (247. 248.)

$$251. \quad \cos 2\pi = 1,$$

$$252. \quad \sin 2\pi = 0.$$

Puis mettant $y = 2\pi$ dans (239. 240.) on aura en vertu de (251. 252.)

$$253. \quad \cos(2\pi + x) = \cos x\cos 2\pi - \sin x\sin 2\pi = \cos x \text{ et}$$

$$254. \quad \sin(2\pi + x) = \sin x\cos 2\pi + \cos x\sin 2\pi = \sin x.$$

De là on tire entre autres, n étant un nombre entier quelconque,

$$255. \quad \cos 2\pi = \cos 4\pi = \cos 6\pi \ldots = \cos 2n\pi = 1,$$

$$256. \quad \sin 2\pi = \sin 4\pi = \sin 6\pi \ldots = \sin 2n\pi = 0,$$

$$257. \quad \cos(2nx + x) = \cos x,$$

$$258. \quad \sin(2nx + x) = \sin x.$$

Les expressions analogues pour les valeurs négatives de x et y se trouvent à l'aide des équations (237. et 238.).

34.

Les expressions présentées dans le paragraphe précédent offrent comme on voit les principales formules trigonométriques ou plutôt goniométriques, desquelles on tire sans difficulté les autres de ce genre.

Les formules (§. 33. I. jusqu'à VII.) ont été tirées seulement de deux expressions (229. et 230.) et en démontrant ces dernières, le développement de $e^{\pm ix}$ en série (212.) ne nous a servi que pour faire voir que la quantité $e^{\pm ix}$ est composée de deux parties, l'une réelle, l'autre imaginaire. La forme de la série (212.) n'est pas entrée dans le calcul des expressions (§. 33. I. .... VII.). Ce n'étoit qu'en (§. 33. VIII.) où nous avions besoin des résultats de la recherche des séries (213. et 214.), savoir pour faire voir qu'il existe une valeur de x telle que $\cos x = \sin x$, d'où l'on a tiré les résultats de (§. 33. VIII.).

Au reste les expressions fondamentales de la goniométrie présentées (§. 33.) ont été trouvées par une voie purement analytique. On est parti de l'expression (212.), qui de son côté est sortie des transformations identiques. On n'a eu nulle part recours à la géométrie ni à d'autres théorèmes et idées étrangères à l'analyse. Cela fait voir bien clairement que la théorie des fonctions angulaires n'est nullement du domaine de la géométrie mais purement de celui de l'analyse aussi bien que la théorie des puissances ou des logarithmes. Il est bien singulier qu'ordinairement on tire de la géométrie la théorie des fonctions angulaires. On pourroit procéder également et avec le même droit pour les logarithmes. Mais c'est ce qu'on ne fait pas. Le logarithme naturel exprime, comme on sait, l'aire de l'hyperbole; c'est pourquoi on l'appelle logarithme hyperbolique. De l'hyperbole c'est l'aire qui donne le logarithme, du cercle c'est l'arc qui offre les fonctions angulaires. On abandonne, comme il le

faut le logarithme à l'analyse, mais on donne les fonctions angulaires à la géométrie sans la moindre raison. Cela est évidemment contraire à une bonne méthode. Il est vrai que la géométrie participe aux résultats de la théorie des fonctions angulaires comme à celles des logarithmes. Elle fait voir que le logarithme exprime effectivement l'aire de l'hyperbole, et c'est à elle de faire voir que si x représente un arc de cercle, les droites qu'on appelle **sinus** et **cosinus** dans la géométrie ont les mêmes rapports à x qu'expriment les équations (213. et 214.). Mais pour cela il n'y a pas de raison pour tirer ces relations des théorèmes de la géométrie, ni pour le cercle ni pour l'hyperbole.

35.

Nous tirerons des expressions du (§. 33.) celles des différentes valeurs que peut avoir une puissance quelconque de l'**unité**, parcequ'il y aura quelques remarques à faire, tant sur ces expressions que sur l'effet de la pluralité des valeurs des puissances.

Elevons à la puissance m^{me} les expressions (229. et 230.), nous aurons

$$259. \quad e^{\pm imx} = 1^{\pm imx}(\cos x \pm i \sin x)^m.$$

Mais si dans les mêmes expressions on écrit mx au lieu de x, on trouve

$$260. \quad e^{\pm imx} = 1^{\pm imx}(\cos mx \pm i \sin mx).$$

En égalant les deux expressions (259. et 260.) de $e^{\pm imx}$ on a

$$261. \quad (\cos x \pm i \sin x)^m = \cos mx \pm i \sin mx).$$

Si l'on fait $x = 2n\pi$, on a $\cos x = 1$ et $\sin x = 0$ (255. 256.). Donc dans ce cas l'équation (261.) donne

$$262. \quad (\cos 2n\pi \pm i \sin 2n\pi)^m = 1^m = \cos 2mn\pi \pm i \sin 2mn\pi.$$

Puisqu'ici la quantité arbitraire n peut être un nombre entier quelconque, l'expression (262.) donne toutes les valeurs différentes que peut avoir la puissance 1^m de l'unité. La valeur 0 étant également parmi les valeurs différentes du nombre n, et $\cos 0$ étant 1, $\sin 0 = 0$, une des valeurs différentes de 1^m est toujours l'unité. Cela s'accorde avec (§. 6.).

Maintenant il y a les remarques suivantes à faire sur les expressions qui précèdent.

36.

I. L'équation (261.) n'est pas complète pour toute autre valeur de x que $2n\pi$, si l'on veut que $(\cos x \pm i \sin x)^m$ exprime les différentes valeurs que peut avoir cette quantité. Car il ne se présente à gauche qu'une seule valeur pendant qu'à droite il y en a plusieurs. Mais l'équation (262.) a été rendue complète par l'introduction faite du nombre arbitraire n, même si l'on veut que la partie à gauche exprime toutes les valeurs qu'elle peut avoir; car le nombre des valeurs à gauche n'a pas été augmenté tandis que les différentes valeurs qui conviennent à l'exposant m ont été introduites dans la partie à droite. D'ailleurs il n'y a non plus à droite qu'une seule valeur pour chaque valeur déterminée de n. Il n'en seroit pas ainsi pour toute autre valeur de x.

II. La défectuosité de l'équation (261.) tirée des équations (259. 260.) vient de ce que le facteur $(\cos x \pm i \sin x)^m$ dans (259.) ne peut être censé exprimer qu'une seule valeur de cette quantité, vu que l'autre facteur $1^{\pm imx}$ exprime déjà inclusivement la pluralité des valeurs. Cette restriction étant observée, l'équation (261.) est effectivement complète. Veut on qu'elle exprime en même tems toutes les valeurs que peut avoir la quantité $(\cos x \pm i \sin x)^m$, il n'y a suivant (§. 9.) qu'à multiplier à droite par 1^m. Cela donne l'équation complète

$$263. \quad (\cos x \pm i \sin x)^m = (\cos mx \pm i \sin mx)\, 1^m.$$

Si dans (259.) on met y au lieu de x et qu'on multiplie le résultat par l'expression primitive, on trouve

$$264. \quad e^{\pm i(x+y)} = 1^{\pm i(x+y)} (\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y).$$

Si au contraire on met $x+y$ au lieu de x dans (259.) on a

$$265. \quad e^{\pm i(x+y)} = 1^{\pm i(x+y)} (\cos(x+y) \pm i \sin(x+y)).$$

En égalant les deux expressions (264. et 265.) on a généralement

$$266. \quad (\cos x \pm i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) = \cos(x+y) \pm i \sin(x+y).$$

Maintenant si dans (263.) on substitue la valeur de 1 (262.) on trouve

$$267. \quad (\cos x \pm i \sin x)^m = (\cos mx \pm i \sin mx)(\cos 2mn\pi \pm i \sin 2mn\pi)$$

et si à la partie droite de cette équation on applique celle (266.), on a

$$268. \quad (\cos x \pm i \sin x)^m = \cos m(x+2n\pi) \pm i \sin m(x+2n\pi)$$

où maintenant la pluralité des valeurs est observée des deux côtés.

On auroit eu précisement le même résultat en substituant $x+2n\pi$ au lieu de x dans (261.). Cette substitution auroit été permise puisqu'en vertu de (257. et 258.) $\cos(x+2n\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2n\pi)=\sin x$, de sorte que la substitution faite, les quantités à gauche conservent encore la même valeur.

III. En négligeant la pluralité des valeurs des puissances on peut tomber dans plusieurs contradictions. Par ex. $\cos(x+2n\pi)$ et $\sin(x+2n\pi)$ ayant les mêmes valeurs que $\cos x$ et $\sin x$, les équations (229. 230.) peuvent être écrites comme suit

$$269. \quad e^{\pm ix} = 1^{\pm ix}(\cos(x+2n\pi)\pm i\sin(x+2n\pi)).$$

Si de cette expression on prend la m^{me} puissance on a

$$270. \quad e^{\pm imx} = 1^{\pm imx}(\cos(x+2n\pi)\pm i\sin(x+2n\pi))^m$$

et cela en vertu de (261.) est la même chose que

$$271. \quad e^{\pm imx} = 1^{\pm imx}(\cos m(x+2n\pi)\pm i\sin m(x+2n\pi)).$$

Mais si au lieu de cela on écrit mx au lieu de x dans (269.) on a

$$272. \quad e^{\pm imx} = 1^{\pm imx}(\cos(mx+2n\pi)\pm i\sin(mx+2n\pi)).$$

Donc en égalant les expressions (271. et 272.) de la quantité $e^{\pm imx}$, on trouve

$$273. \quad \cos(mx+2mn\pi)\pm i\sin(mx+2mn\pi) = \cos(mx+2n\pi)\pm i\sin(mx+2n\pi),$$

équation évidemment contradictoire.

La contradiction vient de ce que la quantité $\cos m(x+2n\pi)\pm i\sin m(x+2n\pi)$ dans (271.) qui est celle à gauche dans (273.) exprime toutes les valeurs différentes de la quantité $(\cos(x+2n\pi)\pm i\sin(x+2n\pi))^m$ (270.) qu'elle représente, ou bien de celle $(\cos x\pm i\sin x)^m$ qui lui est égale, tandis qu'au contraire la quantité $\cos(mx+2n\pi)\pm i\sin(mx+2n\pi)$ dans (272.) qui est celle à droite dans (273.) n'exprime qu'une seule valeur. Veut-on que la dernière représente également toutes les valeurs différentes qui existent, on la multipliera par $1^m=\cos 2mn\pi\pm i\sin 2mn\pi$ (262). Cette opération faite, les expressions (271. 272.), s'accorderont comme il est aisé de voir à l'aide de l'équation (266.), $2n\pi$ dans (272.) pouvant être supprimé sans changer la valeur de l'expression.

IV. Dans le cas $x=2n\pi$ les expressions (229. 230.), savoir $e^{\pm ix}=1^{\pm ix}(\cos x\pm i\sin x)$ présentent une difficulté particulière. Car dans ce cas on a $\cos x=\cos 2n\pi=1$ et $\sin x=\sin 2n\pi=0$, donc les ex-

pressions citées se réduisent à

$$274. \qquad e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi}$$

et cette expression à la première vue semble être contradictoire, car en prenant les puissances $\pm 2in\pi^{\text{mes}}$ de deux côtés on trouve

$$275. \qquad e^{-4n^2\pi^2} = 1^{-4n^2\pi^2}$$

et cela est évidemment faux. Cette difficulté pourra, à ce qu'il semble, être détruite également en faisant attention à la pluralité des valeurs.

En effet les expressions $e^{\pm 2in\pi}$ et $1^{\pm 2in\pi}$ ont la propriété de présenter, au moyen du nombre arbitraire n qui y entre, toutes les valeurs que peuvent avoir les quantités $e^{\pm 2i\pi}$ et $1^{\pm 2i\pi}$, car le facteur $\cos x \pm i \sin x$ de l'expression générale (229. 230.), si l'on y fait $x = 2n\pi$, est toujours 1 pour une valeur quelconque de n. Mais suivant la règle générale on a les valeurs différentes d'une puissance, en multipliant une quelconque de ses valeurs, par ex. la valeur réelle, s'il y en a, par la puissance de l'unité, qui a pour exposant celui de la puissance même. Ici les quantités $e^{\pm 2in\pi}$ et $1^{\pm 2in\pi}$ ont effectivement une valeur réelle, savoir celle qui correspond à la valeur zéro de n. Elle est $e^0 = 1^0 = 1$. Donc on peut, ou plutôt il faut exprimer $e^{\pm 2in\pi}$ et $1^{\pm 2in\pi}$ par $e^0 . 1^{\pm 2in\pi} = 1 . 1^{\pm 2in\pi}$ et par $1^0 . 1^{\pm 2in\pi} = 1 . 1^{\pm 2in\pi}$, de sorte que l'équation (274.), en ayant égard à la pluralité des valeurs, ne veut dire autre chose que

$$276. \qquad 1 . 1^{\pm 2in\pi} = 1 . 1^{\pm 2in\pi};$$

et cette équation identique n'implique point de contradiction.

Voyons maintenant d'où peut venir l'erreur qu'offre l'équation (275.) qui exprime la $\pm 2in\pi^{\text{me}}$ puissance de l'expression (274.) ou (276.). L'équation (274.), dans la forme où elle est, n'exprime qu'une seule valeur des quantités à droite et à gauche, savoir celle qui convient à $n = 0$. Si l'on veut qu'elle donne toutes les valeurs différentes, qui ont lieu, il lui faut donner la forme (276.). Mais elle laise indéterminées les autres valeurs dans cette forme, puisqu'elle est identique. Ces autres valeurs viennent au jour en prenant la puissance $\pm 2in\pi$. Même l'équation (275.) n'est pas fautive dans le cas $n = 0$. Elle ne l'est que pour les autres valeurs de n et la raison en est, qu'elle n'exprime pas complêtement toutes les valeurs qui existent. En effet on ne peut pas dire que

$$277. \qquad (e^{\pm 2in\pi})^{\pm 2in\pi} = (1^{\pm 2in\pi})^{\pm 2in\pi}$$

mais au contraire on a

$$278. \quad e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi} . 1.$$

C'est ce qu'on voit par l'équation (276.) qui 1 étant originairement $= e^0$, donne $1 . 1^{\pm 2in\pi} = e^0 . 1^{\pm 2in\pi} = e^{\pm 2in\pi}$, et également par les expressions (229. 230.) qui, $\cos x \pm i \sin x$ étant 1, si l'on fait $x = 2n\pi$, donnent également $e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi} 1$. Donc au lieu de (274.) il faut écrire (278.). Si de cette expression on prend la puissance $\pm 2in\pi$, ou plus généralement la puissance $\pm 2i\nu\pi$, on trouve

$$279. \quad e^{-4n\nu\pi^2} = 1^{-4n\nu\pi^2} . 1^{\pm 2i\nu\pi}$$

et cette expression, comme nous le verrons tout à l'heure, n'est pas contradictoire, si l'on a égard aux valeurs différentes de n et ν.

En effet l'expression (262.), ayant lieu pour une valeur quelconque de m, donne, en faisant $m = \pm 2i\nu\pi$,

$$280. \quad 1^{\pm 2i\nu\pi} = \cos(\pm 4in\nu\pi^2) \pm i \sin(\pm 4in\nu\pi^2).$$

Mais les séries (213. et 214.) ont lieu également pour une valeur quelconque de x; donc on a pour $x = \pm 4in\nu\pi$

$$281. \quad \cos(\pm 4in\nu\pi^2) = 1 + \frac{(4n\nu\pi^2)^2}{2} + \frac{(4n\nu\pi^2)^4}{2.3.4} + \frac{(4n\nu\pi^2)^6}{2.3....6} + ... \text{ et}$$

$$282. \quad \sin(\pm 4in\nu\pi^2) = \pm 4in\nu\pi^2 \left(1 + \frac{(4n\nu\pi^2)^2}{2.3} + \frac{(4n\nu\pi^2)^4}{2.3.4} + ...\right)^2.$$

Cela donne en vertu de (280.)

$$283. \quad 1^{\pm 2i\nu\pi} = 1 - 4n\nu\pi^2 + \frac{(4n\nu\pi^2)^2}{2} - \frac{(4n\nu\pi^2)^3}{2.3} + \frac{(4n\nu\pi^2)^4}{2.3.4} ....$$

Mais en vertu de (189.), en ne manquant pas de multiplier comme il faut par la puissance de l'unité, pour avoir toutes les valeurs qui peuvent avoir lieu, on a

$$284. \quad e^{-4n\nu\pi^2} = 1^{-4n\nu\pi^2} \left(1 - 4n\nu\pi^2 + \frac{(4n\nu\pi^2)^2}{2} - \frac{(4n\nu\pi^2)^3}{2.3} + \frac{(4n\nu\pi^2)^4}{2.3.4} - .....\right)$$

et si l'on substitue la valeur de $1^{\pm 2i\nu\pi}$ (283.) dans cette équation, on a

$$285. \quad e^{-4n\nu\pi^2} = 1^{-4n\nu\pi^2} . 1^{\pm 2i\nu\pi^2}$$

et cela s'accorde avec (279.) de sorte qu'il n'y a plus de contradiction.

V. La difficulté, que dans ce qui précède l'équation (279.) semble présenter par ce qu'elle a une quantité imaginaire à droite sans en avoir à gauche, n'est qu'apparente. La puissance $1^{\pm 2in\pi}$ à exposant imaginaire, qui y entre, n'offre point de quantités imaginaires; il faudroit pour en pro-

duire un exposant réel des puissances de l'unité, comme le fait voir (262.). Toutes les valeurs de $1^{\pm 2iv\pi}$, suivant (283.), sont réelles; donc il n'y a pas dans (279.) des quantités imaginaires autres que celles qui viennent de $1^{-4nv\pi^2}$ pour $e^{-4nv\pi^2}$. L'équation (283.) donne toutes les valeurs que $1^{\pm 2iv\pi}$ peut avoir pour les valeurs différentes de v. Si dans l'équation (279.) on ne fait attention qu'aux valeurs réelles de $e^{-4n\pi^2}$ pour les différentes valeurs de v, elles peuvent être exprimées par

$$286. \quad 1^{\pm 2iv\pi} = |e|^{-4nv\pi^2}$$

d'où l'on voit, qu'elles sont toutes entre 1 et 0, e^{-0} étant 1 et $e^{-\infty} = 0$.

VI. L'equation (278.) semble présenter une autre difficulté. Car en développant la quantité $e^{\pm 2in\pi}$ en série suivant (189.), il semble que sa valeur soit composée d'une partie réelle et d'une autre imaginaire, et cela seroit en contradiction avec ce que donne l'équation (283.), suivant laquelle la valeur de la quantité $1^{\pm 2in\pi}$, égale à $e^{\pm 2in\pi}$ (283.), est toute réelle. Mais la difficulté n'est également qu'apparente. En effet en développant $e^{\pm 2in\pi}$ suivant (189.), l'expression

$$287. \quad e^{\pm 2in\pi} = 1 \pm 2in\pi - \frac{(2n\pi)^2}{2} \mp \frac{(2in\pi)^3}{2.3} + \frac{(2n\pi)^4}{2.3.4} \ldots.$$

n'est pas complète. Pour la compléter il faut la multiplier par $1^{\pm 2in\pi}$ et cela donne

$$288. \quad e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi}\left(1 \pm 2in\pi - \frac{(2n\pi)^2}{2} \mp \frac{(2in\pi)^3}{2.3} + \frac{(2n\pi)^4}{2.3.4} \ldots.\right).$$

Pour mettre en evidence les différentes valeurs de $e^{\pm 2in\pi}$ que cette équation présente, on ne peut que séparer des autres la valeur réelle de $e^{\pm 2in\pi}$, pour la multiplier après par $1^{\pm 2in\pi}$. Cette valeur réelle correspond à $n = 0$, donc elle est 1, suivant (287.) et suivant l'expression $e^{\pm 2in\pi}$ elle même, et on a

$$289. \quad e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\pi}.1.$$

C'est l'expression complète de $e^{\pm 2in\pi}$, qui s'accorde avec (287.)

VII. Si dans l'expression générale

$$290. \quad e^{\pm ix} = 1^{\pm ix}(\cos x \pm i \sin x) \quad (229.\ 230.)$$

on fait $x = (2n \pm 1)\pi$, on a suivant (257. 258. et 247. 248.) $\cos x = -1$ et $\sin x = 0$, donc

$$291. \quad e^{\pm in(2n\pm 1)} = 1^{\pm in(2n\pm 1)} \cdot -1.$$

Ici il n'y a pas de valeur réelle ni à droite ni à gauche, car toutes les valeurs de n donnent des exposans imaginaires.

Si de (291.) on prend la puissance $\pm i\pi(2\nu\pm 1)$, on a

$$292.\quad e^{-\pi^2(2n\pm1)(2\nu\pm1)} = 1^{-\pi^2(2n\pm1)(2\nu\pm1)}.(-1)^{\pm i\pi(2\nu\pm1)}$$

et cela n'implique pas de contradiction. En effet, faisons $x=(2n\pm 1)\pi$ dans (261.), on aura

$$293.\quad (-1)^m = \cos m(2n\pm1)\pi \pm i\sin m(2n\pm1)\pi;$$

donc si $m=\pm i(2\nu\pm1)\pi$,

$$294.\quad (-1)^{\pm i\pi(2\nu\pm1)} = \cos\pm i\pi^2(2n\pm1)(2\nu\pm1)\pm i\sin\pm i\pi^2(2n\pm1)(2\nu\pm1).$$

Cela donne, en développant le cosinus et le sinus suivant (213. 214.),

$$295.\quad (-1)^{\pm i\pi(2\nu\pm1)} = 1-\pi^2(2n\pm1)(2\nu\pm1)+\frac{(\pi^2(2n\pm1)(2\nu\pm1))^2}{2}\ldots.$$

Mais en vertu de (189.), en multipliant à droite par 1^k, on a

$$296.\quad e^{-\pi^2(2n\pm1)(2\nu\pm1)} = 1^{-\pi^2(2n\pm1)(2\nu\pm1)}\left(1-\pi^2(2n\pm1)(2\nu\pm1)+\frac{(\pi^2(2n\pm1)(2\nu\pm1))^2}{2}\ldots.\right).$$

Substituant (295.) dans (296.) le résultat s'accordera avec (292.).

VIII. Si dans (290.) on fait $x=(2n\pm\frac{1}{2})\pi$, on a suivant (257. 258. et 245. 246) $\cos x=0$ et $\sin x=\pm 1$ donc

$$297.\quad e^{\pm i\pi(2n\pm\frac{1}{2})} = 1^{\pm i\pi(2n\pm\frac{1}{2})}.\pm i.$$

Ici il n'y a non plus de valeur réelle ni à droite ni à gauche.

Si d'abord on prend la seconde puissance de (297.) on a

$$298.\quad e^{\pm i\pi(4n\pm1)} = 1^{\pm i\pi(4n+1)}.-1.$$

Cette expression a la forme de celle (291.) d'où l'on voit qu'elle sera également exempte de contradiction.

Supposant $x=(2n\pm\frac{1}{2})\pi$ (261.) on a

$$299.\quad (\pm i)^m = \cos m(2n\pm\tfrac{1}{2})\pi \pm i\sin m(2n\pm\tfrac{1}{2})\pi,$$

donc si l'on fait $m=\pm i\pi(2\nu\pm\frac{1}{2})$

$$300.\quad (\pm i)^{\pm i\pi(2\nu\pm\frac{1}{2})} = \cos\pm i\pi^2(2n\pm\tfrac{1}{2})(2\nu\pm\tfrac{1}{2})\pm i\sin\pm i\pi^2(2n\pm\tfrac{1}{2})(2\nu\pm\tfrac{1}{2}).$$

Cela posé, si de (297.) on prend la puissance $\pm i\pi(2\nu\pm\frac{1}{2})$, on a

$$301.\quad e^{-\pi^2(2n\pm\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2})} = 1^{-\pi^2(2n+\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2})}(\pm i)^{\pm i\pi(2\nu\pm\frac{1}{2})}.$$

Mais en vertu de (300. et 213. 214.) on a

$$302.\quad (\pm i)^{\pm in(2n\pm\frac{1}{2})} = 1-\pi^2(2n\pm\tfrac{1}{2})(2\nu\pm\tfrac{1}{2})+\frac{(\pi^2(2n\pm\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2}))^2}{2}\ldots.$$

et suivant (189.), en multipliant par 1^k,

$$303.\quad e^{-\pi^2(2n\pm\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2})} = 1^{-\pi^2(2n\pm\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2})}\left(1-\pi^2(2n\pm\tfrac{1}{2})(2\nu\pm\tfrac{1}{2})+\frac{(\pi^2(2n\pm\frac{1}{2})(2\nu\pm\frac{1}{2}))^2}{2}\ldots.\right).$$

En substituant (302.) dans (303.) le résultat s'accordera avec (301.)

IX. L'équation générale

$$304.\quad e^{\pm ix} = 1^{\pm ix}(\cos x\pm i\sin x)\quad (229.\ 230.)$$

peut encore être exprimée comme suit.

En supposant $m=\pm ix$, l'expression (262.) donne

$$305.\quad 1^{\pm ix} = \cos\pm 2ixn\pi \pm i\sin\pm 2ixn\pi.$$

Mais on a en vertu de (213. 214.)

$$306.\quad \cos\pm 2ixn\pi = 1+\frac{(2xn\pi)^2}{2}+\frac{(2xn\pi)^4}{2.3.4}\ldots.$$

$$307.\quad \sin\pm 2ixn\pi = 2ixn\pi\left(1+\frac{(2xn\pi)^2}{2.3}+\frac{(2xn\pi)^4}{2.3.4.5}\ldots.\right),$$

donc suivant (305)

$$308.\quad 1^{\pm ix} = 1-2xn\pi+\frac{(2xn\pi)^2}{2}-\frac{(2xn\pi)^3}{2.3}+\frac{(2xn\pi)^4}{2.3.4}\ldots.$$

Mais suivant (189.), en multipliant par 1^k, on a

$$309.\quad e^{-2xn\pi} = 1^{-2xn\pi}\left(1-2xn\pi+\frac{(2xn\pi)^2}{2}-\frac{(2xn\pi)^3}{2.3}+\frac{(2xn\pi)^4}{2.3.4}\ldots.\right);$$

donc en substituant (308.) dans (309.) $e^{-2xn\pi} = 1^{-2xn\pi}\,1^{\pm ix}$ et de là

$$310.\quad 1^{\pm ix} = e^{-2xn\pi}.1^{+2xn\pi}.$$

En substituant cette expression dans (304.) on a

$$311.\quad e^{\pm ix} = e^{-2xn\pi}.1^{+2xn\pi}(\cos x\pm i\sin x)$$

et c'est l'expression des différentes valeurs de $e^{\pm ix}$.

Si l'on veut se servir de l'expression (308.) de $1^{\pm ix}$ pour la substituer dans (304.) on a

$$312.\quad e^{\pm ix} = (\cos x\pm i\sin x)\left(1-2xn\pi+\frac{(2xn\pi)^2}{2}-\frac{(2xn\pi)^3}{2.3}+\ldots.\right).$$

C'est une autre expression complète de $e^{\pm ix}$.

Si dans (311.) on fait $x = 2n\pi$ on a $e^{\pm 2in\pi} = e^{-4n^2\pi^2} . 1^{4n^2\pi^2}$ ou bien

313. $$e^{-4n^2\pi^2} = 1^{-4n^2\pi^2} . e^{\pm 2in\pi}.$$

Mais suivant (279.), en y faisant $n = \nu$, on a

314. $$e^{-4n^2\pi^2} = 1^{-4n^2\pi^2} 1^{\pm 2in\pi}$$

donc (312. et 313.) donnent

315. $$e^{\pm 2in\pi} = 1^{\pm 2in\cdot\pi}$$

et cela s'accorde avec (274.).

X. On voit par les exemples (IV. VII. VIII.) combien il est nécessaire, dans beaucoup de cas, d'avoir attention à la pluralité des valeurs des puissances, et de compléter leurs expressions par la multiplication d'une de leurs valeurs quelconque, par ex. de la valeur réelle, s'il y en a, par la même puissance de l'unité. Dans tous les cas où il se peut agir de la pluralité des racines, il ne faut pas écrire simplement u^y, mais plutôt $|u|^y . 1^y$, où $|u|^y$ désigne une valeur déterminée de $|u|^y$ et par préférence la valeur réelle s'il en existe. Dans les cas où il n'y a pas de valeur réelle, l'expression $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ remplace $|u|^y$; car généralement la quantité $e^{\pm ix}$ n'a pas de valeur réelle. Elle n'en a que dans le cas $x = 2n\pi$, le seul où la partie imaginaire $\pm i \sin x$ est zéro. Pour toute autre valeur de x cette partie imaginaire n'est pas zéro. Si $x = 2n\pi$, la quantité $e^{\pm ix}$ reprend une valeur réelle, savoir celle qui correspond à $n = 0$ dans son expression complète. Cette valeur est $e^0 = 1$. Dans ce cas la forme $|u|^y 1^y$ de l'expression de la puissance reprend sa place.

Nous ne donnons ce que contient le paragraphe présent que comme un essai pour éclaircir les difficultés que les exposans imaginaires présentent dans la théorie des puissances. Nous le soumettons, comme tout le reste du mémoire, aux lumières de ceux qui ont approfondi l'analyse.

37.

Avant de quitter les fonctions angulaires il faut que nous disions un mot des expressions en forme de factorielles de $\cos x$ et $\sin x$ par x, ces expressions étant utiles dans la théorie des facultés analytiques. Nous en donnerons le développement par un procédé très simple. Nous ferons précéder ce développement par celui de quelques autres formules qui s'y rapportent ordinairement et dont nous aurons besoin dans la suite.

I. En mettant $x+2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque, au lieu de x dans (261.) et $\frac{1}{m}$ au lieu de m, on a

$$316. \quad (\cos x \pm i \sin x)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{x+2n\pi}{m} \pm i \sin\frac{x+2n\pi}{m}$$

$\cos(x+2n\pi)$ et $\sin(x+2n\pi)$ étant égaux à $\cos x$ et $\sin x$.

Si de cette expression on prend la m^{me} puissance on a

$$317. \quad \cos x \pm i \sin x = \left(\cos\frac{x+2n\pi}{m} \pm i \sin\frac{x+2n\pi}{m}\right)^m.$$

Donc si a désigne une quantité quelconque, on trouve

$$318. \quad a^m - (\cos x + i \sin x) = a^m - \left(\cos\frac{x+2n\pi}{m} + i \sin\frac{x+2n\pi}{m}\right)^m \text{ et}$$

$$319. \quad a^m - (\cos x - i \sin x) = a^m - \left(\cos\frac{x+2n\pi}{m} - i \sin\frac{x+2n\pi}{m}\right)^m$$

où n représente tous les nombres entiers zéro y compris.

Maintenant si m est un nombre entier, les quantités à **droite** dans (318. et 319.) seront divisibles par

$$320. \quad a - \left(\cos\frac{x+2n\pi}{m} + i \sin\frac{x+2n\pi}{m}\right) \text{ et}$$

$$321. \quad a - \left(\cos\frac{x+2n\pi}{m} - i \sin\frac{x+2n\pi}{m}\right).$$

Donc les quantités (320. et 321.) seront facteurs des quantités à **gauche** dans (318. et 319.).

Mais les quantités (320. 321.) auront m valeurs différentes, ni plus ni moins. On les trouve en faisant $n = 0, 1, 2, 3 \ldots (m-1)$. Les valeurs positives de n, qui suivent, ou les valeurs négatives qui précèdent, ne donnent pas de nouvelles valeurs. Toutes ces valeurs des quantités (320. 321.) seront également diviseurs des quantités à droite et à gauche dans (318. 319.). Mais ces dernières quantités ne peuvent avoir plus de m diviseurs d'une dimension, a^m étant de la dimension m; donc les différentes valeurs des quantités (320. 321.) donneront tous les facteurs que les quantités (318. 319.) peuvent avoir.

Maintenant le produit des deux quantités à gauche dans (318. 319.) est

$$a^{2m} - a^m(\cos x + i \sin x + \cos x - i \sin x) + \cos x^2 + \sin x^2$$

ou bien

$$322. \quad a^{2m} - 2a^m \cos x + 1.$$

Mais les produits des facteurs de deux quantités sont également facteurs du produit de ces mêmes quantités. Donc le produit des quantités (320. 321.) qui, semblable à celui de (318. et 319.), est

$$323. \quad a^2 - 2a \cos \frac{x + 2n\pi}{m} + 1$$

représentera tous les facteurs de deux dimensions que peut avoir (322.). Donc on a

$$\begin{aligned} 324. \quad a^{2m} - 2a^m \cos x + 1 = &\left(a^2 - 2a \cos \frac{x}{m} + 1\right) \\ &\times \left(a^2 - 2a \cos \frac{2\pi + x}{m} + 1\right) \\ &\times \left(a^2 - 2a \cos \frac{4\pi + x}{m} + 1\right) \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &\times \left(a^2 - 2a \cos \frac{2(m-1)\pi + x}{m} + 1\right). \end{aligned}$$

Le cosinus compris dans le dernier facteur à droite de cette expression est aussi

$$= \cos -\left(\frac{2(m-1)\pi + x}{m}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2(m-1)\pi + x}{m}\right) = \cos\left(\frac{2\pi - x}{m}\right).$$

Celui de l'avant dernier facteur est

$$= \cos -\left(\frac{2(m-2)\pi + x}{m}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{2(m-2)\pi + x}{m}\right) = \cos\left(\frac{4\pi - x}{m}\right)$$

etc. Si m est impair, le nombre $m-1$ des facteurs qui suivent le premier est pair; donc dans ce cas l'expression (324.) peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} 325. \quad & a^{2m} - 2a^m \cos x + 1 \\ = \; & a^2 - 2a \cos \frac{x}{a} + 1 \\ & \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{2\pi + x}{m} + 1\right)\left(a^2 - 2a \cos \frac{2\pi - x}{m} + 1\right) \\ & \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{4\pi + x}{m} + 1\right)\left(a^2 - 2a \cos \frac{4\pi - x}{m} + 1\right) \\ & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{(m-1)\pi + x}{m} + 1\right)\left(a^2 - 2a \cos \frac{(m-1)\pi - x}{m} + 1\right). \end{aligned}$$

Si m est pair le $\frac{1}{2}m^{\text{me}}$ facteur à droite dans (324.) est

$$a^2-2a\cos\frac{m\pi+x}{m}+1=a^2-2a\cos\left(\pi+\frac{x}{m}\right)+1=a^2+2a\cos\frac{x}{m}+1;$$

les autres facteurs qui suivent le premier et dont le nombre est $m-2$ peuvent être exprimés comme ci-dessus. Donc dans le cas de m pair, on a

326.
$$\begin{aligned}a^{2m}-2a^m\cos x+1&=\left(a^2-2a\cos\frac{x}{m}+1\right)\left(a^2+2a\cos\frac{x}{m}+1\right)\\&\times\left(a^2-2a\cos\frac{2\pi+x}{m}+1\right)\left(a^2-2a\cos\frac{2\pi-x}{m}+1\right)\\&\times\left(a^2-2a\cos\frac{4\pi+x}{m}+1\right)\left(a^2-2a\cos\frac{4\pi-x}{m}+1\right)\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\times\left(a^2-2a\cos\frac{(m-2)\pi+x}{m}+1\right)\left(a^2-2a\cos\frac{(m-2)\pi-x}{m}+1\right).\end{aligned}$$

Cela donne comme on voit le théorème de Moivre, dont celui de Cotes est un cas particulier.

II. Si dans les expressions ci-dessus on met 1 au lieu de a et $2x$ au lieu de x, les formules (325. et 326.) prennent la forme

327.
$$\begin{aligned}2(1-\cos 2x)&=2^m\left(1-\cos\frac{2x}{m}\right)\\&\times\left(1-\cos\frac{2\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi-2x}{m}\right)\\&\times\left(1-\cos\frac{4\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi-2x}{m}\right)\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\times\left(1-\cos\frac{(m-1)\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{(m-1)\pi-2x}{m}\right),\end{aligned}$$

qui a lieu dans le cas de m impair, et

328.
$$\begin{aligned}2(1-\cos 2x)&=2^m\left(1-\cos\frac{2x}{m}\right)\left(1+\cos\frac{2x}{m}\right)\\&\times\left(1-\cos\frac{2\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi-2x}{m}\right)\\&\times\left(1-\cos\frac{4\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi-2x}{m}\right)\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\times\left(1-\cos\frac{(m-2)\pi+2x}{m}\right)\left(1-\cos\frac{(m-2)\pi-2x}{m}\right)\end{aligned}$$

dans le cas de m pair.

Mais comme $1-\cos 2x = 2\sin x^2$ (231. et 243.) et de là $1+\cos 2x = 2\cos x^2$, on voit que les expressions ci-dessus, en extrayant la racine quarrée, se réduisent à

$$329. \quad \sin x = 2^{m-1} \sin\frac{x}{m} \sin\frac{\pi+x}{m} \sin\frac{\pi-x}{m} \sin\frac{2\pi+x}{m} \sin\frac{2\pi-x}{m} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \sin\frac{\frac{1}{2}(m-1)\pi+x}{m} \sin\frac{\frac{1}{2}(m-1)\pi-x}{m}$$

pour le cas d'un m impair, et à

$$330. \quad \sin x = 2^{m-1} \cos\frac{x}{m} \sin\frac{x}{m} \sin\frac{\pi+x}{m} \sin\frac{\pi-x}{m} \sin\frac{2\pi+x}{m} \sin\frac{2\pi-x}{m} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \sin\frac{\frac{1}{2}(m-2)\pi+x}{m} \sin\frac{\frac{1}{2}(m-2)\pi-x}{m}$$

dans le cas de m pair.

Ce sont, comme on voit, les expressions du sinus d'un arc multiple par le sinus de l'arc simple qu'Euler a trouvées par une autre voie dans *l'introd. in anal. inf. tom. I. cap.* 14. §. 240. On voit qu'elles se tirent immédiatement du théorème de Moivre.

III. Si l'on veut appliquer les expressions (329. 330.) au cas $x = 0$, il faut recourir à la formule (214.). Cette formule donne

$$\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{m}} = m \frac{1-\frac{x^2}{2\,3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}\ldots\ldots}{1-\frac{x^2}{2.3.m^2}+\frac{x^4}{2.3.4.5.m^4}\ldots\ldots},$$

donc pour $x = 0$,

$$331. \quad \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{m}} = m.$$

Si donc on divise les expressions (329. 330.) par $\sin\frac{x}{m}$ et qu'ensuite on fasse $x = 0$, on trouve

$$m = 2^{m-1}\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^2\left(\sin\frac{2\pi}{m}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{m}\right)^2 \ldots\ldots \left(\sin\frac{m-1}{2m}\pi\right)^2,$$
$$m = 2^{m-1}\left(\sin\frac{\pi}{m}\right)^2\left(\sin\frac{2\pi}{m}\right)^2\left(\sin\frac{3\pi}{m}\right)^2 \ldots\ldots \left(\sin\frac{m-2}{m}\pi\right)^2,$$

et en extrayant la racine quarrée,

$$332.\quad \sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\sin\frac{3\pi}{m}\ldots\ldots\sin\frac{m-1}{2m}\pi = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}}} \text{ pour } m \text{ impair,}$$

$$333.\quad \sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{2\pi}{m}\sin\frac{3\pi}{m}\ldots\ldots\sin\frac{m-2}{2m}\pi = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{m-1}{2}}} \text{ pour } m \text{ pair.}$$

Nous passons maintenant au développement de $\cos x$ et $\sin x$ en factorielles.

VI. C'est comme on sait le théorème de **Cotés** d'où l'on tire ordinairement les expressions de $\cos x$ et $\sin x$ en forme de factorielles. Euler par ex. (*Introd. in. anal. inf. tom. I. cap. IX.* §. 156.) les trouve à l'aide de ce théorème. Mais, comme nous verrons, on peut aussi avoir ces expressions à l'aide d'un autre lemme et sans le secours du théorème de Cotés.

Soit fx une fonction quelconque rationnelle de x, par ex.

$$334.\quad fx = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - a_3x^{n-3}\ldots\ldots \pm a_n.$$

Supposons qu'on sache d'ailleurs que la valeur de fx se réduit a zéro en donnant à x les n valeurs différentes $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$, on aura, en faisant par ex. $x = x_1$,

$$335.\quad x_1^n - a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} - a_3x_1^{n-3}\ldots\ldots \pm a_n = 0$$

Déduisant (335.) de (334.) on aura

$$336.\quad fx = x^n - x_1^n - a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - x_1^{n-2})\ldots\ldots \mp a_{n-1}(x - x_1).$$

Mais de cette équation tous les termes de la partie à droite sont divisibles par $x - x_1$ et, la division faite, le quotient sera une fonction rationnelle de x. Donc aussi fx sera nécessairement divisible par $x - x_1$, et le quotient sera également une fonction rationnelle. Mais fx sera également divisible par $x - x_2$, $x - x_3$, $\ldots\ldots$ $x - x_n$. Donc toutes les n quantités $x - x_1$, $x - x_2$, $x - x_3$, $\ldots\ldots$ $x - x_n$ seront facteurs de fx, et puisque cette quantité ne peut avoir plus de n facteurs, on aura

$$337.\quad fx = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_n)$$

pour une valeur quelconque de x.

Supposons exécutée la multiplication des facteurs (337.) il est aisé de voir, que le dernier terme du produit qui ne contient pas x, sera

$\pm x_1 x_2 x_3 \ldots . x_n$; donc en vertu de (334.) on a

338. $$x_1 x_2 x_3 \ldots . x_n = a_n .$$

Supposons $a_n = 1$, on aura en divisant (337.) par $x_1 x_2 x_3 \ldots . x_n = 1$

339. $$fx = \left(\frac{x}{x_1} - 1\right)\left(\frac{x}{x_2} - 1\right)\left(\frac{x}{x_3} - 1\right) \ldots . \left(\frac{x}{x_n} - 1\right).$$

Voila le lemme qu'il nous faut.

V. En vertu des expressions (213. 214.) $\cos x$ et $\sin x$ sont des fonctions rationnelles de x, desquelles on sait d'ailleurs que la première est zéro pour

$$x = +\tfrac{1}{2}\pi,\ -\tfrac{1}{2}\pi,\ +\tfrac{3}{2}\pi,\ -\tfrac{3}{2}\pi,\ +\tfrac{5}{2}\pi,\ -\tfrac{5}{2}\pi,\ \ldots .$$

et la seconde pour

$$x = 0,\ +\pi,\ -\pi,\ +2\pi,\ -2\pi,\ \text{etc.};$$

donc on a en vertu du lemme (IV.)

$$\cos x = \left(\frac{x}{\frac{1}{2}\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{-\frac{1}{2}\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{\frac{3}{2}\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{-\frac{3}{2}\pi} - 1\right) \ldots . \text{ et}$$

$$\sin x = \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{-\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{2\pi} - 1\right)\left(\frac{x}{-2\pi} - 1\right) \ldots .$$

ou bien

340. $$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \ldots . \text{ et}$$

341. $$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \ldots .$$

Ce sont comme on voit les expressions connues de $\cos x$ et $\sin x$ en forme des factorielles.

Nous passons maintenant à l'application des formules générales de développement des fonctions aux facultés analytiques.

VI. Application des formules générales de développement des fonctions aux facultés analytiques.

38.

Les formules générales de développement des fonctions en séries seront surtout nécessaires au calcul des facultés analytiques dans les cas où les valeurs n'en peuvent être trouvées par la multiplication et l'addition seules. Il en est ici comme il en étoit des puissances et dans les autres cas semblables.

Ce seront toujours les propriétés fondamentales des facultés, exprimées par les équations fondamentales (38. 39. 40.) d'où les développements doivent partir.

Supposons la faculté

$$342. \qquad (u, +x)^{y} = z,$$

il y aura quatre quantités dont chaque fois une dépendra de trois autres ou pourra en être regardée comme fonction.

Donc on pourra demander de calculer

$$343. \quad \begin{cases} z & \text{par} \quad u, x \text{ et } y, \\ y & \text{par} \quad u, x \text{ et } z, \\ x & \text{par} \quad u, y \text{ et } z, \\ u & \text{par} \quad x, y \text{ et } z, \end{cases}$$

et puisque ces calculs pourront être faits en variant un des trois élémens, les deux autres étant regardés comme invariables, il y aura douze problèmes, savoir:

$$344. \quad \begin{cases} 1,\ 2,\ 3 : \text{calculer } z \text{ par } u, x \text{ et } y \text{ en variant } u \text{ ou } x \text{ ou } y, \\ 4,\ 5,\ 6 : \text{calculer } y \text{ par } u, x \text{ et } z \text{ en variant } u \text{ ou } x \text{ ou } z, \\ 7,\ 8,\ 9 : \text{calculer } x \text{ par } u, y \text{ et } z \text{ en variant } u \text{ ou } y \text{ ou } z, \\ 10,\ 11,\ 12 : \text{calculer } u \text{ par } x, y \text{ et } z \text{ en variant } x \text{ ou } y \text{ ou } z. \end{cases}$$

Tous ces calculs doivent être praticables par les équations fondamentales.

Nous en entreprendrons les plus faciles et les plus utiles.

Développement des facultés analytiques par la variation de la base.

39.

On a ici pour l'application de la série générale de Taylor (78.)

$$345.\quad (u,+x)^{y} = z = Fu$$

et la série donne

$$346.\quad (u+k,+x)^{y} = (u,+x)^{y} + \frac{k}{\alpha}\Delta(u,+x)^{y} + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^{2}}\Delta^{2}(u,+x)^{y} \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{k(k-\alpha)\ldots.(k-(n-1)\alpha)}{2.3\ldots.n\alpha^{n}}\Delta^{n}(u,+x)^{y}$$
$$+ \frac{k(k-\alpha)\ldots.(k-n\alpha)}{2.3\ldots.n\alpha^{n}}\Delta^{n}\left(\frac{(u+k,+x)^{y}-(u,+x)^{y}}{k}\right) (= R_{n})$$

où par ex. $\Delta(u,+x)^{y}$ signifie $(u+\alpha,+x)^{y}-(u,+x)^{y}$.

Si l'exposant n'est pas un nombre entier, la série (346.) ne donne pas $(u+k,+x)^{y}$ sans le secours de facultés dans tous les termes. Mais si y est entier, il n'entre dans la série que des factorielles, calculables par la multiplication seule.

La quantité α étant arbitraire, on peut la supposer un multiple quelconque de x. Cela donnera les séries les plus simples. Nous supposerons $\alpha = -x$ et $\alpha = +x$.

40.

Premier cas $\alpha = -x$.

I. Dans ce cas on a

$$347.\quad \Delta(u,+x)^{y} = (u-x,+x)^{y} - (u,+x)^{y}.$$

En mettant dans la première équation fondamentale (38.) $u-x$, 1 et $y-1$ au lieu de u, y et k, elle donne $(u-x,+x)^{y} = (u-x,+x)^{1}(u-x+x,+x)^{y-1}$ ou bien, $(u-x,+x)^{1}$ étant $u-x$ en vertu de la troisième équation fondamentale (40.),

$$348.\quad (u-x,+x)^{y} = (u-x)(u,+x)^{y-1}.$$

Mais en faisant $y-1=y$ et $k=1$ dans la première équation fondamentale, on a $(u,+x)^{y} = (u,+x)^{y-1}(u+x(y-1),+x)^{1}$ ou bien

$$349.\quad (u,+x)^{y} = (u,+x)^{y-1}(u-x+xy).$$

Substituant (348. et 349.) dans (347). on trouve

$$350. \quad \triangle(u,+x)^y = -xy(u,+x)^{y-1}$$

II. Si dans (350.) on écrit $y-1$ au lieu de y on a $\triangle(u,+x)^{y-1} = -x(y-1)(u,+x)^{y-2}$, et x et y étant invariables, $\triangle(-xy(u,+x)^{y-1}) = +x^2y(y-1)(u,+x)^{y-2}$, donc en vertu de (350.)

$$351. \quad \triangle^2(u,+x)^y = +x^2y(y-1)(u,+x)^{y-2}.$$

On aura par la répétition du procédé:

$$\triangle^3(u,+x)^y = -x^3y(y-1)(y-2)(u,+x)^{y-3}.$$

et généralement:

$$352. \quad \triangle^n(u,+x)^y = \pm x^n y(y-1)(y-2)\ldots(y-(n-1))(u,+x)^{y-n}.$$

Cela étant substitué dans (346.) et faisant attention que α a été supposé $=-x$, on aura

$$353. \quad (u+k,+x)^y = (u,+x)^y + ky(u,+x)^{y-1} + \frac{k(k+x)}{2}y(y-1)(u,+x)^{y-2} \ldots$$
$$\ldots + \frac{k(k+x)(k+2x)\ldots(k+(n-1)x)}{2.3\ldots n}y(y-1)(y-2)\ldots(y-(n-1))(u,+x)^{y-n} + R_n.$$

III. De (349.) on tire

$$354. \quad (u,+x)^{y-1} = \frac{(u,+x)^y}{u+(y-1)x},$$

donc, en mettant $y-1$ au lieu de y,

$$(u,+x)^{y-2} = \frac{(u,+x)^{y-1}}{u+(y-2)x},$$

et en substituant (354.) dans cette expression:

$$355. \quad (u,+x)^{y-2} = \frac{(u,+x)^y}{(u+(y-1)x)(u+(y-2)x)}.$$

En répétant ce procédé, on trouve

$$356. \quad (u,+x)^{y-3} = \frac{(u,+x)^y}{(u+(y-1)x)(u+(y-2)x)(u+(y-3)x)}$$

etc.

Si l'on substitue ces expressions dans (353.) on aura

$$357.\quad (u+k,+x)^y = (u,+x)^y\left[1+\frac{ky}{u+(y-1)x}+\frac{k(k+x)y(y-1)}{2(u+(y-1)x)(u+(y-2)x)}\right.$$
$$+\frac{k(k+x)(k+2x)y(y-1)(y-2)}{2.3(u+(y-1)x)(u+(y-2)x)(u+(y-3)x)}\cdots\cdots$$
$$\left.\cdots\cdots+\frac{k(k+x)(k+2x)\ldots.(k+(n-1)x)y(y-1)(y-2)\ldots.(y-(n-1))}{2.3\ldots.n(u+(y-1)x)(u+(y-2)x)\ldots.(u+(y-n)x)}\right]+R_n.$$

Voila le premier développement d'une faculté, la base étant variée. La série (357.) est connue sous le nom de série du binôme des facultés.

IV. La généralité des expressions des facultés ne diminue pas en mettant $=1$ la base ou la différence. Car en vertu de la seconde équation fondamentale on a par ex. $(u,+x)^y=\left(\frac{u}{x},+1\right)^y x^y$ et $(u+k,+x)^y=\left(\frac{u}{x}+\frac{k}{x},+1\right)^y x^y$, de sorte qu'il n'y a qu'à écrire u et k au lieu de $\frac{u}{x}$ et $\frac{k}{x}$ pour transformer les facultés $(u,+k)^y$ et $(u+k,+x)^y$ en d'autres, dont les différences sont 1. Si l'on veut restituer la différence x, il n'y a qu'à multiplier par x^y et qu'à écrire u et k au lieu de ux et kx. Donc on peut supposer $x=1$ dans (357.). Cela donne

$$358.\quad (u+k,+1)^y = (u,+1)^y\left[1+\frac{ky}{u+y-1}+\frac{k(k+1)y(y-1)}{2(u+y-1)(u+y-2)}\right.$$
$$+\frac{k(k+1)(k+2)y(y-1)(y-2)}{2.3(u+y-1)(u+y-2)(y+y-3)}\cdots\cdots$$
$$\left.\cdots\cdots+\frac{k(k+1)(k+2)\ldots.(k+n-1)y(y-1)(y-2)\ldots.(y-(n-1))}{2.3\ldots.n(u+y-1)(u+y-2)\ldots.(u+y-n)}\right]+R_n.$$

Cette expression est aussi générale que celle (357.)

V. Si dans (357.) on fait $x=0$ on a

$$359.\quad (u+k)^y = u^y\left[1+y\frac{k}{u}+\frac{y(y-1)}{2}\left(\frac{k}{u}\right)^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{2.3\ldots.n}\left(\frac{k}{u}\right)^3\cdots\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\cdots+\frac{y(y-1)\ldots.y-(n-1)}{2.3\ldots.n}\left(\frac{k}{u}\right)^n\right]+R_n.$$

C'est comme on voit le théorème du binôme des puissances, comme il doit être. En effet la faculté $(u+k,+x)^y$ se réduit à la puissance u^y dans le cas $x=0$.

VI. Si dans (357.) on fait $u=x$, on a

360. $$(x+k,+x)^y = x^y(1,+1)^y\left[1+\frac{k}{x}+\frac{k(k+x)}{2x^2}+\frac{k(k+x)(k+2x)}{2.3x^3}\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\frac{k(k+x)(k+2x)\ldots.(k+(n-1)x)}{2.3\ldots.n\,x^n}\right]+R_n,$$

et en supposant $x=-1$,

361. $$(k-1,-1)^y = (-1)^y(1,+1)^y\left[1-k+\frac{k(k-1)}{2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{2.3}\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.\pm\frac{k(k-1)(k-2)\ldots.k-(n-1)}{2.3\ldots.n}\right]+R_n,$$

ou bien

362. $$(k-1,-1)^y = (-1)^y(1,+1)^y[1-k_1+k_2-k_3\ldots.\pm k_n]+R_n.$$

VII. Dans le cas où l'exposant y est un nombre entier, on auroit pu tirer immédiatement l'expression (362.) des propriétés des coëfficiens binomiaux.

En effet, m étant un nombre entier quelconque, on a

$$(k-1)_m = \frac{(k-1)(k-2)\ldots.(k-(m-1))(k-m)}{2.3\ldots.(m-1)m} \text{ et}$$
$$(k-1)_{m-1} = \frac{(k-1)(k-2)\ldots.(k-(m-1))}{2.3\ldots.(m-1)},$$

donc

363. $$(k-1)_{m-1}+(k-1)_m = \frac{(k-1)(k-2)\ldots.(k-(m-1))}{2.3\ldots.(m-1)}\left(1+\frac{k-m}{m}\right) = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots.(k-(m-1))}{2.3\ldots.m} = k_m.$$

donc

364. $$\begin{cases} 1 = 1 \\ -k = -1-(k-1)_1 \\ +k_2 = (k-1)_1+(k-1)_2 \\ -k_3 = -(k-1)_2-(k-1)_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mp k_{n-1} = \mp(k-1)_{n-2}\mp(k-2)_{n-3} \\ \pm k_n = \pm(k-1)_{n-1}\pm(k-1)_n. \end{cases}$$

La somme de ces équations est

365. $$1-k_1+k_2-k_3\ldots.\pm k_n = \pm(k-1)_n$$

et $(k-1)_n$ étant $= \frac{(k-1,-1)^n}{(1,+1)^n}$, on a

366. $$(k-1,-1)^n = \pm(1,+1)^n[1-k_1+k_2-k_3\ldots.\pm k_n].$$

C'ela s'accorde comme on voit avec (362.), si dans cette dernière formule on suppose $n =$ un nombre entier.

VIII. La série (358.) étant généralement peu convergente et peu utile dans le calcul en nombres, si non dans le cas où l'exposant est un nombre entier, nous remettrons la recherche de sa convergence à la continuation prochaine de ce mémoire. Si l'exposant est un nombre entier, la série n'est pas infinie. Le nombre fini des termes, qu'elle a dans ce cas, donne exactement la valeur de la factorielle, et il ne s'agit pas de la convergence.

IX. Mais il se présente encore ici un cas remarquable. C'est celui où $u = x$ et qui donne les séries (360. 361. 362.). Dans ce cas on a, comme le font voir les expressions (347. et 348.), $(u - x, + x)^y = 0$ et $\triangle (u, + x)^y = - (u, + x)^y$, donc $\triangle^2 (u, + x)^y = + (u, + x)^y$, $\triangle^3 (u, + x)^y = - (u, + x)^y$ etc. c'est-à-dire que les différences de $(u, + x)^y$ de divers ordres ont ici la même valeur absolue que la quantité primitive et les signes alternativement positifs et négatifs. C'est donc ici un exemple des cas donc nous avons parlé (§. 22.) et il suit de ce qui y a été dit, que les formules (360. 361. 362.) n'ont pas lieu dans le cas actuel, toutes les fois que l'exposant y n'est pas un nombre entier. Elles n'ont lieu que si y est un nombre entier n. En effet on voit par ex. dans (362.) que cette formule, le facteur $1 - k_1 + k_2 - k_3 \ldots .$ étant $= (1 - 1)^k = 0$, donne $(k - 1, - 1)^y = 0$ pour une valeur quelconque positive de k, résultat évidemment faux. La série (362.) n'existe pas, si y n'est pas entier et au lieu d'une série développée on n'a dans ce cas que l'expression identique $(x + k, + x)^y = (x + k, + x)^y$.

41.

Second cas $\alpha = + x$

I. Si dans la première équation fondamentale des facultés (38.) on écrit 1 et y au lieu de y et k elle donne en vertu de (40.)

$$367. \quad (u, + x)^{1+y} = u (u + x, + x)^y$$

et si dans la même équation on fait $k = 1$, on a

$$368. \quad (u, + x)^{1+y} = (u, + x)^y (u + y x).$$

Des équations (367. et 368.) on tire

$$369. \quad (u + x, + x)^y = (u, + x)^y \frac{u + y x}{u}$$

donc $\triangle(u, +x)$ étant dans le cas actuel $= (u+x, +x)^y - (u, +x)^y$, on a en vertu de (369.)

$$370. \quad \triangle(u, +x)^y = (u, +x)^y \left(\frac{u+yx}{u} - 1\right) = (u, +x)^y \frac{yx}{u}.$$

II. En mettant dans cette équation $u+x$ au lieu de u, on a, $\triangle(u+x, +x)^y = (u+x, +x)^y \frac{yx}{u+x}$, et en substituant (369.), $\triangle(u+x, +x)^y = (u, +x)^y \frac{yx(u+yx)}{u(u+x)}$; donc en déduisant (370.) $\triangle(u+x, +x) - \triangle(u, +x) = (u, +x)^y \frac{yx}{u}\left(\frac{u+yx}{u+x} - 1\right)$, c'est-à-dire

$$371. \quad \triangle^2(u, +x) = (u, +x)^y \frac{y(y-1)x^2}{u(u+x)}.$$

En continuant on trouve

$$372. \quad \triangle^3(u, +x) = (u, +x)^y \frac{y(y-1)(y-2)x^3}{u(u+x)(u+x)}$$

etc.

III. En substituant les expressions trouvées des différences de $(u, +x)^y$ de différents ordres dans (346.), et en même tems la valeur supposée $+x$ de α, on aura

$$373. \quad (u+k, +x)^y = (u, +x)^y \left[1 + \frac{ky}{u} + \frac{k(k-x)}{2} \cdot \frac{y(y-1)}{u(u+x)} + \frac{k(k-x)(k-2x)}{2.3} \cdot \frac{y(y-1)(y-2)}{u(u+x)(u+2x)} \cdots . \right.$$
$$\left. \cdots + \frac{k(k-x)(k-2x)\ldots(k-(n-1)x)}{2.3\ldots.n} \cdot \frac{y(y-1)(y-2)\ldots.(y-(n-1))}{u(u+x)(u+2x)\ldots(u+(n-1)x)}\right] + R_n.$$

Si l'exposant y est un nombre **entier**, la série finit par le dernier terme écrit ci-dessus.

IV. Elle donne pour $u = x = 1$:

$$374. \quad (k+1, +1)^y = (1, +1)^y [1 + k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 \ldots . + k_n y_n] + R_n.$$

V. Elle peut aussi être présentée sous la forme

$$375. \quad (u+k, +x)^y = \frac{(u, +x)^y}{2}\left[u + ky + \frac{k(k-x)}{2} \cdot \frac{y(y-1)}{u+x} + \frac{k(k-x)(k-2x)}{2.3} \cdot \frac{y(y-1)(y-2)}{(u+x)(u+2x)} \cdots .\right].$$

En écrivant y au lieu de $1+y$ dans (367.) on a $\frac{(u,+x)^y}{u} = (u+x, +x)^{y-1}$, donc

376. $$(u+k, +x)^y = (u+x, +x)^{y-1}\left[u+ky+\frac{k(k-x)}{2}.\frac{y(y-1)}{u+x}\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\frac{k(k-x)(k-2x)\ldots.(k-(n-1)x)}{2.3\ldots.n}\,\frac{y(y-1)\ldots.(y-(n-1))}{(u+x)(u+2x)\ldots.(u+(n-1)x)}\right]+R_n.$$

Si dans cette expression on fait $u=0$ et $x=1$, on a

$$(k,+1)^y = (1,+1)^{y-1}y\,[k_1+k_2(y-1)_1+k_3(y-1)_2\ldots.+k_n(y-1)_{n-1}]+R_n,$$

ou bien, $(1,+1)^{y-1}y$ étant $(1,+1)^y$ (38.),

377. $$(k,+1)^y = (1,+1)^y[k_1+k_2(y-1)_1+k_3(y-1]_2\ldots.+k_n(y-1)_{n-1}]+R_n.$$

VI. Si dans (373.) on fait $u=x=-1$, on a

378. $$(k-1,-1)^y = (-1)^y(1,+1)^y\left[1-ky_1+\frac{k(k+1)}{2}y_2-\frac{k(k+1)(k+2)}{2.3}y_3\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.\pm\frac{k(k+1)\ldots.(k+n-1)}{2.3\ldots.n}y_n\right]+R_n$$

ou bien, en mettant k au lieu de $k-1$ et divisant par $(1,+1)^y$,

379. $$\frac{(k,-1)^y}{(1,+1)^y} = (-1)^y\left[1-(k-1)y_1+\frac{(k-1)k}{2}y_2-\frac{(k-1)k(k+1)}{2.3}y_3\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.\pm\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)\ldots.(k+n-2)}{2.3\ldots.n}y_n\right]+R_n.$$

Puisque $\frac{(k,-1)^y}{(1,+1)^y}$ est l'expression du coëfficient binomial k_y, la série à droite dans (379.) donne le développement de ce coëfficient, même pour le cas où l'exposant y n'est pas un nombre entier.

L'expression (377.) donne une autre expression de ce coëfficient en y mettant $-k$ au lieu de $+k$, savoir

380. $$\frac{(k,-1)^y}{(1,+1)^y} = (-1)^y\left[k-\frac{k(k+1)}{2}(y-1)_1+\frac{k(k+1)(k+2)}{2.3}(y-1)_2\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.\pm\frac{k(k+1)(k+2)\ldots.(k+n-1)}{2.3\ldots.n}(y-1)_{n-1}\right]+R_n.$$

VII. Quant à la convergence des séries trouvées dans ce paragraphe, nous en remettrons la recherche à une autre occasion de même que celle

des séries du paragraphe précédent et nous passerons au développement des facultés par le moyen de la variation de l'exposant.

Développement des facultés analytiques par la variation de l'exposant.

42.

I. En variant l'exposant y dans $(u,+x)^y$ la série générale de Taylor (78.) donne

$$381. \quad (u,+x)^{y+k} = (u,+x)^y + \frac{k}{\alpha}((u,+x)^{y+\alpha} - (u,+x)^y)$$
$$+ \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}((u,+x)^{y+2\alpha} - 2(u,+x)^{y+\alpha} + (u,+x)^y) \ldots + R_n .$$

Mais en vertu de la première équation fondamentale (38.) on a

$$382. \quad \begin{cases} (u,+x)^{y+\alpha} = (u,+x)^y (u+yx,+x)^\alpha, \\ (u,+x)^{y+2\alpha} = (u,+x)^y (u+yx,+x)^{2\alpha}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

donc ici

$$383. \quad \begin{cases} \Delta (u,+x)^y = (u,+x)^y [(u+yx,+x)^\alpha - 1], \\ \Delta^2 (u,+x)^y = (u,+x)^y [(u+yx,+x)^{2\alpha} - 2(u+yx,+x)^\alpha + 1], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et en substituant dans (381.)

$$384. \quad (u,+x)^{y+k} = (u,+x)^y \Big[1 + \frac{k}{\alpha}((u+yx,+x)^\alpha - 1)$$
$$+ \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}((u+yx,+x)^{2\alpha} - 2(u+yx,+x)^\alpha + 1) \ldots \Big] + R_n .$$

Si dans cette équation on fait $y=0$ et la quantité arbitraire $\alpha = 1$, elle donne

$$385. \quad (u,+x)^k = 1 + k_1\big((u,+x)^1 - 1\big) + k_2\big((u,+x)^2 - 2(u,+x)^1 + 1\big)$$
$$+ k_3\big((u,+x)^3 - 3(u,+x)^2 + 3(u,+x) - 1\big) \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + k_n\big((u,+x)^n - n_1(u,+x)^{n-1} + n_2(u,+x)^{n-2} \ldots \pm 1\big) + R_n .$$

II. Si dans l'expression (384.) on fait $x=0$ et $\alpha = 1$ elle donne

$$386. \quad u^{y+k} = u^y(1 + k_1(u-1) + k_2(u-1)^2 \ldots + k_n(u-1)^n) + R_n .$$

C'est comme on voit la série du binôme des puissances (144.).

Si dans (384.) on fait $x=0$, $\alpha=0$, on a

$$387.\quad u^{y+k}=u^y\left[1+k\frac{u^0-1}{0}+\frac{k^2}{2}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^2\ldots.+\frac{k^n}{2.3\ldots.n}\left(\frac{u^0-1}{0}\right)^n\right]+R_n.$$

C'est comme on voit la série des quantités exponentielles (180.).

III. Si dans (385.) on fait $u=0$, toutes les factorielles qui entrent dans la série à droite, disparoissent et les coëfficiens de k_1, k_2, k_3, ... seréduisent alternativement à $+1$ et -1; donc la série (385.) donne dans ce cas

$$388.\quad (0,+x)^k=1-k_1+k_2-k_3\ldots.\pm k_n.$$

La valeur de la série à droite est $(1-1)^k$ et cette quantité est toujours zéro, si k est positif. On voit de là, que la valeur d'une faculté analytique, dont la base est zéro, est toujours 0 toutes les fois que l'exposant est positif, même s'il n'est pas un nombre entier. Cela complète le théorème (§. 13. VII.).

IV. Quant à la convergence de la série (385.) nous en différerons la recherche. La série est ordinairement peu convergente. Mais on trouve à sa place, en variant l'exposant, une autre série toujours convergente, en prenant les logarithmes des facultés. Nous donnerons l'analyse complète de cette série dans le paragraphe suivant.

43.

I. En prenant les logarithmes naturels ou hyperboliques (§. 29. III.) de la faculté $(u,+x)^k$ et en variant l'exposant y, la série générale de Taylor donne

$$389.\quad \log(u,+x)^{y+k}=\log(u,+x)^y+\frac{k}{\alpha}\left(\log(u,+x)^{y+\alpha}-\log(u,+x)^y\right)$$
$$+\frac{k(k-\alpha)}{2}\left(\log(u,+x)^{y+2\alpha}-2\log(u,+x)^{y+\alpha}+\log(u,+x)^y\right)\ldots.+R_n.$$

Si dans cette expression on fait $y=0$ et la quantité arbitraire $\alpha=1$, on a, $(u,+x)^0$ étant 1 (46.) et de là $\log(u,+x)^0=0$,

$$390.\quad \log(u,+x)^k=k_1\log(u,+x)^1+k_2(\log(u,+x)^2-2\log(u,+x)^1)$$
$$+k_3(\log(u,+x)^3-3\log(u,+x)^2+3\log(u,+x)^1)\ldots.$$
$$\ldots.+k_n(\log(u,+x)^r-n_1\log(u,+x)^{n-1}+n_2\log(u,+x)^{n-2}\ldots.\pm n_{n-1}\log(u,+x)^1)+R_n.$$

II. Dans cette expression le premier terme du reste R_n qui, comme terme général, exprime tous les autres, est

$$391.\quad T_{n+1} = k_{n+1}\left[\log(u,+x)^{n+1} - (n+1)_1 \log(u,+x)^n + (n+1)_2 \log(u,+x)^{n-1} \ldots \pm (n+1)_n \log(u,+x)^1\right].$$

Suivant (44.), n **étant un nombre entier, on a**

$$392.\quad \begin{cases} (u,+x)^1 = u \\ (u,+x)^2 = u(u+x) \\ (u,+x)^3 = u(u+x)(u+2x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (u,+x)^{n+1} = u(u+x)(u+2x)\ldots(u+nx) \end{cases}$$

donc

$$393.\quad \begin{cases} \log(u,+x)^1 = \log u, \\ \log(u,+x)^2 = \log u + \log(u+x), \\ \log(u,+x)^3 = \log u + \log(u+x) + \log(u+2x), \\ \cdot \\ \log(u,+x)^{n+1} = \log u + \log(u+x) + \log(u+2x) \ldots + \log(u+nx). \end{cases}$$

Cela étant substitué dans (391.) donne

$$394.\quad \frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \log u + \log(u+x) + \log(u+2x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \log(u+nx)$$
$$- (n+1)_1 \left(\log u + \log(u+x) + \log(u+2x) \ldots\ldots\ldots + \log(u+(n-1)x)\right)$$
$$+ (n+1)_2 \left(\log u + \log(u+x) + \log(u+2x) \ldots + \log(u+(n-2)x)\right)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\mp (n+1)_{n-1}\left(\log u + \log(u+x)\right)$$
$$\pm (n+1)_n \log u$$

ou bien

$$395.\quad \frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \log u\left(1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm (n+1)_n\right)$$
$$+ \log(u+x)\left(1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \pm (n+1)_{n-1}\right)$$
$$+ \log(u+2x)\left(1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_3 \ldots \pm (n+1)_{n-2}\right)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+ \log\left(u+(n-1)x\right)\left(1 - (n+1)_1\right)$$
$$+ \log(u+nx)$$

Mais en vertu de (365. §. 40. VII.) on a

$$396.\quad \begin{cases} 1 - (n+1)_1 = -n_1, \\ 1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 = +n_2, \\ 1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_3 = -n_3, \\ \cdot \\ 1 - (n+1)_1 + (n+1)_2 - (n+1)_3 \ldots\ldots \pm (n+1)_n = \pm n_n = \pm 1, \end{cases}$$

donc

397. $$\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \log(u+nx) - n_1 \log(u+(n-1)x) + n_2 \log(u+(n-2)x) \ldots \pm \log u$$

ou bien

398. $$T_{n+1} = k_{n+1} \log \left[\frac{u+nx}{u+(n-1)x)^{n_1}} \cdot \frac{(u+(n-2)x)^{n_2}}{(u+(n-3)x)^{n_3}} \cdot \frac{(u+(n-4)x)^{n_4}}{(u+(n-5)x)^{n_5}} \ldots \right].$$

En substituant cela dans (390.) on trouve

399. $$\log(u,+x)^k = k_1 \log u + k_2 \log\left(\frac{u+x}{u}\right) + k_3 \log\left(\frac{(u+2x)u}{(u+x)^2}\right)$$
$$+ k_4 \log\left(\frac{(u+3x)(u+x)^3}{(u+2x)^3 u)}\right) \ldots + k_n \log\left(\frac{(u+(n-1)x)}{(u+(n-2)x)^{(n-1)_1}} \cdot \frac{(u+(n-3)x)^{(n-1)_2}}{(u+(n-4)x)^{(n-1)_3}} \ldots\right) + R_n.$$

C'est l'expression générale d'une faculté analytique trouvée par la variation de l'exposant.

III. Il s'agit maintenant de savoir si la série (399.) est convergente on non.

Suivant le théorème général de la convergence de la série générale de Taylor (§. 21.) la série (399.) sera convergente, si aucun de ses termes n'est ni imaginaire ni infini, et si les valeurs que prend le premier terme T_{n+1} du reste R_n pour la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}}$ depuis y jusqu'à $y+k$, sont zéro toutes les deux pour $n=\infty$.

Si l'on suppose réelles toutes les quantités qui entrent dans (399.), aucun terme de la série ne sera infini. Donc les conditions de la convergence de la série se réduisent à celle, que les valeurs que prend T_{n+1} pour la plus grande et la plus petite valeur de $\frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}}$ depuis y jusqu'à $y+k$ doivent être zéro pour $n=\infty$.

Ici la quantité $\frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}}$ est celle qui dans le premier terme du reste R_n dans (389.) multiplie $\frac{k(k-\alpha)(k-2\alpha)\ldots(k-n\alpha)}{2.3\ldots(n+1)}$ savoir

400. $$\frac{\triangle^{n+1} Fy}{\alpha^{n+1}} = \log(u,+x)^{y+(n+1)\alpha} - (n+1)_1 \log(u,+x)^{y+n\alpha} + (n+1)_2 \log(u,+x)^{y+(n-1)\alpha} \ldots$$
$$\ldots \pm \log(u,+x)^y$$

ou bien, la quantité arbitraire α ayant été supposée $=1$,

401. $\triangle^{n+1} Fy = \log(u,+x)^{y+n+1} - (n+1)_1 \log(u,+x)^{y+n} + (n+1)_2 \log(u,+x)^{y+n-1} \ldots$
$\ldots \pm \log(u,+x)^{y}.$

Mais en vertu de la première équation fondamentale des facultés (38.) on a

402. $$\begin{cases} (u,+x)^{y+n+1} = (u,+x)^{y}(u+ky,+x)^{n+1}, \\ (u,+x)^{y+n} = (u,+x)^{y}(u+ky,+x)^{n}, \\ (u,+x)^{y+n-1} = (u,+x)^{y}(u+ky,+x)^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

donc, en prenant les logarithmes,

$$\triangle^{n+1} Fy = (1-(n+1)_1+(n+1)_2 \ldots \pm 1)\log(u,+x)^{y}$$
$$+\log(u+xy,+x)^{n+1} - (n+1)_1 \log(u+xy,+x)^{n} + (n+1)_2 \log(u+xy,+x)^{n-1} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots \pm (n+1)_n \log(u+xy,+x)^{1}$$

ou bien $1-(n+1)_1+(n+1)_2 \ldots \pm 1$ étant $= (1-1)^{n+1} = 0$,

403. $\triangle^{n+1} Fy = \log(u+xy,+x)^{n+1} - (n+1)_1 \log(u+xy,+x)^{n} + (n+1)_2 \log(u+xy,+x)^{n-1} \ldots$
$\ldots\ldots\ldots \pm (n+1)_n \log(u+xy,+x)^{1}.$

et il s'agit de la plus grande et de la plus petite valeur que cette quantité prend pour les différentes valeurs de y depuis y jusqu'a $y+k$, ou ce qui est la même chose pour les différentes valeurs de u depuis $u+xy$ jusqu'à $u+x(y+k)$.

Mais nous avons fait plus haut $y=0$. Donc il sagit de la plus grande et de la plus petite valeur que prend la quantité $\triangle^{n+1} Fy$ (403.) pour les différentes valeurs de u depuis u jusqu'à $u+kx$.

La valeur de $\triangle^{n+1} Fy$ (403.) pour $u=u$ est celle qui dans (391.) multiplie k_{n+1} et qui se réduit à celle (397.). Donc enfin il s'agit de connoître la valeur de T_{n+1} (398.) pour les valeurs différentes de u depuis u jusqu'à $u+kx$ et pour $n=\infty$. Si cette valeur est zéro, la série (399.) sera convergente, et elle ne le sera pas si T_{n+1} n'est pas zéro.

IV. L'expression de $\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}}$ représentée sous la forme (398.) a évidemment un nombre égal de facteurs dans le numérateur et dans le dénominateur du logarithmande; car le nombre des facteurs dont se compose le numérateur est $1+n_2+n_4\ldots$, et celui des facteurs du dénominateur est $n_1+n_3+n_5\ldots$ et on a

$$1+n_2+n_4\ldots = n_1+n_3+n_5\ldots$$

puisque

404. $1-n_1+n_2-n_3\ldots\pm n = (1-1)^n = 0.$

Donc on peut diviser tous les logarithmandes des termes de $\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}}$ (397.) par une quantité quelconque, sans diminuer ni augmenter la valeur de $\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}}$, et au lieu de (397.) on peut écrire

$$405. \quad \frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \left(\log\frac{u}{x}+n\right) - n_1\log\left(\frac{u}{x}+n-1\right) + n_2\log\left(\frac{u}{x}+n-2\right)\ldots. \pm \log\frac{u}{x}$$

ou bien, si pour abréger on fait $\frac{u}{x}+n+1=\lambda$,

$$406. \quad \frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \log(\lambda-1) - n_1\log(\lambda-2) + n_2\log(\lambda-3)\ldots. \pm \log(\lambda-(n+1)).$$

Mais par la même raison on peut diviser tous les logarithmandes de cette expression par λ. Donc on peut aussi écrire

$$407. \quad \frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \log\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) - n_1\log\left(1-\frac{2}{\lambda}\right) + n_2\log\left(1-\frac{3}{\lambda}\right)\ldots. \pm \log\left(1-\frac{n+1}{\lambda}\right).$$

Tous les logarithmandes de cette expression seront >0 et <1 si $\lambda > n+1$, c'est-à-dire si $\frac{u}{x}$ est positif, ou bien si u et x ont le même signe. Donc, sous cette condition, on pourra développer tous les logarithmes de la série (407.) suivant la formule (210. §. 29. VII.) qui, comme il y a été demontré, est convergente dans les cas actuels. On trouve

$$408. \quad \begin{cases} \log\left(1-\frac{1}{\lambda}\right) = -\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\lambda^4}\ldots. + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\lambda^n} + \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\lambda^{n+1}}\ldots.\right), \\ \log\left(1-\frac{2}{\lambda}\right) = -\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2^3}{\lambda^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2^4}{\lambda^4}\ldots. + \frac{1}{n}\cdot\frac{2^n}{\lambda^n} + \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\ldots.\right), \\ \log\left(1-\frac{3}{\lambda}\right) = -\left(\frac{3}{\lambda} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3^3}{\lambda^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3^4}{\lambda^4}\ldots. + \frac{1}{n}\cdot\frac{3^n}{\lambda^n} + \frac{1}{n+1}\cdot\frac{3^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\ldots.\right), \\ \ldots\ldots\ldots\

409. $$-\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \frac{1}{\lambda}(1 - n_1 2 + n_2 3 - n_3 4 \ldots\ldots \mp n_{n-1}.n \pm n+1)$$
$$+ \frac{1}{2\lambda^2}(1 - n_1 2^2 + n_2 3^2 - n_3 4^2 \ldots\ldots \mp n_{n-1}.n^2 \pm (n+1)^2)$$
$$+ \frac{1}{3\lambda^3}(1 - n_1 2^3 + n_2 3^3 - n_3 4^3 \ldots\ldots \mp n_{n-1}.n^3 \pm (n+1)^3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{n\lambda^n}(1 - n_1 2^n + n_2 3^n - n_3 4^n \ldots\ldots \mp n_{n-1}.n^n \pm (n+1)^n)$$
$$+ \frac{1}{(n+1)\lambda^{n+1}}(1 - n_1 2^{n+1} + n_2 3^{n+1} - n_3 4^{n+1} \ldots \mp n_{n-1}.n^{n+1} \pm (n+1)^{n+1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ici les séries à droite, comme il est aisé de voir, expriment les n^{mes} différences des nombres naturels 1, 2, 3, ... $n+1$ et de leur différentes puissances à l'infini. Les valeurs de ces différences jusqu'à le $(n-1)^{\text{me}}$ sont, comme on sait, zéro, c'est-à-dire on a

410. $$1 - n_1 2^\mu + n_2 3^\mu - n_3 4^\mu \ldots, \pm (n+1)^\mu = 0$$

pour toutes les valeurs de μ depuis 1 jusqu'à $n-1$. Donc l'expression (409.) se réduit à

411. $$-\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = \frac{1}{n\lambda^n}(1 - n_1 2^n + n_2 3^n - n_3 4^n \ldots\ldots \mp n_{n+1} n^n \pm (n+1)^n)$$
$$+ \frac{1}{(n+1)\lambda^{n+1}}(1 - n_1 2^{n+1} + n_2 3^{n+1} - n_3 4^{n+1} \ldots \mp n_{n+1} n^{n+1} \pm (n+1)^{n+1})$$
$$+ \frac{1}{(n+2)\lambda^{n+2}}(1 - n_1 2^{n+2} + n_2 3^{n+2} - n_3 4^{n+2} \ldots \mp n_{n+1} n^{n+2} \pm (n+1)^{n+2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il est vrai qu'ici les séries à droite ne sont pas zéro; mais leurs valeurs seront nécessairement plus petites que celles de leurs derniers termes $(n+1)^n$, $(n+1)^{n+1}$, $(n+1)^{n+2}$, ... car toutes les différences de n^{mes}, $(n+1)^{\text{mes}}$, $(n+2)^{\text{mes}}$ etc. puissances des nombres naturels 1, 2, 3, ... $n+1$ sont évidemment plus petites que la puissance du plus haut nombre elle même, puisqu'on les trouve toutes en soustrayant des nombres plus petits des nombres plus grands, et qu'elles sont d'ailleurs toutes positives. Donc la valeur absolue de $\frac{T_{n+1}}{k_{n+1}}$ ne pourra être plus grande que celle de la quantité

$$\frac{1}{n\lambda^n}(n+1)^n + \frac{1}{(n+1)\lambda^{n+1}}(n+1)^{n+1} + \frac{1}{(n+2)\lambda^{n+2}}(n+1)^{n+2} \ldots.$$

c'est-à-dire de la quantité

$$412. \quad \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^n + \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^{n+1} + \frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^{n+2} \ldots.$$

Mais cette quantité, de son côté, n'est pas plus grande que

$$413. \quad \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^n \left[1 + \frac{n+1}{\lambda} + \left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^3 \ldots.\right] = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{\lambda}\right)^n \frac{1}{1-\frac{n+1}{\lambda}}$$

et cette dernière quantité est évidemment zéro pour $n = \infty$, $\frac{n+1}{\lambda}$ étant < 1 suivant l'hypothèse. Donc on a

$$414. \quad \frac{T_{n+1}}{k_{n+1}} = 0 \text{ pour } n = \infty.$$

Mais on sait que k_{n+1} est zéro pour $n = \infty$ si k est > -1 (§. 26.); donc on a

$$415. \quad T_{n+1} = 0 \text{ pour } n = \infty$$

sous condition que u et x ont des signes égaux et que k soit plus grand que -1. Enfin, puisqu'on a également $T_{n+1} = 0$ pour une valeur quelconque de u, les deux valeurs de T_{n+1} (III.) qui déterminent la convergence de la série seront zéro en même tems, n étant supposé ∞. Donc la série (399.) sera convergente sous les conditions que nous venons d'énoncer.

V. Les logarithmes qui entrent dans la série (399.) ont été supposés de ceux qu'on appelle naturels ou hyperboliques. Mais puisque les termes de la série sans exception contiennent tous également des logarithmes, on pourra multiplier toute la série par le module de tel autre système de logarithmes qu'on voudra. Mais par là les logarithmes naturels se réduisent à d'autres du nouveau système. Donc la série (399.) aura également lieu quel que soit le système d'où l'on tire les logarithmes qu'on veut introduire.

VI. Le terme à gauche dans (399.) et le premier terme à droite peuvent être mis sous la forme

$$\log\left(\left(\frac{u}{x}, +1\right)^k x^k\right) = \log\left(\frac{u}{x}, +1\right)^k + k\log x \text{ et } k\log\left(\frac{u}{x}, x\right) = k\log\frac{u}{x} + k\log x.$$

Ces facteurs des logarithmandes de tous les autres termes à droite, comme nous l'avons vu plus haut, peuvent être divisés par x en haut et en bas, sans changer par là la valeur des termes. L'effet de cette dernière opération est, que partout $\frac{u}{x}$ prend la place de u et 1 la place de x. Donc, si au lieu de $\frac{u}{x}$ on veut écrire λ, l'expression (399.) se réduit à

$$416.\quad \log(\lambda,+1)^k = k_1\log\lambda + k_2\log\frac{\lambda+1}{\lambda} + k_3\log\frac{(\lambda+2)\lambda}{(\lambda+1)^2} + k_4\log\frac{(\lambda+3)(\lambda+1)^3}{(\lambda+2)^3\lambda} \ldots.$$
$$\ldots. + k_n\log\left(\frac{\lambda+n-1}{(\lambda+n-2)^{(n-1)_1}}\cdot\frac{(\lambda+n-3)^{(n-1)_2}}{(\lambda+n-4)^{(n-1)_3}}\ldots.\right) + R_n$$

et cette expression, comme l'on voit par la manière dont la réduction de (399.) a été exécutée, est aussi générale que celle (399.).

Si l'on fait $\lambda = 1$ dans (416.) on trouve

$$417.\quad \log(1,+1)^k = k_2\log 2 + k_3\log\tfrac{3}{4} + k_4\log\tfrac{3}{2}\tfrac{2}{7} + k_5\log\tfrac{3}{4}\tfrac{6}{0}\tfrac{4}{9}\tfrac{5}{6}\ldots. + R_n.$$

VII. Les coëfficiens de k_n dans (399. et 416.) n'étant autre chose que les différences $(n-1)^{\text{mes}}$ des logarithmes de $u+(n-1)x$, $u+(n-2)x$, ... u et de $\lambda+n-1$, $\lambda+n-2$, ... λ, les séries (399. 416. et 417.) pourront aussi être présentées sous la forme suivante

$$418.\quad \log(u,+x)^k$$
$$= k_1\log u + k_2\triangle\log(u+x) + k_3\triangle^2\log(u+2x)\ldots. + k_n\triangle^{n-1}\log(u+(n-1)x) + R_n,$$

$$419.\quad \log(\lambda,+1)^k$$
$$= k_1\log\lambda + k_2\triangle\log(\lambda+1) + k_3\triangle^2\log(\lambda+2)\ldots.. + k_n\triangle^{n-1}\log(\lambda+n-1) + R_n,$$

$$420.\quad \log(1,+1)^k$$
$$= \quad k_2\triangle\log 2 \quad + k_3\triangle^2\log 3\ldots\ldots\ldots + k_n\triangle^{n-1}\log n + R_n.$$

On pourra très commodément calculer les logarithmes des facultés suivant ces dernières expressions, car il n'y a qu'à prendre les différences successives des logarithmes des nombres u, $u+x$, $u+2x$, ... $u+(n-1)x$, ou de celles λ, $\lambda+1$, $\lambda+2$, ... $\lambda+n-1$, ou bien de 1, 2, 3, ... n et à les multiplier par les coëfficiens binomiaux k_1, k_2, k_3, ... k_n.

VIII. Il est vrai qu'en faisant le calcul de $(1,+1)^k$ suivant la formule (420.) on trouvera que la série n'est que peu convergente, puisque les différences des logarithmes des premiers nombres naturels 1, 2, 3....

ne vont en diminuant que très lentement. Mais néanmoins, en partant de la série (419.), on pourra trouver le logarithme de la faculté $(1,+1)^k$ par une expression aussi convergente qu'on voudra, car cette série sera très convergente si λ est un nombre assez grand. Supposons donc qu'on ait à calculer $(\lambda,+1)^k$ pour une valeur arbitraire assez grande de λ, la formule (52.) donnera, en y faisant $u=x=1$,

$$\frac{(1+k,+1)^y}{(1,+1)^y}=\frac{(1+y,+1)^k}{(1,+1)^k},$$

et en faisant $1+y=\lambda$,

$$\frac{(1+k,+1)^{\lambda-1}}{(1,+1)^{\lambda-1}}=\frac{(\lambda,+1)^k}{(1,+1)^k}.$$

De là on tire

$$421.\quad (1,+1)^k=(\lambda,+1)^k\frac{(1,+1)^{\lambda-1}}{(1+k,+1)^{\lambda-1}}.$$

Ici λ est un nombre entier arbitraire. Donc les quantités $(1,+1)^{\lambda-1}$ et $(1+k,+1)^{\lambda-1}$ pourront être calculées par la seule multiplication. Donc ayant trouvé $(\lambda,+1)^k$ par la série (419.) on aura sur le champ $(1,+1)^k$.

Expressions des fonctions angulaires par les facultés.

44.

Ces expressions, que nous citerons comme du nombre de ces applications des facultés analytiques qui se présentent les premières, se tirent des équations (340. 341.) comme suit.

Ces équations donnent

$$422.\quad \sin x=x.\frac{(\pi-x)(2\pi-x)(3\pi-x)\ldots.(\pi+x)(2\pi+x)(3\pi+x)\ldots.}{\pi.2\pi.3\pi\ldots.\pi.2\pi.3\pi\ldots.}\text{ et}$$

$$423.\quad \cos x=\frac{(\pi-2x)(3\pi-2x)(5\pi-2x)\ldots.(\pi+2x)(3\pi+2x)(5\pi+2x)\ldots.}{\pi.3\pi.5\pi\ldots.\pi.3\pi.5\pi\ldots.}$$

donc, en faisant usage de la notation des facultés,

$$\left.\begin{aligned}424.\quad \sin x&=x.\frac{(\pi-x,+\pi)^n(\pi+x,+\pi)^n}{(\pi,+\pi)^n(\pi,+\pi)^n}\\ 425.\quad \cos x&=\frac{(\pi-2x,+2\pi)^n(\pi+2x,+2\pi)^n}{(\pi,+2\pi)^n(\pi,+2\pi)^n}\end{aligned}\right\}\text{ pour } n=\infty.$$

Mais en vertu des expression (57. et 39.) on a

426. $(\pi-x,+\pi)^n = \dfrac{(1,+1)^n n^{-\frac{x}{\pi}}.\pi^n}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}}$, $(\pi+x,+\pi)^n = \dfrac{(1,+1)^n n^{\frac{x}{\pi}}\pi^n}{(1,+1)^{\frac{x}{\pi}}}$,

427. $(\pi-2x,+2\pi)^n = \dfrac{(1,+1)^n n^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}\pi^n}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}}$, $(\pi+2x,+2\pi)^n = \dfrac{(1,+1)^n n^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}\pi^n}{(1,+1)^{\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}}$,

428. $(\pi,+\pi)^n = (1,+1)^n\pi^n$, $(\pi,+2\pi)^n = \dfrac{(1,+1)^n n^{-\frac{1}{2}}\pi^n}{(1,+1)^{-\frac{1}{2}}}$.

En substituant cela dans **(424. 425.)**, on a

$$429.\quad \sin x = \frac{x}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}(1,+1)^{+\frac{x}{\pi}}},$$

$$430.\quad \cos x = \frac{(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(1,+1)^{+\frac{1}{2}}}{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}(1,+1)^{+\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}}},$$

Voila les expressions connues de $\sin x$ et $\cos x$ par les facultés analytiques. On les tire, comme on voit, des équations fondamentales sans la moindre difficulté.

Puisque suivant la première équation fondamentale des facultés (38.) $(1+1)^{-\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2},+1)^{-\frac{x}{\pi}}$ et $(1,+1)^{-\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2},+1)^{+\frac{x}{\pi}}$ l'expression de $\cos x$ (430.) peut aussi être présentée sous la forme:

$$431.\quad \cos x = \frac{1}{(\frac{1}{2},+1)^{-\frac{x}{\pi}}(\frac{1}{2},+1)^{+\frac{x}{\pi}}}.$$

En vertu de $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos x = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ l'expression (430.) donne aussi

$$432.\quad \cos x = \frac{(1,+1)^{-\frac{x}{\pi}}(1,+1)^{+\frac{x}{\pi}}}{(1,+1)^{-\frac{2x}{\pi}}(1,+1)^{+\frac{2x}{\pi}}}$$

Si l'on fait $x = \frac{1}{2}\pi$ on a $\sin x = 1$, donc en vertu de (429.)

$$1 = \frac{\frac{1}{2}\pi}{(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(1,+1)^{+\frac{1}{2}}}$$

et de là

$$433.\quad \pi = 2(1,+1)^{-\frac{1}{2}}(1,+1)^{+\frac{1}{2}}.$$

Mais $(1,+1)^{+\frac{1}{2}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2},+1)^1 = \frac{1}{2}(1,+1)^{-\frac{1}{2}}$ (38. 40.), donc $(1,+1)^{-\frac{1}{2}} = 2(1,+1)^{\frac{1}{2}}$ et suivant (433.) $\pi = 4((1,+1)^{\frac{1}{2}})^2$ et de là

$$434. \quad \pi^{\frac{1}{2}} = 2(1,+1)^{\frac{1}{2}},$$

et également $\pi = 2(1,+1)^{-\frac{1}{2}} . \frac{1}{2}(1,+1)^{-\frac{1}{2}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}}$, donc

$$435. \quad \pi^{\frac{1}{2}} = (1,+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Application des expressions des fonctions angulaires par les facultés à un cas particulier de l'équation (66.).

45.

Nous donnerons cette application qui se présente comme une des premières des expressions (§. 44.).

I. Dans le cas où y est un nombre entier, l'équation (66.), en vertu de son développement (67.), peut être écrite comme suit:

$$436. \quad (u,+x)^{yk} = (u,+yx)^k (u+x,+yx)^k (u+2x,+yx)^k \ldots . (u+(y-1)x,+yx)^k.$$

Mais toute faculté pouvant être réduite par l'équation (55.) à d'autres, dont la base et la différence sont l'unité, nous nous bornerons au cas où $u = x = 1$.

Dans ce cas l'équation (436.) donne

$$437. \quad (1,+1)^{yk} = (1,+y)^k (2,+y)^k (3,+y)^k \ldots . (y,+y)^k.$$

En vertu de l'équation (55.) on a

$$438. \quad \begin{cases} (1,+y)^k = y^k \dfrac{(1,+1)^{\frac{1}{y}-1+k}}{(1,+1)^{\frac{1}{y}-1}}, \\ (2,+y)^k = y^k \dfrac{(1,+1)^{\frac{2}{y}-1+k}}{(1,+1)^{\frac{2}{y}-1}}, \\ (3,+y)^k = y^k \dfrac{(1,+1)^{\frac{3}{y}-1+k}}{(1,+1)^{\frac{3}{y}-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (y,+y)^k = y^k \dfrac{(1,+1)^{\frac{y}{y}-1+k}}{(1,+1)^{\frac{y}{y}-1}} = y^k (1,+1)^k. \end{cases}$$

donc, en substituant ces expressions dans (437.), le nombre des facteurs à droite étant y, on a

$$439.\quad (1,+1)^{yk} = y^{yk}\,\frac{(1,+1)^{\frac{1}{y}-1+k}\cdot(1,+1)^{\frac{2}{y}-1+k}\cdot(1,+1)^{\frac{3}{y}-1+k}\cdots(1,+1)^{k}}{(1,+1)^{\frac{1}{y}-1}\cdot(1,+1)^{\frac{2}{y}-1}\cdot(1,+1)^{\frac{3}{y}-1}\cdots(1,+1)^{0}}.$$

Dans cette expression les exposans des facultés à droite en haut et en bas vont en croissant, et chaque exposant surpasse celui qui le précède de la quantité $\frac{1}{y}$. Donc en mettant les facteurs dans l'ordre inverse, on a

$$440.\quad (1,+1)^{yk} = y^{yk}\,\frac{(1,+1)^{k}(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\cdots(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}}{(1,+1)^{0}(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}\cdots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}}.$$

II. Cela posé, mettant dans (429.) πx au lieu de x, on a

$$441.\quad \sin\pi x = \frac{\pi x}{(1,+1)^{-x}(1,+1)^{+x}}.$$

Mais en vertu de la première équation fondamentale des facultés (38.) on a

$$(1,+1)^{x-1} = (1,+1)^{x}(1+x,+1)^{-1} = \frac{(1,+1)^{x}}{(1+x-1,+1)^{1}}\ (47.) = \frac{(1,+1)^{x}}{x}\ (40.),$$

donc $(1,+1)^{x} = x\,(1,+1)^{x-1}$, et en substituant dans (441.)

$$442.\quad \sin\pi x = \frac{\pi}{(1,+1)^{x-1}(1,+1)^{-x}}$$

ou bien

$$443.\quad (1,+1)^{x-1}(1,+1)^{-x} = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

En faisant dans cette équation successivement $x = \frac{1}{y}, \frac{2}{y}, \frac{3}{y}\ldots$, elle donne

$$444.\quad \begin{cases} (1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = \dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{y}}, \\ (1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{y-2}{y}} = \dfrac{\pi}{\sin\dfrac{2\pi}{y}}, \\ (1,+1)^{-\frac{3}{y}}(1,+1)^{-\frac{y-3}{y}} = \dfrac{\pi}{\sin\dfrac{3\pi}{y}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

III. Ces expressions pourront être appliquées aux facteurs du dénominateur de la partie à droite de l'équation (440.).

Le nombre de ces facteurs, excepté le premier qui est l'unité, est $y-1$. Donc si y est impair, ce nombre est pair et $=\frac{y-1}{2}$; si y est pair, il est impair; dans ce cas celui au milieu est $(1,+1)^{-\frac{1}{2}}=\pi^{\frac{1}{2}}$ (435.) et le nombre des autres facteurs est $\frac{y-2}{2}$.

Donc le dénominateur de la partie à droite de l'équation (440.) en vertu de (444.) peut être exprimé comme suit

445. $$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{y}}\ldots\ldots\frac{\pi}{\sin\frac{(y-1)\pi}{2y}}$$

si y est impair, et

446. $$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{y}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{y}}\ldots\ldots\frac{\pi}{\sin\frac{(y-2)\pi}{2y}}\pi^{\frac{1}{2}}$$

si y est pair.

VI. Mais en vertu des équations (332. 333.) on a

447. $$\sin\frac{\pi}{y}.\sin\frac{2\pi}{y}.\sin\frac{3\pi}{y}\ldots\ldots\sin\frac{(y-1)\pi}{2y}=\frac{y^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{y-1}{2}}}$$ si y est impair, et

448. $$\sin\frac{\pi}{y}.\sin\frac{2\pi}{y}.\sin\frac{3\pi}{y}\ldots\ldots\sin\frac{(y-2)\pi}{2y}=\frac{y^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{y-1}{2}}}$$ si y est pair.

Donc les expressions (445. 446.), dont les facteurs à droite sont au nombre $\frac{y-1}{2}$ dans la première, et au nombre de $\frac{y-2}{2}$ dans la seconde, donnent

$$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}=\frac{\pi^{\frac{y-1}{2}}2^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}=\frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$$ si y est impair, et

$$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}=\frac{\pi^{\frac{y-2}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}=\frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$$ si y est pair;

d'ou l'on voit, que quelque nombre entier que soit y, pair ou impair, on a

449. $$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}(1,+1)^{-\frac{2}{y}}(1,+1)^{-\frac{3}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}}=\frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.$$

En substituant cette expression dans (440.) on a

450. $$(1,+1)^{yk}=\frac{y^{yk+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}(1,+1)^{k}(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots\ldots(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}.$$

Voilà l'expression d'une faculté $(1,+1)^{yk}$ dont l'exposant yk est un multiple entier de k, par le produit d'autres facultés dont les exposans ne contiennent que k suivi de fractions dépendantes de y.

Cette expression est celle que Mr. Legendre a trouvée par une autre voie dans son traité des fonctions elliptiques tom. 2. page 444. où l'expression Γx s'accorde avec notre $(1,+1)^{x-1}$, comme on le voit par la formule 2. page 416. du même ouvrage. La formule de cet illustre auteur (page 444.), écrite avec nos signes, est la suivante

$$451.\quad (1,+1)^{x-1}(1,+1)^{x-1+\frac{1}{n}}(1,+1)^{x-1+\frac{2}{n}}\ldots(1,+1)^{x-1+\frac{n-1}{n}} = (1,+1)^{nx-1}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx}.$$

Si dans cette expression on met d'abord $x+\frac{1}{n}$ au lieu de x et qu'on écrive les facteurs à gauche dans l'ordre inverse, elle se reduit à

$$452.\quad (1,+1)^{x}(1,+1)^{x-\frac{1}{n}}(1,+1)^{x-\frac{2}{n}}\ldots(1,+1)^{x-\frac{n-1}{n}} = (1,+1)^{nx}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nx}$$

et cette expression, en y écrivant k et y au lieu de x et n, s'accorde parfaitement avec (450.). Cela offre une preuve à posteriori de l'exactitude de la formule générale (66. ou 67. ou 436.) de laquelle nous sommes partis.

V. Nous donnerons encore une autre démonstration de la formule (450.) sans le secours de la formule générale (436.). Elle sera la troisième du théorème, celle de Mr. Legendre étant la première.

Si fx et φx désignent des fonctions quelconques de x et qu'on ait l'équation

$$453.\quad \frac{f(x+\alpha)}{fx} = \frac{\varphi(x+\alpha)}{\varphi x},$$

où α est une quantité quelconque, qui peut aussi être zéro, on peut en conclure, comme on sait, que φx ne peut différer de fx que par un facteur A independant de x, de sorte qu'on a

$$454.\quad fx = A\varphi x.$$

VI. Cela posé, nous ferons remarquer qu'en vertu de la première équation fondamentale des facultés (38.) on a

$$(1,+1)^{k-1} = (1,+1)^{k}(1+k,+1)^{-1},$$

donc, $(1+k,+1)^{-1}$ en vertu de l'équation (47.) étant $= \frac{1}{(1+k-1,+1)^{k}} = \frac{1}{k}$:

$$455.\quad (1,+1)^{k-1} = \frac{(1,+1)^{k}}{k}.$$

Cela donne, en écrivant yk au lieu de k,

$$456. \quad (1,+1)^{yk-1} = \frac{(1,+1)^{yk}}{yk}.$$

En divisant (455.) par (456.) on a

$$\frac{(1,+1)^{k-1}}{(1,+1)^{yk-1}} = \frac{(1,+1)^{k}.y}{(1,+1)^{yk}},$$

ou bien

$$457. \quad \frac{(1,+1)^{k}}{(1,+1)^{k-1}} = \frac{(1,+1)^{yk}y^{-1}}{(1,+1)^{yk-1}}.$$

Si dans cette expression on multiplie à gauche le numérateur et le dénominateur par $(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}$, on aura

$$458. \quad \frac{(1,+1)^{k}\ (1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}}{(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}(1,+1)^{k-\frac{3}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-1}} = \frac{(1,+1)^{ky}y^{-1}}{(1,+1)^{yk-1}}.$$

Dans cette équation le numérateur à gauche se tire précisement du dénominateur en mettant dans ce dernier $k+\frac{1}{y}$ au lieu de k. A droite le numérateur seroit également produit du dénominateur par cette même substitution, si le facteur y^{-1} n'y étoit pas.

Pour faire sortir exactement le numérateur à droite du dénominateur par la substitution de $k+\frac{1}{y}$ au lieu de k, il n'y a qu'à multiplier à droite, en haut et en bas, par un facteur $p=\psi k$ tel, qu'en y mettant $k+\frac{1}{y}$ au lieu de k, on ait $\frac{\psi\left(k+\frac{1}{y}\right)}{\psi k}=y^{-1}$. On voit sans peine que ce facteur sera de la forme

$$459. \quad \psi k = y^{-yk+\beta},$$

où β est une quantité indéterminée, indépendante de y, car en y mettant $k+\frac{1}{y}$ au lieu de k, on a

$$\psi\left(k+\frac{1}{y}\right) = y^{-yk-1+\beta} \quad \text{et} \quad \frac{\psi\left(k+\frac{1}{y}\right)}{\psi k} = y^{-1}.$$

Donc en écrivant au lieu de l'équation (458.) celle ci;

$$460. \quad \frac{(1,+1)^{k}\ (1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots..(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}}{(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}(1,+1)^{k-\frac{3}{y}}\ldots..(1,+1)^{k-1}}$$
$$= \frac{(1,+1)^{yk}.y^{-yk-1+\beta}}{(1,+1)^{yk-1}.y^{-yk+\beta}} = \frac{(1,+1)^{yk}y^{-yk-1}}{(1,+1)^{yk-1}y^{-yk}},$$

qui est identiquement la même chose, on a une équation où les numérateurs à gauche et à droite se tirent précisément des dénominateurs en mettant dans ces derniers $k+\frac{1}{y}$ au lieu de k.

Donc cette équation sera précisément dans le cas de l'équation (453.) et le lemme (V.) y sera applicable.

VII. Suivant ce lemme les dénominateurs à gauche et à droite, et par suite aussi les numérateurs, ne différeront l'un de l'autre que par un facteur A indépendant de y; donc on aura

$$461.\quad (1,+1)^k\,(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}\,(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}} = (1,+1)^{yk}.y^{-yk-1}.A.$$

Faisant dans cette équation $k=0$, elle donne

$$462.\quad (1,+1)^{-\frac{1}{y}}\,(1,+1)^{-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = y^{-1}.A.$$

Mais en vertu de l'expression (449.), qu'on tire du théorème de Moivre combiné avec les résultats que donne la théorie des facultés appliquée aux fonctions angulaires, sans le secours de la formule (436.), on a

$$(1,+1)^{-\frac{1}{y}}\,(1,+1)^{-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{-\frac{y-1}{y}} = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}};$$

donc la formule (462.) donne

$$463.\quad y^{-1}A = \frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}.$$

Cela étant substitué dans (461.) donne

$$(1,+1)^k\,(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}\,(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}} = (1+1)^{yk}y^{-yk}.\frac{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}$$

ou bien

$$464.\quad (1,+1)^{yk} = \frac{y^{yk+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{y-1}{2}}}(1,+1)^k(1,+1)^{k-\frac{1}{y}}(1,+1)^{k-\frac{2}{y}}\ldots.(1,+1)^{k-\frac{y-1}{y}}.$$

C'est la formule de Mr. Legendre (450.) qu'il s'agissait de démontrer.

Nous terminerons ici ce mémoire, en nous réservant pour la suite la continuation des recherches cur les facultés analytiques. On sait que ces fonctions sont très utiles dans l'analyse et il est même probable, que de nouvelles applications remarquables et importantes, par ex. à la résolution des équations algébriques, en pourront encore être faites.

Berlin au mois de Juin 1831.

32.
Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes.

(Par MM. *Lamé* et *Clapeyron*, Colonels du Génie au service de Russie.)

(Suite du mémoire No. 19. cah. 2. et No. 27. cah. 3. de ce tome.)

Cas d'un corps solide soumis à une pression constante.

44.

Nous examinerons maintenant le cas d'un corps solide placé dans un fluide, et soumis à une pression constante sur toute sa surface. Si l'on prend pour origine des coordonnées, un point quelconque de ce corps, que nous considérons comme fixe, toutes les autres molécules se mouvront vers ce point d'une quantité proportionnelle à la distance r qui les en sépare; nommant U l'espace décrit dans le sens du rayon vecteur, et c une constante quelconque, nous aurons $U=cr$, et $u=cx$, $v=cy$, $w=cz$; on en conclut immédiatement:

$X''=0$, $Y''=0$, $Z''=5AC$, $X'=0$, $Y'=5AC$, $Z'=0$, $X=5Ac$, $Y=0$, $Z=0$,

Les forces tangentielles étant nulles, les axes sont parallèles aux pressions principales, et celles-ci étant toutes égales, on en conclut que la pression est constante pour tous les points et que pour chaque point elle reste la même, quelle que soit la direction que l'on considère; l'état d'un corps solide dans ce cas ne diffère pas de celui d'une masse fluide soumise à la même pression. Si on représente la pression par P, on aura $5AC=P$, d'ou $\left[c=\frac{P}{5A}\right]$. La dilatation cubique $\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ devient alors $\left[\frac{3P}{5A}\right]$; on peut donc déterminer la compressibilité cubique de tous les corps solides pour lesquels la quantité A est connue.

On trouve ainsi, pour diverses substances, les résultats insérés dans la table suivante, (calculée d'aprés les valeurs de A du paragraphe 43.):

Substances.	Compressibilité cubique pour une pression de 1 kil. par *mm.c.* ou de 100 atmosphères.
Fer forgé	$\frac{1}{13333}$,
fonte	$\frac{1}{8628}$,
étain	$\frac{1}{21536}$,
plomb	$\frac{1}{3336}$,

Substances.	Compressibilité cubique pour une pression de 1 kil. par *mm.c.* ou de 100 atmosphères.
laiton	$\frac{1}{4153}$,
métal des canons	$\frac{1}{4493}$,
marbre blanc	$\frac{1}{1181}$,
chêne	$\frac{1}{796}$,
sapin rouge	$\frac{1}{943}$.

On sait que Mr. Perkins a mesuré la compressibilité de l'eau au moyen de l'expérience suivante: Ayant placé une cloche de verre remplie d'eau sur du mercure, il mit le tout dans une presse hydraulique, et porta la pression jusqu'à 2000 atmosphères; le mercure monta dans l'intérieur de la cloche jusqu'à une hauteur qu'il détermina à l'aide d'un flotteur placé à la surface du mercure, et que le métal liquide poussait devant lui; lorsqu'on fit cesser la pression, l'eau passa par une ouverture menagée dans le flotteur, qui resta en place, retenu par le frottement exercé sur les parois de la cloche. Mr. Perkins trouva, en négligeant la diminution de volume éprouvée par la matière dont la cloche étoit composée, que l'eau s'étoit comprimée de $\frac{1}{12}$ par la pression exercée de 2000 atmosphères; ce résultat correspond à une compression de $\frac{1}{2403}$ pour 100 atmosphères de pression.

En comparant ce dernier résultat aux nombres de la table précédente, on voit que la compressibilité des corps solides est à peu près de l'ordre de celle des liquides, et que par conséquent l'expérience de Mr. Perkins doit être corrigée par la connoissance que l'on peut avoir de la compressibilité de la matière qui renfermoit l'eau soumise à l'expérience; supposons que cette dernière compressibilité soit δ, que δ' soit la compressibilité du liquide, observée en négligeant δ, il est aisé de voir que la véritable compressibilité du liquide aura pour expression: $(\delta'+\delta)(1-\delta)$, ou simplement $(\delta'+\delta)$.

Or on évalue l'alongement du verre, sous une traction de 1 kilogr. par *mm.c.* à 0,00011; ce qui donne pour A le nombre 3600, et pour la compressibilité du verre $\frac{1}{8333}$, sous une pression de 1 kil. par *mm.c.*; Mr. Perkins ayant trouvé $\frac{1}{2403}$ pour la compressibilité de l'eau, ce résultat corrigé est effectivement $[\frac{1}{2403}+\frac{1}{8333}]$ ou $\frac{1}{2303}$.

Cas d'un cylindre creux indéfini.

45.

Nous allons examiner maintenant le cas d'un cylindre creux, à base circulaire, terminé pas deux couvercles, et soumis, intérieurement et

extérieurement à des pressions différentes, mais constantes chacune sur toute l'étendue des surfaces sur lesquelles elles agissent. Si la distance qui sépare les deux couvercles est infiniment grande, et que l'on considère des points du cylindre intermédiaires, et placés à des distances infinies de chacune des extrémités, les tractions qui résulteront, dans le sens des arêtes du cylindre, des pressions exercées sur les deux bases se distribueront également sur toute l'épaisseur. On voit ainsi que chaque molécule se mouvra dans un plan méridien, d'une quantité dont la projection sur le plan d'une section transversale du cylindre sera fonction de sa distance à l'axe, et dont la projection sur cet axe sera le produit d'une quantité constante, par sa distance à un plan fixe perpendiculaire aux arêtes.

Si l'on prend ce plan pour celui de xy, et l'axe du cylindre pour celui des z, qu'on nomme V l'espace décrit par chaque molécule dans le sens du rayon, V sera seulement fonction de la distance r à l'axe du point que l'on considère. Cela posé, c représentant une constante indéterminée, nous aurons, en conservant les notations adoptées:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad u = V\frac{x}{r}, \quad v = V\frac{y}{r}, \quad w = cz.$$

On déduit de là

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{r}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r}\right)}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{y}{r}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r}\right)}{\partial r},$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = c + \frac{V}{r} + \frac{\partial V}{\partial r}.$$

D'après cela, des trois équations d'équilibre (§. 8.) la troisième se trouve immédiatement satisfaite, les deux premières donnent toutes les deux:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r}\right)}{\partial r} = 0, \quad \text{d'où} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 2a.$$

On en déduit: $$\theta = 2a + c \quad \text{et} \quad v = ar + \frac{b}{r}.$$

a et b étant deux constantes arbitraires, et par suite:

$$u = ax + b\cdot\frac{x}{r^2}, \quad V = ay + b\cdot\frac{y}{r^2}, \quad w = cz.$$

L'état des pressions, en chaque point du cylindre, est alors donné par les équations suivantes:

$$X'' = 0, \qquad X' = -A\frac{4bxy}{r^4}, \qquad X = A\left(4a + c - 2b\cdot\frac{x^2 - y^2}{r^4}\right)$$

$$Y'' = 0, \qquad Y' = A\left(4a + c + \frac{2b(x^2 - y^2)}{r^4}\right), \qquad Y = -A\frac{4bxy}{r^4}$$

$$Z'' = A(2a + 3c), \qquad Z' = 0, \qquad Z = 0;$$

il reste à déterminer les constantes a, b, c.

46.

Désignons par R le rayon de la surface intérieure du cylindre, et par P la pression sur l'unité de surface, exercée par le fluide qu'il contient; par R' le rayon de la surface extérieure, et par P' la pression du fluide environnant. Pour $y=0$ et $r=x=R$, on doit avoir $X=-P$, et pour $y=0$ et $r=x=R'$, $X=-P'$. Si de plus on suppose, qu'il n'y ait pas d'autres pressions exercées sur les bases, que celles qui résultent des fluides intérieurs et extérieurs, le produit de la force constante Z'' par la surface annulaire, qui sert de base aux parois du cylindre creux, devra être égal à la résultante de ces pressions. On déterminera donc les constantes a, b, c par les trois équations:

$$-P = A\left(4a+c-\frac{2b}{R^2}\right), \quad -P' = A\left(4a+c-\frac{2b}{R'^2}\right);$$

$$R^2P-R'^2P' = A(2a+3c)(R'^2-R^2);$$

d'où l'on tire:

$$a = c = \frac{PR^2-P'R'^2}{5A(R'^2-R^2)}, \quad b = R^2R'^2\frac{P-P'}{2A(R'^2-R^2)}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de a, b, c dans u, v, w, θ, V; X'', Y'', Z''; X', Y', Z'; X, Y, Z; on aura les résultats suivans qui contiennent la solution complette de la question que nous nous sommes proposée:

$$u = \frac{PR^2-P'R'^2}{5A(R'^2-R^2)}x + \frac{P-P'}{2A(R'^2-R^2)}\cdot\frac{R^2R'^2x}{r^2},$$

$$v = \frac{PR^2-P'R'^2}{5A(R'^2-R^2)}y + \frac{P-P'}{2A(R'^2-R^2)}\cdot\frac{R^2R'^2y}{r^2},$$

$$U = \frac{PR^2-P'R'^2}{5A(R'^2-R^2)}r + \frac{P-P'}{2A(R'^2-R^2)}\cdot\frac{R^2R'^2}{r},$$

$$w = \frac{PR^2-P'R'^2}{5A(R'^2-R^2)}z, \quad \theta = \tfrac{3}{5}\cdot\frac{PR^2-P'R'^2}{A(R'^2-R^2)};$$

$$X''=0,\ X'=-\frac{2xy}{r^4}\cdot\frac{R^2R'^2(P-P')}{R'^2-R^2},\ X=\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}-\frac{R^2R'^2}{r^4}\cdot\frac{(P-P')(x^2-y^2)}{R'^2-R^2},$$

$$Y''=0,\ Y'=\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}+\frac{R^2R'^2}{r^4}\cdot\frac{(P-P')(x^2-y^2)}{R-R'^2},\ Y=-\frac{2xy}{r^4}\cdot\frac{R^2R'^2(P-P')}{R'^2-R^2},$$

$$Z''=\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2},\ Z'=0,\quad Z=0.$$

Si dans l'expression de Y' on fait $y=0$ et $x=r$, on aura l'expression de la force qui tend à déchirer le cylindre suivant un élément situé dans un plan méridien; elle devient: $\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}+\frac{R^2R'^2(P-P')}{r^2(R'^2-R^2)}$; si on la multiplie par dr, et qu'on l'intègre entre les limites R et R', on aura, en prenant le double de l'intégrale obtenue, la force totale qui tend à rom-

pre le cylindre suivant un même plan méridien, estimée sur une portion de la hauteur, égale à l'unité de longueur; on trouve ainsi pour cette force totale, $2(PR-P'R')$; ce résultat est égal à celui que l'on obtiendrait, en cherchant directement d'après des principes connus d'hydrostatique, la force qui tend à briser un tube soumis, intérieurement et extérieurement, à des pressions différentes.

La force Y', correspondante à $y=0$, et $x=r$, étant, comme on vient de le voir, égale à $\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}+\frac{R^2R'^2(P-P')}{r^2(R'^2-R^2)}$, est variable, et diminue depuis la paroi intérieure, où elle se réduit à $\frac{P(R^2+R'^2)-2P'R'^2}{R'^2-R^2}$, jusqu'à la paroi extérieure, où elle n'est plus que $\frac{2PR^2-P'(R^2+R')}{R'^2-R^2}$; et il est à remarquer qu'à ces deux limites, Y' diffère de $P-P'$.

On suppose ici, pour fixer les idées, que la pression intérieure P est beaucoup plus grande que la pression extérieure P', en sorte que les quantités $(P-P')$, $(PR^2-P'R'^2)$ sont positives; on conservera la même hypothèse dans ce qui va suivre.

47.

Tout étant semblable lorsqu'on change de plan méridien, il suffit d'étudier la loi suivant laquelle varient les pressions dans un quelconque des plans méridiens; nous choisirons le plan des zx; y étant nul; on trouve alors, qu'il ne reste plus que les forces normales Z'', Y', X, et que les forces tangentielles X'', Y''; X', Z'; Y, Z sont nulles; c'est-à-dire que les pressions ou tractions principales sont:

$\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}$ parallèlement à l'axe des z ou aux arêtes du cylindre,

$\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}+\frac{R^2R'^2(P-P')}{r^2(R'^2-R^2)}$, perpendiculairement au plan méridien,

$\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}+\frac{R^2R'^2(P-P')}{r^2(R'^2-R^2)}$, dans le sens du rayon r, ou de l'axe des x.

Cette dernière quantité est nègative pour toute valeur de $r<R'$; nous aurons donc autour d'un point quelconque, placé sur l'axe des x à une distance r de l'axe du cylindre, des tractions et des pressions; leurs valeurs numériques et leur directions seront données par les rayons vecteurs de l'ellipsoïde, représenté par l'équation:

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}-\frac{R^2R'^2(P-P')}{r^2(R'^2-R^2)}\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}+\frac{R^2R'^2(P-P')}{r^2(R'^2-R^2)}\right)^2}+\frac{z'^2}{\left(\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}\right)^2}=1.$$

l'our toutes les directions comprises entre l'axe des x', et la surface conique, représentée par l'équation

$$-\frac{x'^2}{\frac{RR'^2(P-P')}{r^2(R'^2-R^2)}-\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}}+\frac{y'^2}{\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}+\frac{R^2R'^2(P-P')}{r^2(R'^2-R^2)}}+\frac{z'^2}{\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}}=0,$$

on aura des pressions; hors de cette surface ce seront des tractions; le passage de l'un des états à l'autre se fera sur la surface conique elle même. Le plan sur lequel agit une pression ou une traction quelconque, représentée par un rayon vecteur de l'ellipsoïde, sera parallèle au plan tangent passant par l'intersection du rayon vecteur, prolongé s'il est nécessaire, avec l'un des hyperboloïdes représentés par l'équation que l'on obtient en égalant à ± 1 le premier membre de la dernière équation.

La traction maxima est représentée, en grandeur et en direction, par le grand axe de l'ellipsoïde parallèle à l'axe des y, en sorte que le cylindre creux proposé tend à se rompre ou à s'ouvrir, suivant un plan méridien.

48.

Si l'on suit le précepte donné par les meilleurs constructeurs qui recommandent de ne faire jamais supporter aux matériaux que l'on emploie, un effort qui excède la limite de l'élasticité de chacun d'eux, le rayon extérieur R' devra être déterminé de manière à ce que $\frac{P(R^2+R'^2)-2P'R'^2}{R'^2-R^2}$, ou la plus forte des tractions maxima, ne dépasse jamais cette limite. On sait que cette limite est environ de 14 kilogrammes par *mm.c.* pour le fer forgé, de 10 kil. pour la fonte, de 6 kil. pour le métal des canons, et de 4 kil. pour le laiton. Soit a sa valeur pour une substance quelconque, on posera:

$$\frac{P(R^2+R'^2)-2P'R'^2}{R'^2-R^2}=a,$$

d'où

$$\frac{R'}{R}=\sqrt{\left(\frac{p+a}{2p'-p+a}\right)}.$$

Si $p=2p'+a$, cette expression devient infinie; elle serait imaginaire si l'on avait $p>2p'+a$; d'où résulte ce fait important: quelle que soit la matière qui compose un cylindre creux, lorsque la pression intérieure, diminuée du double de la pression extérieure sur l'unité de surface, sera égale ou supérieure au plus grand effort que l'on peut faire supporter, sans altération permanente, à une tige de la même matière ayant une section égale à l'unité de surface, il sera impossible de satis-

faire à la condition énoncée plus haut; et quelle que soit l'épaisseur du cylindre, ses parties intérieures éprouveront une altération permanente.

La pression atmosphérique est d'environ 0,01 kil. par millimètre carré; si donc on nomme n le nombre d'atmosphères exprimant la pression qu'on ne peut dépasser dans un cylindre de fer forgé, sans produire une altération permanente, on aura: $n.0{,}01 - 0{,}02 = 14$, d'où $n = 1402$. La limite que l'on ne peut dépasser est donc de 1402 atmosphères, dans un cylindre de fer forgé; on trouve de même que cette limite est de 1002 atmosphères pour la fonte, de 402 pour un cylindre de laiton, et de 602 atmosphères pour le métal des canons. Pour des pressions inférieures aux limites que nous venons d'assigner, mais qui en différeroient peu, on seroit obligé d'adopter des épaisseurs énormes, inadmissibles dans la pratique, si l'on voulait éviter les altérations permanentes.

Mr. Perkins, dans les expériences dont les journaux ont rendu compte, sur la compressibilité des liquides, a poussé la pression dans l'intérieur d'un cylindre métallique jusqu'à 2000 atmosphères. Ce fait n'est pas une objection au résultat que nous venons d'annoncer; il est possible que si l'expérience eut été prolongé pendant un intervalle de tems suffisant, le cylindre se fût brisé, ou qu'il fût arrivé quelque chose d'analogue à ce qui se passe, quand on suspend à une tige de fer, un poids qui dépasse 14 kilogr. par millimètre.

L'altération des bouches à feu, après quelque tems de service, ou lorsqu'on leur fait subir des épreuves trop fortes, est due sans doute à la même cause. Il suffit pour cela que la pression développée par l'explosion de la poudre approche de 602 atmosphères.

Remarquons toute fois que l'expérience qui a servi à déterminer la limite a, consistait dans la suspension d'un poids à une tige, du métal que l'on voulait éprouver, et que cette tige n'éprouvait latéralement d'autre pression que celle de l'atmosphère. Or dans le cas que nous considérons, un prisme d'un millim. carré de section, placé dans l'intérieur de l'enveloppe cylindrique, près de la paroi intérieure, et perpendiculairement au plan méridien, éprouve bien une traction égale à $\frac{P(R^2+R'^2)-2P'R'^2}{R'^2-R^2}$; mais indépendamment de cette force, il est pressé, dans le sens du rayon, par une force égale à P, et dans le sens de l'arête du cylindre, il est tiré par une force égale à $\frac{PR^2-P'R'^2}{R'^2-R^2}$; or il est possible que la plus grande

traction, à laquelle on puisse soumettre une tige, dans le sens de la longueur, sans altérations permanente, varie avec les pressions latérales auxquelles la tige pourroit être exposée. C'est une question sur laquelle l'expérience n'a pas prononcé jusqu'ici.

49.

On suppose dans la pratique, que la force qui s'oppose à la rupture, est distribuée uniformément sur tous les points de l'épaisseur du cylindre; en partant de cette hypothèse, et en négligéant l'action que peut avoir la pression qui a lieu dans le sens du rayon, et la traction qui s'exerce dans le sens des arêtes, on calcule la grandeur du rayon extérieur au moyen de la formule:

$$a(R'-R) = PR-P'R', \text{ d'où l'on tire } \frac{R'}{R} = \frac{P+a}{P'+a};$$

ce résultat diffère essentiellement de la formule déduite de notre théorie, et qui est $\frac{R'}{R} = \sqrt{\left(\frac{p+a}{2p'+a-p}\right)}$.

Il est à remarquer pourtant que lorsqu'on emploie des cylindres métalliques, et que l'on ne considère pas des pressions voisines de celles qui donnent $2p'+a-p=0$, ces deux formules conduisent à peu près au même résultat: si, par exemple, on cherche le rapport du diamètre extérieur au diamètre intérieur, pour le cylindre d'une presse hydraulique en fonte, dans lequel la pression doit être portée à 100 atmosphères, notre formule donne $\frac{R'}{R} = 1{,}104$, la formule ordinaire donne $\frac{R'}{R} = 1{,}099$. En général cette dernière donne des épaisseurs toujours plus petites, et la différence des résultats donnés par les deux formules est d'autant plus grande, que l'on considère des pressions plus considérables.

50.

Nous terminerons cet article par une application numérique, pour donner une idée des avantages qui résultent pour la pratique de notre analyse.

Soit proposé de déterminer ce qui se passe dans l'épaisseur d'un cylindre creux indéfini de fer forgé, dont le diamètre intérieur est de 8 décimètres et le diamètre extérieur de 8,4 décim.; on suppose que la surface extérieure est soumise à la pression atmosphérique et que la pression intérieure est de 10 atmosphères.

En prenant 10 mètres pour la hauteur d'eau qui fait équilibre à la pression atmosphérique, on trouve que cette pression exerce, sur un mil-

limètre carré de surface, le même effort qu'un poids de 0,01 kilogrammes. Si l'on prend, daprès celà, le millimètre pour unité de longueur et le kilogramme pour unité de poids, on aura:

$$R = 400, \quad R' = 420, \quad p = 0{,}1, \quad p' = 0{,}01;$$

rappelons en outre que le coëfficient A, calculé pour le fer forgé est égal à 8000 kilogrammes.

Les formules du paragraphe 46. donnent alors:

$$X''=0,\ Y''=0,\ Z''=0{,}8677;\ X'=-309800\frac{xy}{r^4},\ Y'=0{,}8677+154900\frac{x^2-y^2}{r^4},\ Z'=0;$$

$$X=0{,}8877-154900\frac{x^2-y^2}{r^4},\quad Y=-309800\frac{xy}{r^4},\quad Z=0;\quad U=0{,}00002169\,r+\frac{9{,}6}{r};$$

$$u=0{,}00002169x+9{,}6\frac{x}{r^2},\quad v=0{,}00002169\,y+9{,}6\frac{y}{r^2},\quad w=0{,}00002169\,z.$$

On trouve ainsi que la force qui tend à rompre le cylindre, ou à l'ouvrir suivant un plan méridien, diminue depuis la paroi intérieure où elle est de 1,83 kil. par $mm.\ c.$ jusqu'à la paroi extérieure, où elle n'est plus que de 1,74 kil.; le fer pouvant porter, sans altération permanente, jusqu'à 14 kil., on voit que le cylindre a une force 7 à 8 fois plus considérable qu'il ne seroit rigoureusement nécessaire.

Si dans l'expression de U on fait $r=400$, on trouve: $U=0{,}033\ mm.$; si on y fait $r=420$, on trouve $U=0{,}032\ mm.$; on voit ainsi que le cercle intérieur se dilate plus que le cercle extérieur, et que la différence des dilatations de leurs rayons est de 0,001 $mm.$

Cas d'un cylindre soumis à une torsion.

51.

Imaginons maintenant le cas où dans un cylindre que nous supposerons plein et indéfini, chaque molécule, sans sortir d'un plan perpendiculaire à l'axe, et sans changer de distance r à cet axe, décrivait un arc de cercle proportionnel à r, et à la distance z qui la sépare d'un plan perpendiculaire aux arêtes du cylindre, et supposé fixe. Si, independamment de ce premier mouvement, chaque molécule se rapproche de l'origine des coordonnées, prise au point d'intersection de l'axe du cylindre et du plan fixe, d'une quantité proportionnelle à la distance qui la sépare de cette origine, l'ensemble de ces mouvemens sera exprimé par les formules

$$u = -wzy-a, \quad v = wzx-ay, \quad w = -az,$$

en prenant le plan fixe pour plan des xy, et l'axe du cylindre pour axe des z; w et a étant des constantes indéterminées.

Les valeurs précédentes de u, v, w, vèrifient immédiatement les équations d'équilibre (§. 8.), et on trouve, pour les composantes des pressions qui agissent sur trois plans parallèles aux plans coordonnés et passant par un point quelconque, les formules suivantes:

$$\begin{aligned} X'' &= -Awy, & X' &= 0, & X &= -5Aa, \\ Y'' &= Awx, & Y' &= -5Aa, & Y &= 0, \\ Z'' &= -5Aa, & Z' &= Awx, & Z &= -Awy. \end{aligned}$$

Sans entrer dans de plus grands détails, il est aisé de voir que pour $y=0$, $Z=0$, et que conséquemment la force qui agit sur un élément plan tangent au cylindre, est normale à la surface cylindrique, et égale à $-5Aa$. La résultante des forces $-Awy$ et Awx, est égale à Awr, et agit perpendiculairement au plan mèridien, correspondant au point que l'on considère.

Il résulte evidemment de là que le cas que nous considérons, est celui d'un cylindre droit, à base circulaire, plongé dans un fluide soumis à une pression constante, et dans lequel chaque point des bases supérieure et inférieure, est sollicité par une force de torsion proportionnelle à la distance de l'axe; cette force agit en chaque point, perpendiculairement au rayon r, et parallèlement aux bases, elle a sur chacune d'elles une direction opposée; nous démontrerons plus tard que c'est le cas d'un cylindre indéfini, soumis à des forces de torsion quelconques, appliquées à des points très éloignés du cylindre, relativement à ceux qui sont dans le voisinage de l'origine des coordonnées.

52.

Le moment de la force de traction s'obtiendra en effectuant dans toute l'étendue de la base, la double intégration $A\iint wr^3\partial r\,\partial\varphi$; on trouvera, en désignant par M ce moment et par R le rayon extérieur du cylindre: $\frac{\pi Awr^4}{2}=M$, d'où $w=\frac{2M}{A\pi R^4}$. Si l'on suppose de plus que la pression du fluide extérieur au cylindre ne soit autre que la pression atmosphérique P, on aura également:

$$p=5Aa, \quad \text{d'où} \quad a=\frac{P}{5A}.$$

Les constantes w et a étant ainsi connues, nous trouvons, en les substituant dans les formules de l'article précédent, les résultats suivans:

$$X''=-\frac{2My}{\pi R^4}, \quad X'=0, \quad X=-P, \quad u=-\frac{1}{A}\left(\frac{2M}{\pi R^4}zy+\frac{P}{5}x\right),$$

$$Y''=\frac{2Mx}{\pi R^4},\quad Y'=-P,\quad Y=0,\qquad v=\frac{1}{A}\left(\frac{2M}{\pi R^4}zx-\frac{P}{5}y\right],$$

$$Z''=-P,\quad Z'=\frac{2Mx}{\pi R^4},\quad Z=-\frac{2My}{\pi R^4},\quad w=-\frac{P}{5A}z.$$

On trouvera l'angle de torsion en prenant la valeur de $\frac{v}{x}$ qui correspond à $y=0$, ou celle de $\frac{u}{y}$ qui correspond à $x=0$, on trouve ainsi pour son expression $\frac{2Mz}{\pi A R^4}$; ce qui apprend que pour une même force l'angle de torsion est proportionnel à la longueur du cylindre et en raison inverse de la quatrième puissance du rayon; résultat conforme à l'expérience.

Si donc on détermine pour plusieurs substances l'angle de torsion qui correspond à une longueur connue, et à une force de torsion aussi déterminée, on pourra en déduire, pour chacune d'elles, la valeur du coëfficient A. Si l'on prend les valeurs de $\frac{Mz}{R^4}$ données, dans la physique de Mr. Biot, pour le fer et le laiton, et tirées des expériences de Coulomb sur la torsion, on trouve:

$A = 7493$, pour le fer,
$A = 2248$, pour le laiton.

Des expériences, sur la traction des corps dans le sens de leur longueur, nous ont donné d'autres valeurs pour A, qu'il est important de comparer à celles-ci: nous avons trouvé:

$A = 8000$, pour le fer,
$A = 2510$, pour le laiton;

ces nombres diffèrent, le premier de $\frac{1}{10}^e$; l'autre de $\frac{1}{12}^e$ environ de ceux que nous venons de déduire de la torsion; cette différence est assez petite pour ne pouvoir être attribuée qu'aux erreurs inséparables des expériences faites jusqu'ici sur la traction des corps dans le sens de leur longueur, et nous croyons voir dans la coïncidence approchée de deux résultats, déduits d'expériences d'un genre si différent, l'une des preuves les plus frappantes de l'exactitude de notre théorie.

La précision qu'on peut apporter aux expériences sur la torsion des corps, nous les font regarder comme le moyen le plus exact qu'on puisse employer pour la détermination de A, et il serait à désirer, que des recherches, entreprises dans ce but, permissent de trouver de valeurs plus certaines de cet élément important de la résistance des corps solides.

53.

Passons à la recherche des pressions ou tensions principales. Elles sont égales aux trois racines de l'équation (30.) du paragraphe 32., qui, dans le cas dont il s'agit, devient:

$$\xi^3+3P\xi^2+\left[3P^2-\left(\frac{2M}{\pi R^4}\right)^2(x^2+y^2)\right]\xi+P\left[P^2-\left(\frac{2M}{\pi R^4}\right)^2(x^2+y^2)\right]=0.$$

Si on pose $x^2+y^2=r^2$, cette équation peut s'écrire sous la forme

$$(\xi+P)\left(\xi+P+\frac{2M}{\pi R^4}r\right)\left(\xi+P-\frac{2M}{\pi R^4}r\right)=0;$$

les trois pressions principales sont ainsi:

$$A=-P,\quad B=-\left(P+\frac{2M}{\pi R^4}r\right),\quad C=-P+\frac{2M}{\pi R^4}r.$$

Si l'on substitue les valeurs de B et C dans les équations du paragraphe 32., on trouve:

$$\frac{x'}{x}-\frac{y'}{y}-\frac{z'r}{xy}=0\quad\text{et}\quad\frac{x'}{x}-\frac{y'}{y}+\frac{z'r}{xy}=0$$

pour les équations des plans sur lesquels agissent les pressions principales B et C; il est aisé de voir que ces deux plans sont perpendiculaires entr'eux, que leur ligne d'intersection rencontre l'axe du cylindre, et est parallèle au plan des xy, et que leur inclinaison sur le plan des xy est la même et égale à 45°; quant à la pression A elle agira sur un plan perpendiculaire aux plans dont les équations précèdent et dans le sans de leur intersection.

La connaissance des pressions principales, de leurs signes et de leurs directions, donne la loi du phénomène que nous étudions. Si on prend pour nouvelle origine le point que l'on considère dans l'intérieur du cylindre, le rayon r correspondant pour axe des x_1, et pour axes des y_1 et des z_1, deux lignes, inclinées à 45° sur la base du cylindre, dans un plan perpendiculaire à la distance r, les pressions exercées sur le point pris pour origine seront toutes représentées, en grandeur et en direction, par les rayons vecteurs de l'ellipsoïde, ayant pour équation:

$$\frac{x_1^2}{P^2}+\frac{y_1^2}{\left(P+\frac{2Mr}{\pi R^4}\right)^2}+\frac{z_1^2}{\left(P-\frac{2Mr}{\pi R^4}\right)^2}=1;$$

et chacune d'elles agira sur un plan parallèle au plan tangent à l'une des surfaces comprises dans l'équation:

$$-\frac{x^2}{P}-\frac{y^2}{P+\frac{2Mr}{\pi R^4}}+\frac{z^2}{\frac{2Mr}{\pi R^4}-P}=\pm 1,$$

au point ou cette surface est rencontrée par le rayon vecteur. Dans le voisinage de l'axe des z s'exerceront des tractions toutes les fois que P sera moindre que $\frac{2Mr}{\pi R^4}$; dans le voisinage des autres axes nous aurons au contraire des pressions, et le passage des tensions aux pressions se fera sur le cône asymptotique ayant pour équation:

$$-\frac{x_1^2}{P}-\frac{y_1^2}{P+\frac{2Mr}{\pi R^4}}+\frac{z_1^2}{-P+\frac{2Mr}{\pi R^4}}=0.$$

Lorsque $P=\frac{2Mr}{\pi R^4}$, ou $P=0$, on aura le cas traité plus haut. Lorsque $\frac{2Mr}{\pi R^4}$ sera moindre que P, les forces exercées autour du point considéré seront toutes des pressions.

54.

La traction maxima étant égale à $\left[-P+\frac{2M}{\pi R^4}r\right]$, on devra faire ensorte dans la pratique, que sa plus grande valeur, correspondante à $r=R$, ne dépasse pas le maximum de traction, que l'on peut faire supporter à la substance que l'on se propose d'employer, sans qu'elle éprouve d'altération permanente; ce maximum est de 14 kil. au $mm.c.$ pour le fer forgé; le plus petit diamètre d'un cylindre plein de fer forgé, capable de résister à une force de torsion dont le moment seroit M, sera donc déterminé par l'équation: $\frac{2M}{\pi R^3}=14+P$; si la pression P est celle de l'atmosphère, ou égale à 0,01 kil., on pourra la négliger, et l'on aura simplement $\frac{2M}{\pi R^3}=14$, d'où $M=22R^3$. C'est-à-dire que le plus grand effort que l'on puisse faire supporter à une barre de fer, soumise à une torsion, et dont le rayon est R, a pour moment $22R^3$; le moment étant égal au produit d'un poids, exprimé en kilogrammes, par un bras de levier exprimé en millimètres. Pour la fonte on aurait $M=15R^3$. Si l'on juge à propos de ne faire supporter au fer que la moitié de l'effort maximum, on tombe sur les formules: $M=11R^3$ pour le fer, $M=7R^3$ pour la fonte, qui coïncident sensiblement avec celles que donne M. Tredgold dans son ouvrage sur la force du fer coulé.

Cas d'une sphère dont toutes les parties gravitent les unes sur les autres.

55.

Considérons d'abord le cas d'une sphère dont tous les points s'attireroient suivant une force agissant en raison inverse du quarré de la distance. On sait que dans ce cas la résultante des actions exercées par la masse entière, sur une molécule quelconque, est une force unique dirigée vers le centre et proportionnelle à la distance qui l'en sépare. On voit qu'alors chaque molécule devra se mouvoir vers le centre, d'une quantité qui sera fonction de cette distance seulement,

D'après cela, si l'on nomme U l'espace décrit par une molécule dans le sens du rayon, par r sa distance au centre pris pour origine des coordonnées, et par C une quantité constante positive, en conservant d'ailleurs les notations adoptées jusqu'ici, on aura:

$$u = U\frac{x}{r}, \quad v = U\frac{y}{r}, \quad w = U\frac{z}{r},$$

$$r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}, \quad X_1 = -Cx, \quad Y_1 = -Cy, \quad Z_1 = -Cz.$$

On reconnoit immédiatement que u, v, w, sont les coëfficiens différentiels par rapport à x, y, z, d'une même fonction $\int U\,dr$, donc on aura: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$. X, Y, Z sont également les coëfficiens différentiels d'une même fonction $-\frac{1}{2}Cr^2$. Les équations d'équilibre (§. 8.) se réduisent alors à:

$$3.\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{c}{2A}.\frac{\partial.r^2}{\partial x} = 0, \quad 3.\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{c}{2A}.\frac{\partial.r^2}{\partial y}, \quad 3.\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{c}{2A}.\frac{\partial.r^2}{\partial z};$$

d'où

$$3\theta = \frac{c}{2A}r^2 + a,$$

a étant une constante arbitraire; or $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2}{r}U$; on aura donc:

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2}{r}U - \frac{c}{2A}r^2 = a.$$

Si on multiplie cette équation par $r^2\partial r$, et que l'on intègre ensuite, on obtient:

$$U = \frac{c}{30A}r^3 + \frac{a}{9}r + \frac{b}{r^2};$$

b étant une nouvelle constante arbitraire; or si nous remarquons que, la sphère étant pleine, $r = 0$, ne peut pas donner U infini, nous en conclurons que la constante b doit être nulle; on a donc simplement

$$U = \frac{C}{30A}r^3 + \frac{a}{9}r.$$

Pour déterminer la constante a, nous supposerons, qu'à une distance R du centre, la pression soit nulle sur toute la surface sphérique; or la pression exercée perpendiculairement à la surface, au point où elle est rencontrée par l'axe des x est égale à

$$A\left(\theta + 2\frac{\partial u}{\partial x}\right) = A\left(\frac{5a}{9} + \frac{11c}{3A}R^2\right);$$

on obtient, en égalant cette quantité à zéro; $\frac{a}{9} = -\frac{11}{5}\cdot\frac{cR^2}{A.30}$; substituant cette valeur de a, on trouve, pour U et θ les deux valeurs suivantes:

$$U = -\frac{c}{30A}r\left(\tfrac{11}{5}R^2 - r^2\right), \quad \theta = -\frac{c}{6A}\left(\tfrac{33}{25}R^2 - r^2\right).$$

Il résulte de là que dans le cas qui nous occupe, chaque molécule s'approche du centre d'une quantité, qui croit en s'avançant du centre à la surface, atteint son maximum quand $r = R\sqrt{\frac{11}{15}}$ et diminue au de là. Les composantes de l'espace décrit, par rapport aux trois axes, ont pour expressions:

$$u = -\frac{cx}{30A}\left(\tfrac{11}{5}R^2 - (x^2+y^2+z^2)\right), \quad v = -\frac{cy}{30A}\left(\tfrac{11}{5}R^2(x^2+y^2+z^2)\right),$$

$$w = -\frac{cz}{30A}\left(\tfrac{11}{5}R^2 - (x^2+y^2+z^2)\right).$$

56.

Examinons maintenant la loi, suivant laquelle varient les pressions autour d'un point quelconque. Prenons pour axe des x le rayon correspondant à ce point, nous aurons $y = 0$, $z = 0$, $x = r$, pour les coordonnées; nous trouverons alors:

$$X'' = 0,\ Y'' = 0,\ Z'' = -\frac{c}{30}(11R^2 - 7r^2);\ X' = 0,\ Y' = -\frac{c}{30}(11R^2 - 7r^2),\ Z' = 0;$$

$$X = -\frac{11c}{30}(R^2 - r^2),\ Y = 0,\ Z = 0.$$

Les forces tangentielles étant nulles, nous voyons que les pressions principales s'exercent parallèlement aux axes coordonnées; il sera donc facile de déduire des principes établis ci-dessus (seconde partie de ce mémoire), la variation des pressions autour du point considéré.

Appliquons les formules précédentes au cas d'une sphère solide d'un rayon égal à celui de la terre, cR ne sera autre chose que le poids de l'unité de volume de la matière dont la sphère est composée, nous l'appellerons δ; on aura donc $c = \frac{\delta}{R}$, et l'on en conclura que les pressions principales seront:

$-\frac{\delta}{30}\left(11R-7\frac{r^2}{R}\right)$ parallèlement aux axes des z et des y,

$-\frac{11\delta}{30}\left(R-\frac{r^2}{R}\right)$ parallèlement à l'axe des x;

la dilatation sera exprimée dans le même cas, par $\left[-\frac{\delta}{6R}\left(\frac{33}{25}R-\frac{r^2}{R}\right)\right]$.

On voit que ces pressions principales diffèrent d'autant moins les unes des autres, que r est plus petit; elles sont égales entr'elles au centre de la sphère, et ont en ce point leur plus grande valeur, qui est égale au poids d'une colonne qui auroit pour hauteur les $\frac{11}{30}$es du rayon terreste.

La pression exercée dans les sens du rayon, sur un élément plan qui lui serait perpendiculaire, pour les points placés à une petite profondeur h de la surface, sera donnée par la formule: $\left[-\frac{11\delta}{30}\left(R-\frac{(R-h)^2}{R}\right)\right]$, ou simplement $[-\frac{11}{15}\delta h]$, en négligeant h par rapport à R; ce résultat apprend qu'à une petite profondeur h au dessous de la surface, la pression exercée dans le sens de la verticale, est égale aux $\frac{11}{15}$ du poids d'une colonne formée de la matière solide, dont est composée la sphère, et qui auroit h pour hauteur.

Quant aux pressions dirigées dans les plans tangens aux surfaces sphériques concentriques à la sphère proposée, et exercées sur des plans diamétraux, elles seront égales, pour les points voisins de la surface à $[\frac{2}{15}\delta R]$, ou au poids d'une colonne, ayant la portion de surface plane que l'on considère, pour base, et pour hauteur les $\frac{2}{15}$ du rayon de la sphère proposée. Il est trés possible que des forces comparables à cette énorme pression, ayent joué un rôle important, dans les révolutions qui ont suivi la solidification des premières couches du globe que nous habitons.

Cas d'une sphère creuse.

57.

Examinons maintenant le cas d'une sphère creuse, soumise intérieurement à une pression constante tendant à la faire éclater, et entourée d'un fluide d'une pression pareillement constante. Soient R le rayon de la paroi intérieure, P la pression qu'elle supporte, R' le rayon de la surface extérieure, et P' la pression du fluide environnant; on peut conserver les mêmes notations que dans le cas précédent, on sera conduit aux mêmes

calculs, mais comme nous ne supposons plus qu'il y ait une force centrale, on aura $c = 0$, et simplement: $U = \frac{a}{9} r + \frac{b}{r^2}$.

Les pressions exercées sur tous les points de l'épaisseur de la croûte sphérique, seront alors données par les formules:

$$X'' = -2Ab.\frac{3xz}{r^5}, \qquad X' = -2Ab\frac{3xy}{r^5}, \qquad X = A\left(\frac{5}{9}a - 2b.\frac{3x^2 - r^2}{r^5}\right),$$

$$Y'' = -2Ab.\frac{3zy}{r^5}, \qquad Y' = A\left(\frac{5}{9}a - 2b.\frac{3y^2 - r^2}{r^5}\right), \qquad Y = -2Ab\frac{3xy}{r^5},$$

$$Z'' = A\left(\frac{5}{9}a - 2b.\frac{3z^2 - r^2}{r^5}\right), \qquad Z' = -2Ab\frac{3zy}{r^5}, \qquad Z = -2Ab\frac{3xz}{r^5},$$

Si dans la valeur de Z'' on fait $z = r = R$, on devra avoir $Z'' = -P$; si l'on y fait $z = r = R'$, on devra avoir $Z'' = -P'$; on obtiendra ainsi deux équations de condition, d'où l'on déduira les valeurs suivantes des constantes a et b:

$$a = \tfrac{9}{5}.\frac{PR^3 - P'R'^3}{A(R'^3 - R^3)}, \qquad b = \tfrac{1}{4}.\frac{(P - P')R^3 R'^3}{R'^3 - R^3}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans Z'' et que l'on fasse $z = 0$, on obtiendra, pour l'élément de la force qui tend à rompre la sphère suivant un plan diamétral: $A\left(\frac{5}{9}a + \frac{2b}{r^3}\right) = \frac{PR^3 - P'R'^3}{R'^3 - R^3} + \frac{1}{r^3}\frac{(P - P')R^3 R'^3}{(R'^3 - R^3)}$; si l'on multiplie cette expression par $(r\,\partial\varphi\,\partial r)$ et qu'on intègre ensuite par rapport à φ de 0 à 2π, et par rapport à r de R à R', on obtiendra, pour la force totale qui tend à ouvrir la sphère suivant un plan diamétral, l'expression: $\pi(PR^2 - P'R'^2)$, qui est effectivement égale à celle, que l'on obtiendrait directement, en se fondant sur des principes connus d'hydrostatique.

58.

Nous étant assurés par là de l'exactitude de nos résultats, nous substituerons à a et b les valeurs que nous venons de déterminer, et nous obtiendrons les formules suivantes:

$$X'' = -\frac{(P - P')R^3 R'^3}{2(R'^3 - R^3)}.\frac{3xz}{r^5}, \qquad X' = -\frac{(P - P')R^3 R'^3}{2(R'^3 - R^3)}.\frac{3xy}{r^5},$$

$$X = \frac{PR^3 - P'R'^3}{R'^3 - R^3} - \frac{(P - P')R^3 R'^3}{2(R'^3 - R^3)}.\frac{3x^2 - r^2}{r^5},$$

$$Y'' = -\frac{(P - P')R^3 R'^3}{2(R'^3 - R^3)}.\frac{3zx}{r^5}, \qquad Y' = \frac{PR^3 - P'R'^3}{R'^3 - R^3} - \frac{(P - P')R^3 R'^3}{2(R'^3 - R^3)}.\frac{3y^2 - z^2}{r^5},$$

$$Y = -\frac{(P - P')R^3 R'^3}{2(R'^3 - R^3)}.\frac{3xy}{r^5},$$

$$Z''=\frac{PR^3-P'R'^3}{R'^3-R^3}-\frac{(P-P')R^3R'^3}{2(R'^3-R^3)}\cdot\frac{3z^2-r^2}{r^5},\quad Z'=-\frac{(P-P')R^3R'^3}{2(R'^3-R^3)}\cdot\frac{3zy}{r^5},$$

$$Z=-\frac{(P-P')R^3R'^3}{2(R'^3-R^3)}\cdot\frac{3xz}{r^5},$$

$$U=\frac{PR^3-P'R'^3}{5A(R'^3-R^3)}r+\frac{(P-P')R^3R'^3}{4A(R'^3-R^3)}\cdot\frac{1}{r^2},\quad \theta=3.\frac{PR^3-P'R'^3}{5A(R'^3-R^3)}.$$

On supposera dans la discussion qui va suivre que la pression intérieure P soit beaucoup plus grande que celle du fluide environnant P', ensorte que $[PR^3-P'R'^3]$ soit positif. Dans cette hypothèse θ qui est constant sera aussi positif; l'enveloppe sphérique se dilatera donc, et cela également dans toute son étendue.

Pour étudier la variation des pressions autour d'un point quelconque de l'enveloppe proposée, on peut, en vertu de la symmétrie des données, supposer que ce point est situé sur l'axe des x, et qu'il a conséquemment pour coordonnées $x=r$, $y=0$, $z=0$; pour ce point les forces tangentielles X'', Y''; X', Z'; Y, Z sont nulles, et les pressions principales sont:

$$A=\frac{PR^3-P'R'^3}{R'^3-R^3}-\frac{(P-P')R^3R'^3}{R'^3-R^3}\cdot\frac{1}{r^3},\quad B=C=\frac{PR^3-P'R'^3}{R'^3-R^3}+\frac{(P-P')R^3R'^3}{2(R'^3-R^3)}\cdot\frac{1}{r^3}.$$

Les deux tractions B et C étant égales et positives, on doit en conclure que tous les efforts dirigés dans le plan tangent à la sphère de rayon r, sont des tractions toutes égales entr'elles, et agissant toutes normalement à des plans diamétraux de la sphère proposée. A au contraire, pouvant se mettre sous la forme: $-\frac{PR^3(R'^3-r^3)+P'R'^3(r^3-R^3)}{(R'^3-R^3)r^3}$, est négatif pour toutes les valeurs de r comprises entre R et R', c'est-à-dire pour tous les points de l'enveloppe sphérique; A représentera donc toujours une pression; elle se réduit à $-P$, si $r=R$, et à $-P'$ si $r=R'$, ce qui devait être.

Si l'on prend le point considéré pour nouvelle origine, l'ancien axe des x pour axe des x_1, et pour axe des y_1 et des z_1 deux droites quelconques, perpendiculaires entrélles, et situées dans le plan tangent à la sphére de rayon r, tous les efforts exercés autour du point proposé, seront proportionnels aux rayons vecteurs de l'ellipsoïde représenté par l'équation:

$$\frac{x_1^2}{[(PR^3-P'R'^3)r^3-(P-P')R^3R'^3]^2}+\frac{y_1^2+z_1^2}{[(PR^3-P'R'^3)r^3+\frac{1}{2}(P-P')R^3R'^3]^2}=\frac{1}{(R'^3-R^3)^2r^6},$$

et chacun d'eux agira sur un plan parallèle au plan tangent à l'une des

surfaces représentées par l'équation:

$$-\frac{x_1^2}{[PR^3(R'^3-r^3)+P'R'^3(r^3-R^3)]}+\frac{y_1^2+z_1^2}{[(PR^3-P'R'^3)r^3+\frac{1}{2}(P-P')R^3R'^3]}=\pm\frac{1}{(R'^3-R^3)r^3},$$

au point où cette surface sera rencontrée par le rayon vecteur correspondant.

Dans le voisinage de l'axe des x, ces efforts seront des pressions; dans le voisinage des deux autres axes ce seront des tractions; le passage, de l'un à l'autre de ces états, se fera par les rayons vecteurs de l'ellipsoïde, situés sur le cône asymptotique, représenté par l'équation:

$$-\frac{x_1^2}{PR^3(R'^3-r^3)+P'R'^3(r^3-R^3)}+\frac{y_1^2+z_1^2}{(PR^3-P'R'^3)r^3+\frac{1}{2}(P-P')R^3R'^3}=0,$$

lesquels représenteront de simples efforts tangentiels, exercés sur des plans tangens à ce cône.

59.

La traction principale B ou C sera d'autant plus grande que r sera plus petit; sa valeur maxima aura donc lieu pour $r=R$, et aura pour expression: $\frac{PR^3-P'R'^3}{R'^3-R^3}+\frac{(P-P')R'^3}{2(R'^3-R^3)}$. Il est important dans la pratique, que cette quantité ne surpasse pas le plus grand effort de traction qu'il est permis de faire supporter à la substance dont l'enveloppe est composée; soit a cette limite, la plus petite valeur admissible du rapport de R' à R sera donnée par l'équation:

$$a=\frac{PR^3-P'R'^3}{R'^3-R^3}+\frac{(P-P')R'^3}{2(R'^3-R^3)},\quad \text{d'où}\quad \frac{R'^3}{R^3}=2\cdot\frac{P+a}{2a+3P'-P}.$$

Lorsque P égale ou surpasse $(2a+3P')$, l'équation précédente donne pour le rapport $\frac{R'}{R}$ une valeur infinie ou négative, ce qui ne saurait être; on doit conclure de là que l'enveloppe sphérique éprouvera une altération permanente, lorsque la pression intérieure surpassera le triple de la pression extérieure, augmenté du double de la plus grande traction que l'on peut faire supporter à la substance de cette enveloppe.

Ainsi il existe pour une sphère creuse, comme pour un cylindre creux, une limite que la pression intérieure ne saurait dépasser sans produire une altération permanente dans son enveloppe solide, quelque grande que fut son épaisseur. Cette limite est environ de 2800 atmosphères pour le fer et de 2000 pour la fonte.

60.

Dans la pratique on s'est servi jusqu'ici de la formule $a(R'^2 - R^2) = (PR^2 - P'R'^2)$, d'où $\frac{R'^3}{R^2} = \frac{a+P}{a+P'}$, pour déterminer le plus petit rapport des rayons intérieur et extérieur, d'une sphère creuse capable de supporter une pression intérieure donnée. Cette formule diffère essentiellement de celle que nous avons établie plus haut; mais il est à remarquer que quand la pression P est beaucoup plus petite que la limite $(2a+3P')$; ces deux formules donnent sensiblement le même résultat: si, par exemple, l'enveloppe sphèrique est en fonte, et la pression intérieure de 100 atm., le fluide environnant étant l'air atmosphérique, notre formule donne $\frac{R'}{R} = 1{,}0495$, et la formule ordinaire 1,0485; elles indiquent toutes deux que l'épaisseur doit être à peu près le $\frac{1}{2\,0}^{e}$ du rayon intérieur. En général la formule ordinaire conduit à des résultats toujours plus petits que ceux donnés par la formule déduite de notre théorie, et qui en diffèrent d'autant plus que la pression intérieure est plus considérable.

Quatrième section. Cas généraux.

Cas d'un plan indéfini.

61.

Nous considérerons le cas d'un espace solide, terminé par un plan indéfini, à la surface duquel seroient appliquées des tensions ou des pressions normales variant suivant une loi donnée, continue ou discontinue d'un point à l'autre de ce plan. Chaque molécule de cet espace solide se sera éloigné d'une certaine quantité de la position qu'elle occupait dans le cas de l'homogénéité. Il s'agit de déterminer les lois qui régissent ce changement de position, et les pressions intérieures qu'il fait naître. On suppose qu'aucune force accélératrice étrangère n'agisse sur les parties intérieures de cet espace.

On prendra le plan qui limite l'espace proposé pour plan coordonné des xy, et l'axe des z dans l'intérieur de l'espace solide. En conservant les notations adoptées dans la première partie de ce mémoire, les projections u, v, w, de l'espace décrit par chaque molécule, devront satisfaire aux équations différentielles:

1. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2.\frac{\partial \theta}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2.\frac{\partial \theta}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+2.\frac{\partial \theta}{\partial z}=0,$$

θ, ou la dilatation variable des différens points de l'espace proposé étant donné par la formule:

$$2.\quad \theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

et devant, en vertu des équations (1.), satisfaire à l'équation différentielle:

$$3.\quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial w^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}=0.$$

Il résulte évidemment des équations (1. et 3.) que les fonctions u, v, w devront toutes satisfaire à l'équation aux différentielles partielles:

$$4.\quad \frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)}{\partial z^2}=0,$$

dans laquelle on suppose que φ représente u, ou v, ou w. L'intégrale générale de cette équation peut être composée d'une somme infinie de termes de la forme:

$$5.\quad \left((A+Bz)\,e^{-\sqrt{(p^2+q^2)}\cdot z}+(C+Dz)\,e^{\sqrt{(p^2+q^2)}\cdot z}\right)\times\begin{cases}\cos p\,(x-\mu)\cos q\,(y-\nu)\ \text{ou}\\ \cos p\,(x-\mu)\sin q\,(y-\nu)\ \text{ou}\\ \sin p\,(x-\mu)\cos q\,(y-\nu)\ \text{ou}\\ \sin p\,(x-\mu)\sin q\,(y-\nu),\end{cases}$$

les constantes arbitraires A, B, C, D, p, q, μ, ν, variant d'une manière quelconque d'un terme à l'autre.

Les fonctions u, v, w seront donc en général composés de termes de la forme (5.); mais dans le cas qui nous occupe, l'influence des pressions exercées sur le plan des xy, devant diminuer et non augmenter à mesure qu'on s'en éloigne, l'hypothèse $z=\infty$ devra annuler tous les termes de u, v, w, et non les rendre infinis; les coëfficiens C et D de l'expression (5.) doivent donc être nuls, et les fonctions u, v, w seront de la forme:

$u=\Sigma e^{-rz}[(e_1+f_1z)c_xc_y+(g_1+h_1z)c_xs_y+(k_1+l_1z)s_xc_y+(m_1+n_1z)s_xs_y]$;

on représente ici pour simplifier: $\sqrt{(p^2+q^2)}$ par r, et $\cos p(x-\mu)$, $\cos q(y-\nu)$, $\sin p(x-\mu)$, $\sin q(y-\nu)$, par c_x, c_y, s_x, s_y; les valeurs de v et w s'obtiendront au moyen de la valeur de u, en changeant l'accent 1 des constantes en 2 et 3.

Il s'agit maintenant de trouver les relations qui doivent exister entre les 24 constantes contenues dans les trois termes de u, v, w, correspondans aux mêmes valeurs de p et q.

62.

D'abord il faut que les équations (1., 2. et 3.) soient satisfaites, ce qui donne les 12 équations suivantes:

$$7.\quad \begin{cases} -f_1 r - e_1 p^2 + m_2 pq + l_3 p - k_3 pr = 0, & -f_2 r + m_1 qp - e_2 q^2 + h_3 q - g_3 qr = 0, \\ & -f_3 r - k_1 pr - g_2 qr - f_3 r + e_3 r^2 = 0, \\ -h_1 r - g_1 p^2 - k_2 pq + n_3 p - m_3 pr = 0, & -h_2 r - k_1 qp - g_2 q^2 - f_3 q + e_3 qr = 0, \\ & -h_3 r - m_1 pr + e_2 qr - h_3 r + g_3 r^2 = 0, \\ -l_1 r - k_1 p^2 - g_2 pq - f_3 p + e_3 pr = 0, & -l_2 r - g_1 pq - k_2 q^2 + n_3 q - m_3 qr = 0, \\ & -l_3 r + e_1 pr - m_2 qr - l_3 r + k_3 r^2 = 0, \\ -n_1 r - m_1 p^2 + e_2 pq - h_3 p + g_3 pr = 0, & -n_2 r + e_2 qp - m_2 q^2 - l_3 q + k_3 qr = 0, \\ & -n_3 r + g_1 pr + k_2 qr - n_3 r + m_3 r^2 = 0, \end{cases}$$

et comme conséquences les quatre équations:

$$8.\quad \begin{cases} -l_1 q + h_2 q - f_3 r = 0, & n_1 p - f_2 q - h_3 r = 0, \\ -f_1 p + n_2 q - l_3 r = 0, & -h_1 p - l_2 q - n_3 r = 0. \end{cases}$$

Les composantes X'', Y'', Z'' de la tension exercée sur un élément plan parallèle au plan des xy, étant, comme on l'a démontré dans la première partie de ce mémoire:

$$9.\quad X'' = A\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad Y'' = A\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad Z'' = A\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + 3\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

il faudra, en vertu des données de la question proposée, que pour $z = 0$, X'' et Y'' soient nulles, et que Z'' se réduise à une fonction de la forme:

$$10.\quad Z'' = \frac{1}{2\pi}\iiiint F(\mu, \nu)\cos p(x-\mu)\cos q(y-\nu)\,\partial p\,\partial\mu\,\partial q\,\partial\nu,$$

toutes les intégrations ayant pour limites $-\infty$ et $+\infty$; $F(x, y)$ étant la fonction continue ou discontinue qui exprime la loi des tensions données sur le plan des xy.

Si donc on suppose que le Σ des valeurs générales de u, v, w soient chacun remplacé par une intégrale quadruple, et si l'on représente par F, l'élément $\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{A} F(\mu, \nu)\,\partial p\,\partial\mu\,\partial q\,\partial\nu\right]$, on aura entre les 24 constantes contenues dans les termes de u, v, w correspondans, les 12 autres équations:

$$11.\quad \begin{cases} f_1-e_1r+k_3p=0,\ f_2-e_2r+g_3q=0,\ k_1p+g_2q+3f_3-3e_3r=F, \\ h_1-g_1r+m_3p=0,\ h_2-g_2r-e_3q=0,\ m_1p-e_2q+3h_3-3g_3r=0, \\ f_1-k_1r-e_3p=0,\ l_2-k_2r+m_3q=0,\ -e_1p+m_2q+3l_3-3k_3r=0, \\ n_1-m_1r-g_3p=0,\ n_2-m_2r-k_3q=0,\ -g_1p-k_2q+3n_3-3m_3r=0. \end{cases}$$

Les 24. équations (7. et 11.) donnent par des éliminations successives les valeurs suivantes des inconnues, qu'elles renferment:

$$12.\quad \begin{cases} e_1=f_1=g_1=h_1=0;\quad k=\frac{p}{4r^2}F,\quad l_1=-\frac{p}{2r}F;\quad m_1=n_1=0; \\ e_2=f_2=0;\quad g_2=\frac{q}{4r^2}F;\quad h_2=-\frac{q}{2r}F;\quad k_2=l_2=m_2=n_2=0; \\ e_3=-\frac{3}{4r}F,\quad f_3=-\frac{1}{2}F;\quad g_3=h_3=k_3=l_3=m_3=n_3=0. \end{cases}$$

63.

Les valeurs de u, v, w seront donc, dans le cas particulier, dont il s'agit ici:

$$13.\quad \begin{cases} u=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{1}{A}\iiiint e^{-rz}\left(\frac{p}{4r^2}-\frac{pz}{2r}\right)F(\mu,\nu)\sin p(x-\mu)\cos q(y-\nu)\,\partial p\,\partial\mu\,\partial q\,\partial\nu, \\ v=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{1}{A}\iiiint e^{-rz}\left(\frac{q}{4r^2}-\frac{qz}{2r}\right)F(\mu,\nu)\cos p(x-\mu)\sin q(y-\nu)\,\partial p\,\partial\mu\,\partial q\,\partial\nu, \\ w=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{1}{A}\iiiint e^{-rz}\left(-\frac{3}{4r}-\frac{z}{2}\right)F(\mu,\nu)\cos p(x-\mu)\cos q(y-\nu)\,\partial p\,\partial\mu\,\partial q\,\partial\nu, \end{cases}$$

On en déduira pour la dilatation θ, l'expression:

$$14.\quad \theta=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{A}\iiiint e^{-rz}\cdot\tfrac{1}{2}F(\mu,\nu)\cos p(x-\mu)\cos q(y-\nu)\,\partial p\,\partial\mu\,\partial q\,\partial\nu;$$

pour $z=0$, cette valeur de la dilatation devient

$$15.\quad \theta=\frac{F(x,y)}{2A}.$$

On en conclut ce théorème remarquable:

Lorsqu'en un point de la surface plane d'un corps solide assez étendu, on exerce une traction ou une pression normale, la partie du corps voisine de la surface en ce point se dilate ou se condense d'une quantité égale à la pression exercée, rapportée à l'unité de surface, divisée par le double du coëfficient A que nous avons donné le moyen de calculer précédemment.

Par exemple, un poinçon ayant 1 millimètre carré de surface plane à sa base, et étant pressé normalement à une surface plane de fer par un poids de 10 kilogrammes, déterminera dans les parties voisines du point pressé une compression cubique de $\frac{10}{2.8000}$ ou de $\frac{1}{1600}$ de leur volume primitif.

Sur une masse de bois de chêne la compression correspondante seroit d'environ $\frac{1}{100}^{e}$, si toutefois cette pression n'altéroit pas la surface d'une manière permanente.

Les valeurs de u, v, w, étant connues, on en déduira facilement les composantes des pressions exercées dans l'intérieur de l'espace proposé, sur des élémens-plans parallèles aux plans coordonnés, et par suite celles exercées dans toutes les directions autour d'un point quelconque. Il suffira pour cela de faire usage des formules et de théorèmes établis dans la première et la seconde partie de ce mémoire.

64.

On vérifiera aisément que pour $z=0$, $X''=0$, $Y''=0$, $Z''=F(x,y)$.

Nous nous abstiendrons de pousser plus loin la dissussion du cas que nous sommes proposé. Les valeurs numériques des formules, qui expriment la loi générale du phénomène que nous avions à étudier, se trouveront dans chaque cas particulier au moyen des valeurs d'une classe d'intégrales définies, sur lesquels les géométres se sont exercés depuis longtems, et qui sont maintenant généralement connues.

En suivant la même marche, on représenteroit par des formules analogues aux précédentes, le cas où les tensions données seroient obliques sur le plan indéfini qui limite l'espace proposé, quelle que fut la loi de cette obliquité; il suffirait pour cela de modifier convenablement les équations (11.), en y introduisent les formes des fonctions, continues ou discontinues qui lieraient entr'elles les trois composantes de toutes les tensions données.

Cas de deux plans parallèles.

65.

Imaginons un espace solide limité par deux plans parallèles, auxquels seraient appliquées des pressions ou des tensions normales, variant suivant des lois données, continues ou discontinues, et proposons nous de trouver les formules qui expriment l'équilibre de cet espace solide. Nous supposons, comme dans le cas précédent, qu'aucune force accélératrice étrangère n'agisse sur les molécules intérieures: conservons les notations précédentes et cherchons des fonctions u, v, w qui satisfassent aux équations (1.) et qui remplissent les conditions proposées.

On prendra pour plan des xy un plan parallèle aux deux plans donnés, et partageant en deux parties égales la distance qui les sépare,

distance que nous désignerons par $2a$. Il est aisé de prévoir, d'après la composition des formules définitives du cas précédent que les valeurs de u, v, w seront de la forme:

$$17.\quad \begin{cases} u = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{A} \iiiint ((e_1 + f_1 z)\zeta + (g_1 + h_1 z)\xi)\, s_x c_y\, \partial p\, \partial \mu\, \partial q\, \partial \nu, \\ v = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{A} \iiiint ((e_2 + f_2 z)\zeta + (g_2 + h_2 z)\xi)\, c_x s_y\, \partial p\, \partial \mu\, \partial q\, \partial \nu, \\ w = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{A} \iiiint ((e_3 + f_3 z)\zeta + (g_3 + h_3 z)\xi)\, c_x c_y\, \partial p\, \partial \mu\, \partial q\, \partial \nu; \end{cases}$$

on représente ici pour abréger, $\frac{e^{rz} - e^{-rz}}{2}$, $\frac{e^{rz} + e^{-rz}}{2}$ par ζ et ξ; $\sqrt{(p^2+q^2)}$ par r; et $\cos p(x-\mu)$, $\cos q(y-\nu)$, $\sin p(x-\mu)$, $\sin q(y-\nu)$ par c_x, c_y, s_x, s_y; toutes les intégrations ont pour limites $\pm\infty$.

L'expression de la dilatation déduite de ces formules sera:

$$18.\quad \theta = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{A} \iiiint \left[(e_1 p + e_2 q + g_3 r + f_3)\zeta + (g_1 r + g_2 q + e_3 r + h_3)\xi\right] c_x c_y\, \partial p \partial q \partial \mu \partial \nu,$$

car les termes multipliés par z devront disparaître, pour que θ puisse satisfaire à l'équation (3.), ce qui exigera que l'on ait, entre les indéterminées contenues dans les expressions (17.) les deux équations:

$$19.\quad f_1 p + f_2 q + h_3 r = 0, \quad h_1 p + h_2 q + f_3 r = 0,$$

si l'on substitue les valeurs (17. et 18.) dans la troisième des équations (1.), il faudra, pour qu'elle soit identiquement satisfaite, que l'on ait les deux équations:

$$20.\quad 2h_3 + g_1 r + g_2 q + e_3 r = 0, \quad 2f_3 + e_1 p + e_2 q + g_3 r = 0,$$

qui permettent d'écrire ainsi la valeur de θ:

$$21.\quad \theta = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{A} \iiiint (-f_3\zeta - h_3\xi)\, c_x c_y\, \partial p\, \partial \mu\, \partial q\, \partial \nu.$$

Si l'on substitue ensuite les valeurs (17. et 21.) dans les deux premières des équations (1.), elles exigeront, pour être satisfaites que l'on aît les quatre relations:

$$22.\quad h_1 r + f_3 p = 0, \quad f_1 r + h_3 p = 0, \quad h_2 r + f_3 q = 0, \quad f_2 r + h_3 q = 0,$$

dont les équations (19.) ne sont que des conséquences.

Soient $F(x, y)$ et $f(x, y)$ les fonctions représentant les tensions normales données sur les deux plans parallèles, dont les équations sont $z = a$, $z = -a$, les expressions (9.) devront donner:

$$23.\quad \begin{cases} X'' = 0, \quad Y'' = 0, \quad Z'' = F(x, y) & \text{pour } z = +a, \\ X'' = 0, \quad Y'' = 0, \quad Z'' = f(x, y) & \text{pour } z = -a. \end{cases}$$

Pour que les valeurs (17.) de u, v, w satisfassent à ces conditions, il fau-

dra que l'on ait entre les indéterminées qu'elles contiennent, les six équations :

$$24.\quad \begin{cases} [g_1 r+f_1-e_3 p+a(h_1 r-f_3 p)]A+[e_1 r+h_1-g_3 p+a(f_1 r-h_3 p)]B=0, \\ -[g_1 r+f_1-e_3 p+a(h_1 r-f_3 p)]A+[e_1 r+h_1-g_3 p+a(f_1 r-h_3 p)]B=0, \\ [g_2 r+f_2-e_3 q+a(h_2 r-f_3 q)]A+[e_2 r+h_2-g_3 q+a(f_2 r-h_3 q)]B=0, \\ -[g_2 r+f_2-e_3 q+a(h_2 r-f_3 q)]A+[e_2 r+h_2-g_3 q+a(f_2 r-h_3 q)]B=0, \\ (2g_3 r+f_3+2h_3 r a)A+(2e_3 r+h_3+2f_3 r a)B=F, \\ -(2g_3 r+f_3-2h_3 r a)A+(2e_3 r+h_3-2f_3 r a)B=f; \end{cases}$$

F et f représentant, pour abréger, $F(\mu, \nu)$, $f(\mu, \nu)$, et A et B les valeurs de ζ et de ξ correspondantes à $z=a$ ou $\frac{e^{ar}-e^{-ar}}{2}$ et $\frac{e^{ar}+e^{-ar}}{2}$.

Les 12 équations (20. 22. et 24.) donneront, par des éliminations successives, les valeurs suivantes des indéterminées qu'elles contiennent :

$$25.\quad \begin{cases} e=-\frac{p}{2r^2}\cdot\frac{2arA-B}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}, & e_2=-\frac{q}{2r^2}\cdot\frac{2arA-B}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}, & e_3=\frac{1}{2r}\cdot\frac{2arB+3A}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}, \\ f_1=\frac{p}{r}\cdot\frac{A}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}, & f_2=\frac{q}{r}\cdot\frac{A}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}, & f_3=-\frac{A}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}, \\ g_1=-\frac{p}{2r^2}\cdot\frac{2arB-A}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}, & g_2=-\frac{q}{2r^2}\cdot\frac{2arB-A}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}, & g_3=\frac{1}{2r}\cdot\frac{2arA+3B}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}, \\ h_1=\frac{p}{r}\cdot\frac{B}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}, & h_2=\frac{q}{r}\cdot\frac{B}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}, & h_3=-\frac{A}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}. \end{cases}$$

66.

D'après cela, les valeurs de u, v, w, qui correspondent au cas que nous traitons, seront :

$$26.\quad \begin{cases} u=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{1}{A}\iiiint\left[\left(\frac{\frac{1}{2r}B-Aa}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}+\frac{Az}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}\right)\zeta\right. \\ \qquad\left.+\left(\frac{\frac{1}{2r}A-aB}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}+\frac{Bz}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}\right)\xi\right]\frac{p}{r}\,s_x c_y\,\partial p\,\partial\mu\,\partial q\,\partial\nu, \\ v=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{1}{A}\iiiint\left[\left(\frac{\frac{1}{2r}B-Aa}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}+\frac{Az}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}\right)\zeta\right. \\ \qquad\left.+\left(\frac{\frac{1}{2r}A-aB}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}+\frac{Bz}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}\right)\xi\right]\frac{q}{r}\,c_x s_y\,\partial p\,\partial\mu\,\partial q\,\partial\nu, \\ w=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\frac{1}{A}\iiiint\left[\left(\frac{\frac{3}{2r}A+aB}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}-\frac{Bz}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}\right)\zeta\right. \\ \qquad\left.+\left(\frac{\frac{3}{2r}B+aA}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}-\frac{Az}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}\right)\xi\right]c_x c_y\,\partial p\,\partial\mu\,\partial q\,\partial\nu \end{cases}$$

Ces formules, et les applications qu'on pourroit en faire, se simplifient singulièrement, en représentant par φ la fonction:

$$27.\quad \left\{\begin{aligned}\varphi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{A} \iiiint \Big[&\left(\frac{\frac{1}{2r}B - Aa}{AB - ar}\cdot\frac{F-f}{4} + \frac{Az}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4}\right)\zeta \\ &+ \left(\frac{\frac{1}{2r}A - aB}{AB+ar}\cdot\frac{F+f}{4} + \frac{Bz}{AB-ar}\cdot\frac{F-f}{4}\right)\xi\Big]\frac{c_x c_y}{r}\,\partial p\,\partial\mu\,\partial q\,\partial\nu;\end{aligned}\right.$$

en effet, l'inspection des équations (26.) démontre que l'on a:

$$28.\quad u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \theta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right),\quad w = \int\theta\,\partial z - \frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

en sorte qu'il suffira d'effectuer, dans chaque cas particulier, les intégrations nécessaires pour déterminer la fonction φ; les équations (28.) permettront ensuite de déterminer, par de simples différentiations, les formules (26.), et par suite les pressions intérieures de l'espace proposé.

Les formules précédentes, pour être obtenues en séries numériques et immédiatement applicables, exigent la connaissance des valeurs d'un genre particulier d'intégrales définies, dont il ne nous parait pas que les géomètres se soient encore occupés. Nous avons fait à ce sujet un travail que nous nous proposons de publier incessamment.

Cas général du cylindre indéfini.

67.

Nous nous proposons de traiter ici le cas général d'un cylindre solide, indéfini, à base circulaire, creux ou plein, et dont les parois, intérieure et extérieure, seraient soumises à des pressions quelconques. Il est alors préférable de substituer aux coordonnées orthogonales x, y, z les trois coordonnées sémi-polaires suivantes:

1) la distance r d'un point M quelconque à l'axe du cylindre proposé;
2) l'angle φ, que le rayon vecteur r du point M fait avec un plan méridien de convention;
3) et enfin la distance z qui sépare ce point M d'un plan donné perpendiculaire à l'axe.

Au lieu des projections u, v, w sur les axes des x, y, z de l'élément linéaire qui sépare la molécule M de la position qu'elle occuperait dans le cas de l'homogénéité, on considèrera de préférence les projections U, V, W de ce même élément, la première sur le rayon vecteur r, la

seconde sur la tangente à l'arc $r\varphi$, enfin la troisième sur l'axe même du cylindre.

U, V, W seront des fonctions de r, φ et z, qui devront satisfaire à trois équations différentielles analogues aux équations (1.) de la première partie de ce mémoire; on déduit ces trois nouvelles équations de ces équations (1.) elles mêmes, en employant des formules de transformation que l'on trouve facilement, et qu'il serait trop long de détailler ici; on obtient ainsi les équations différentielles suivantes:

$$1.\begin{cases} 3.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial\varphi}-\frac{V}{r}-\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{H\cos\varphi}{A}=0, \\ 3.\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial\varphi}-\frac{V}{r}-\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)-\frac{H\sin\varphi}{A}=0, \\ 3.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial r}\right)\right)+\frac{G}{A}=0. \end{cases}$$

On suppose ici que la seule force accélératrice, qui agisse conjointement avec les pressions exercées sur les surfaces du corps, pour troubler son homogénéité, soit constante et ait la même direction dans toute l'étendue du cylindre. On suppose en outre, ce qui est permis, que le plan méridien correspondant à $\varphi=0$, est parallèle à la direction de cette force accélératrice; enfin on représente par $G+H$ les composantes de cette force suivant l'axe du cylindre, et suivant la perpendiculaire à cet axe, située dans le plan méridien correspondant à $\varphi=0$.

68.

Les formules de transformation, dont nous avons parlé, donnent les résultats suivans, lorsqu'on substitue les valeurs qu'elles fournissent dans les diverses équations demontrées dans la première partie:

La dilatation est donnée par la formule:

$$2.\quad \theta=\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\partial W}{\partial z},$$

et l'équation différentielle, à laquelle cette fonction nouvelle de r, φ et z doit satisfaire est:

$$3.\quad \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0.$$

Si on cherche la pression exercée en un point quelconque M du corps solide, sur un élément plan w situé sur la surface cylindrique de rayon r, concentrique au cylindre proposé, et que $R_1 w$, $\Phi_1 w$, $Z_1 w$ représentent les projections de cette pression, sur le prolongement du rayon

vecteur r, sur la tangente à l'arc $r\varphi$, et enfin sur l'axe du cylindre, on trouve:

$$4.\quad R_1 = A\left(3\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varphi}+\frac{\partial W}{\partial z}\right),\quad \Phi_1 = A\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi}+\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right),$$
$$Z_1 = A\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

On obtient pareillement pour les composantes R_2, Φ_2, Z_2 de la pression, exercée au même point M sur le plan méridien correspondant, et rapporté à l'unité de surface:

$$5.\quad R_2 = A\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi}+\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r}\right),\quad \Phi_2 = A\left(\frac{\partial U}{\partial r}+3\frac{U}{r}+3\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varphi}+\frac{\partial W}{\partial z}\right),$$
$$Z_2 = A\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial z}\right);$$

enfin les composantes R_3, Φ_3, Z_3 de la pression exercée au même point M sur l'élément plan perpendiculaire à l'axe du cylindre proposé:

$$6.\quad R_3 = A\left(\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{\partial U}{\partial z}\right),\quad \Phi_3 = A\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial \varphi}+\frac{\partial V}{\partial z}\right),$$
$$Z_3 = A\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varphi}+3\cdot\frac{\partial W}{\partial z}\right).$$

Nous désignerons quelquefois ces différentes composantes par les lettres $N_1 = R_1$, $N_2 = \Phi_2$, $N_3 = Z_3$; $T_1 = Z_2 = \Phi_3$, $T_2 = Z_1 = R_3$, $T_3 = R_2 = \Phi_1$. Lorsque les fonctions U, V, W de r, φ, z seront déterminées d'après les circonstances données, les équations (4. 5. 6.) feront connaître, en chaque point, les forces normales et tangentielles N_1, N_2, N_3; T_1, T_2, T_3, exercées sur trois élémens plans perpendiculaires entr'eux; on pourra ensuite, au moyen des formules et des théorèmes démontrés dans la seconde partie de ce mémoire, étudier les circonstances que peuvent présenter les pressions exercées, dans toute espèce de direction, et autour de chaque point du cylindre proposé.

69.

Procèdons maintenant à l'intégration générale des équations différentielles (1.). Introduisons, pour simplifier cette recherche, les quatre fonctions suivantes:

$$7.\quad \theta = \frac{\partial U}{\partial r}+\frac{U}{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varphi}+\frac{\partial W}{\partial z};\quad \xi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi}-\frac{V}{r}-\frac{\partial V}{\partial r};$$
$$\zeta = \frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial r};\quad \Omega = \frac{\partial V}{\partial z}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W}{\partial \varphi};$$

elles devront satisfaire aux quatre équations differentielles:

$$8.\quad \begin{cases} 3.\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}.\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\frac{H\cos\varphi}{A}=0, & \frac{3}{r}.\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}-\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}-\frac{H\sin\varphi}{A}=0, \\ 3.\frac{\partial\theta}{\partial z}-\frac{1}{r}.\frac{\partial\Omega}{\partial z}-\frac{1}{r}.\frac{\partial\zeta r}{\partial r}+\frac{G}{A}=0, & \frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{1}{r}.\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}.\frac{\partial\Omega r}{\partial r}=0. \end{cases}$$

Les trois premières ne sont autres que les équations (1.) et la quatrième s'obtient en éliminant U, V, W entre les quatre équations (7.).

Ces diverses équations conduisent par des éliminations successives à

$$9.\quad \begin{cases} \frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}.\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=0, \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}.\frac{\partial\xi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}.\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+2\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{G}{A}=0, \end{cases}$$

équations qui peuvent être substituées aux équations (1.), comme plus faciles à intégrer.

Lorsque les valeurs générales de θ, ξ, W auront été déterminées par l'intégration des équations (9.), les équations (8.) donneront

$$\zeta=-\frac{H\cos\varphi}{A}z-\int\left(3.\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}.\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\right)\partial z,$$

$$\Omega=\frac{H\sin\varphi}{A}z-\int\left(3.\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}-\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)\partial z,$$

et l'on déterminera les fonctions de r et φ, qu'il faut ajouter à ces intégrales, par la condition que les équations (8.) soient satisfaites.

Lorsque les valeurs générales de ζ et de Ω seront ainsi déterminées, les équations (7.) donneront:

$$11.\quad U=\int\left(\zeta+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\partial z,\quad V=\int\left(\Omega+\frac{1}{r}.\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\partial z,$$

et l'on déterminera les fonctions de r et φ, qu'il faut ajouter à ces intégrales par la condition que les quatre équations (7.) soient satisfaites.

70.

La recherche des valeurs générales des U, V, W se trouve ainsi ramenée à l'intégration des équations (9.).

Dans le but d'intégrer la première des équations (9.), soit posé dans cette équation:

$$12.\quad \theta=R\cos pz\cos q\varphi,$$

R étant simplement fonction de r, p une constante arbitraire, et q un nombre entier quelconque, afin que θ conserve la même valeur, lorsqu'on y change φ en $\varphi+2\pi$; cette substitution conduit à

$$13. \quad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} - \left(\frac{q^2}{r^2} + p^2\right) R = 0.$$

Ainsi l'expression (12.) pourra être un terme de la valeur générale de θ, si la fonction R satisfait à l'équation différentielle (13.).

On parvient à intégrer l'équation (13.) par des procédés analogues à ceux que Mr. **Fourrier** a développé dans son ouvrage sur la théorie analytique de la chalenr, en traitant le cas du cylindre. On vérifie d'ailleurs aisément que l'équation (13.) est satisfaite par l'intégrale définie:

$$14. \quad R = m = \int_0^\pi (e^{pr\sin\alpha} + e^{-pr\sin\alpha}) \cos q\alpha \, \partial\alpha,$$

lorsque q est un nombre entier pair, et par:

$$15. \quad R = n = \int_0^\pi (e^{pr\sin\alpha} - e^{-pr\sin\alpha}) \sin q\alpha \, \partial\alpha,$$

lorsque q est impair; l'expression (14.) étant nulle pour q impair, et l'expression (15.) lorsque q est pair. Ainsi l'une ou l'autre des intégrales définies (14.) ou (15.) donne une intégrale particulière de l'équation (13.).

Pour trouver son intégrale générale, soit posé dans cette équation $R = Sm$, s étant une nouvelle fonction de r inconnue; cette substitution conduit à l'équation: $m \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \left(2 \cdot \frac{\partial m}{\partial r} + \frac{m}{r}\right) \frac{\partial S}{\partial r} = 0$, qui multipliée par mr, et intégrée deux fois, donne:

$$S = a + b \int \frac{\partial r}{r m^2}.$$

L'intégrale générale de l'équation (13.), lorsque q est un nombre entier, peut donc se mettre sous la forme:

$$16. \quad R = \left(a + b \int \frac{\partial r}{r m^2}\right) m,$$

a et b étant deux constantes arbitraires, et m l'une ou l'autre des expressions (14. et 15.).

Lorsque $q = 0$, l'intégrale générale de l'équation (13.) est encore donnée par la formule (16.), dans laquelle on doit prendre:

$$m = \int_0^\pi (e^{pr\sin\alpha} + e^{-pr\sin\alpha}) \, \partial\alpha.$$

Lorsque $p = 0$, cette intégrale change de forme, et l'on doit prendre:

$$17. \quad R = a r^q + b r^{-q}.$$

71.

On composera les valeurs de ϑ et de ξ d'une somme de termes semblables à l'expression (12.), respectivement multipliés par des fonctions arbitraires et différentes de p, μ, p, ν.

L'intégrale W de la dernière des équations (3.), dans laquelle le terme $2\frac{\partial\theta}{\partial z}$ doit être regardé comme connu, se composera:

1) d'une série de termes qui feront disparaître chacun un terme de la fonction $2\frac{\partial\theta}{\partial z}$,

2) d'un terme $-\frac{G}{2a}z^2$ destiné à faire disparaître le terme $\frac{G}{A}$ dans l'équation proposée,

3) et enfin d'une intégrale générale semblable à l'intégrale de θ ou de ξ. Un terme quelconque de la première partie de cette intégrale sera de la forme:

$$18. \qquad W=\frac{r}{p}\cdot\frac{\partial R}{\partial r}\sin pz\cos q\varphi;$$

il est aisé de s'assurer en effet que les expressions (12. et 18.), substituées dans la troisième des équations (9.), s'y détruiront mutuellement, lorsque R satisfera à l'équation (13.).

Les valeurs de U, V, W se déduiront ensuite des celles de θ, ξ et W, en suivant la marche indiquée précédemment. Enfin il n'y aura plus que des différentiations très simples à faire subir aux valeurs intégrales de U, V, W, pour avoir les expressions générales des composantes (4. 5. 6.)

Soient ϱ et ϱ' les rayons des surfaces, extérieure et intérieure, du corps cylindrique proposé; soient aussi F_1, F_2, F_3; f_1, f_2, f_3, des fonctions continues ou discontinues en φ et z, représentant les composantes de la pression, variable et connue, exercée en un point quelconque de la surface extérieure ou intérieure de ce corps; les fonctions (4.) R_1, Φ_1, Z_1 devront donner:

$$19. \quad \begin{cases} R_1=F_1, & \Phi_1=F_2, & Z_1=F_3, & \text{pour } r=\varrho', \\ R_1=f_1, & \Phi_1=f_2, & Z_1=f_3, & \text{pour } r=\varrho'. \end{cases}$$

Les valeurs générales de R_1, Φ_1, Z_1 calculées comme il vient d'être indiqué, ne seront plus, lorsqu'on y fera $r=\varrho$ ou $r=\varrho'$, que des séries trigonométriques en z et φ; la détermination des constantes arbitraires en nombre infini que contiennent les intégrales générales des équations (1.), et qui se retrouvent dans les équations (19.), sera donc ramené à la recherche du moyen de représenter des fonctions discontinues de deux variables par des séries trigonométriques, problème dont les géomètres connaissent maintenant la solution complete.

On peut donc traiter ainsi, généralement, et sans difficulté nouvelle, le cas d'un cylindre creux, indéfini, soumis à des pressions agissant d'une manière quelconque sur ses parois.

72.

Imaginons un cylindre plein de rayon ζ, soumis à des forces de torsion dirigées tangentiellement aux cercles de la surface, où elles varient d'une manière quelconque d'un cercle à l'autre, suivant une fonction donnée $F(z)$ de la hauteur z, mais sont constantes sur un même cercle; supposons en outre que les forces G et H soient nulles, et que le cylindre ne soit soumis à aucune traction longitudinale.

La méthode générale que nous venons d'exposer, donne pour ce cas particulier:

$$20.\quad \begin{cases} \theta=0,\ U=0,\ V=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{A}\cdot\frac{\frac{1}{p^2}m'F(\mu)}{\frac{2}{p^2}M''-M}\cos p(\mu-z)\,\partial p\,\partial\mu,\ W=0, \\ N_1=0,\ N_2=0,\ N_3=0,\ T_3=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\iint\frac{\frac{2}{p^2}m''-m}{\frac{2}{p^2}M''-M}F(\mu)\cos p(\mu-z)\,\partial p\,\partial\mu, \\ T_2=0,\ T_1=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\iint\frac{\frac{1}{p}m'F(\mu)}{\frac{2}{p^2}M''-M}\sin p(\mu-z)\,\partial p\,\partial\mu. \end{cases}$$

Dans ces formules: $m=\int_0^{\pi}(e^{pr\sin\alpha}+e^{-pr\sin\alpha})\,\partial\alpha$; m', m'' sont les deux premiers coëfficiens différentiels de cette fonction de r; enfin M, M', M'' sont les valeurs de m, m', m'', lorsque $r=\varrho$.

73.

Supposons, par exemple, que les forces de torsion extérieures soient dirigées dans un sens au dessus du plan $z=0$, et dans l'autre sens au dessous de ce même plan, mais de manière que l'on ait $F(-z)=-F(z)$; supposons aussi que cette fonction soit, nulle de $z=0$ à $z=h-\gamma$, constante et égale à τ de $z=h-\gamma$ à $z=h+\gamma$, et nulle de $z=h+\gamma$ à $z=\infty$.

Les formules (20.) deviennent dans cette hypothèse:

$$21.\quad \begin{cases} \theta=0,\ U=0,\ V=\dfrac{2\tau}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{A}\cdot\frac{m'}{M''-\frac{1}{\varrho}M'}\cdot\frac{\sin ph\sin p\gamma\sin pz}{p}\,\partial p,\ W=0, \\ N_1=N_2=N_3=0,\ T_3=\dfrac{2\tau}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m''-\frac{1}{\varrho}m'}{M''-\frac{1}{\varrho}M'}\cdot\frac{\sin ph\sin p\gamma\sin pz}{p}\,\partial p, \\ T_2=0,\ T_1=\dfrac{2\tau}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{m'}{M''-\frac{1}{\varrho}M'}\sin ph\sin p\gamma\cos pz\,\partial p. \end{cases}$$

On vérifiera aisément que l'expression T_3 pour $r=\varrho$ se réduit à T, lorsque z est compris entre $h+\gamma$ et $h-\gamma$, et qu'elle est nulle pour toute autre valeur de z; c'est ce qui résulte de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ph\sin p\gamma\sin pz}{p}\,\partial p$, dont la discontinuité est connue.

33.
Anzeigen und Nachrichten von Büchern.

Anzeige.

1. Während wir die Anzahl der algebraischen und geometrischen Lehrbücher mit jedem Jahre zunehmen sehn, und durch diese Erscheinung berechtigt werden, auf einen verhältnifsmäfsig eifrigen Betrieb jener Studien in den deutschen Unterrichts-Anstalten zu schliefsen, finden wir die reine Arithmetik im Allgemeinen zurückgesetzt. Der Unterricht beschäftigt sich mehr mit der Algebra, welche, weil sie ohne Unterschied mit rationalen und irrationalen Zahlen operirt, allgemeiner und umfassender als die auf rationale Zahlen beschränkte Arithmetik zu sein scheint; und mit der analytischen Geometrie, welche nur ein weites Feld der Anwendung algebraischer Methoden ist. — Ohne den hohen Werth dieser Zweige der Mathematik im Geringsten zu verkennen, kann man doch behaupten, dafs der Unterricht, auf dieselben beschränkt, in der Mathematik gröfstentheils nur eine Rechenkunst, einen Inbegriff von Methoden, durch welche gewisse Zahlenwerthe gefunden werden, erblicken läfst. Indem die Wissenschaft auf diese Weise fast ausschliefslich eine Methode oder Form wird, geht der bestimmte Inhalt mehr oder weniger verloren; der Unterricht, welcher die wesentlichen Unterschiede verwischt, die in der Natur der Zahl liegen, mag an Leichtigkeit gewinnen; aber diese Leichtigkeit steht mit einem nachtheiligen Formalismus in Verbindung und ersezt nicht den Verlust an innerem Gehalte, und die Armuth, welche dessen Begleiter sind.

Eine Wissenschaft kann niemals etwas anders sein, als die durchgeführte Entwickelung des ihr zu Grunde liegenden Begriffs. Dieser Begriff ist für die Algebra die Zahl. Statt also die Unterschiede der Zahl zu verwischen, statt sich auf eine Methodik zu beschränken, in welcher alles Individuelle ausgelöscht erscheint, mufs die Algebra jene Unterschiede vielmehr aufsuchen und hervorheben, wofern sie ihren Gegenstand wissenschaftlich umfassen soll. — Sie mag immerhin das ausführen, was der Zahl überhaupt und allgemein eigen ist, aber sie darf auch das nicht vergessen, was aufser der Gröfse selbst, die Zahl characterisirt und weitere Unterscheidungen in derselben begründet.

Unstreitig ist es daher auch nicht sehr wissenschaftlich, die Zahlenlehre, welche vorzugsweise jenen eben angedeuteten speziellen Theil der Algebra ausmacht, bei dem Studium der Mathematik, als einen isolirten und entbehrlichen Theil dieser Wissenschaft bei Seite zu setzen. Zugegeben, dafs man ohne Kenntnifs der Arithmetik in andern mathemathischen Disciplinen Gutes leisten könne: so ist es nur bewiesen, dafs man, für gewisse Zwecke der Wissenschaft, die Arithmetik entbehren könne; aber im Allgemeinen ist dieser Zweig, wie jeder andre, ein nothwendiges Glied der Wissenschaft, welche niemals ohne Nachtheil für das Ganze ignorirt bleibt.

Der Grund, aus welchem die häufig Statt findende Zurücksetzung der reinen Zahlenlehre im Unterrichte hervorgeht, liegt unstreitig weniger in dem Verkennen der oben geäufserten, gar nicht neuen Bemerkungen, als in der sehr vorherrschenden Richtung auf die angewandte Mathematik, für welche die Arithmetik unmittelbar keine Hülfsmittel darbietet. Aber die Mathematik nimmt eine selbstständige Würde in Anspruch und es mufs der wesentliche Zweck des Unterrichts sein, das Bewufstsein dieser Würde zu erwecken, und ihre Anerkennung durch die Wissenschaft selbst zu begründen.

Dieser Zweck wird aber nur durch die Strenge erreicht, welche den eigenthümlichen und auszeichnenden Charakter der mathematischen Wissenschaft ausmacht. Und wie steht es um diese Strenge bei dem Unterricht in der Algebra, wenn man die ersten Grundsätze, die Fundamente, auf welchen alle algebraische Operationen ruhen, häufig nur empirisch aufnimmt, indem man den Inhalt wie den Geist der reinen Arithmetik vernachläfsigt? Wenn man sich z. B. begnügt, zu behaupten, dafs die Ordnung der Factoren für das Product gleichgültig sei; dafs jede ganze Zahl sich nur auf eine Weise in Primzahlen zerlegen lasse, und diese und ähnliche arithmetische

Sätze ohne Beweis löst, deren Wichtigkeit die Alten anerkannten, während dieselben jezt beim Unterrichte gewöhnlich nur angedeutet werden.

Wenn nun schon nach dieser Seite die ersten Gründe der Arithmetik zugleich die unentbehrlichen Grundlagen für eine strenge Darstellung der Algebra überhaupt enthalten, so bietet auch in ihrem weiteren Fortgange die Arithmetik das interessanteste Beispiel der Strenge dar, durch welche diese Wissenschaft nach Inhalt und Form ein Ganzes ausmacht, dessen logische Vollendung jeden empfänglichen Sinn auf's lebhafteste ansprechen mufs.

Aus diesen Gründen scheint es sehr wünschenswerth, dafs die Kenntnifs der Arithmetik unter denjenigen, welche sich mit der Mathematik beschäftigen, um diese Wissenschaft zu studiren, mehr Eingang finde. Unter den Hindernissen, welche der Verbreitung der Arithmetik im Wege stehn, ist eine der wichtigsten unstreitig der Mangel eines dem vorauszusetzenden Standpuncte des Unterrichts angemessenen Lehrbuchs.

Die hierher gehörigen Arbeiten von Euler, Lagrange, Gaufs, Legendre u. a. liegen theils in einzelnen Abhandlungen zerstreut, theils zwar in gröfseren Werken gesammelt, deren Umfang und Reichthum jedoch für den Anfänger in diesen Studien gewöhnlich zu grofs sein dürfte. Selbst dem Schulmanne, welcher sich dem mathematischen Unterricht mit Liebe widmet, steht nicht häufig eine Bibliothek und die Zeit zu den Studien zu Gebote, welche erfordert werden, um von den vorhandenen Schätzen für den Unterricht den möglichen Gebrauch zu machen.

Daher schien es mir nützlich, ein Lehrbuch der reinen Arithmetik auszuarbeiten, welches die wichtigsten Resultate dieser so interessanten Wissenschaft darlegte, und bis zu einer gewissen Grenze im Stande wäre, den Mangel gröfserer Werke und einzelner Abhandlungen zu ersetzen. Ich hoffe, besonders Schulmännern einen Dienst zu erweisen, welche, die Wichtigkeit dieses Zweiges für den Unterricht anerkennend, geneigt sein würden, mehr oder weniger davon Gebrauch zu machen, sobald ihnen durch ein Handbuch eine nützliche Erleichterung dargeboten würde.

Das anzukündigende Buch soll keineswegs die gesammte Arithmetik darstellen; sondern es wird sich vielmehr auf eine gewisse Classe von Untersuchungen beschränken, welche als die Elemente der Arithmetik anzusehen sind, und daher den ersten Anspruch auf eine allgemeinere Verbreitung haben. Eine kurze Anzeige des Inhalts wird dies bestimmter nachweisen.

In der Einleitung befindet sich die Erklärung der allgemeinsten Begriffe der Arithmetik, also der Begriffe von den Primzahlen, relativen Primzahlen, der Congruenz, dem Modul (nach Gaufs), u. s. w., nebst einigen hierher gehörigen Sätzen.

Im ersten Abschnitte folgt die Theorie der Congruenzen des ersten Grades, nebst der Lehre von den Kettenbrüchen, so weit sie zur Auflösung derselben nützlich ist.

Der zweite Abschnitt handelt von den Resten der Potenzen im Allgemeinen, der dritte von den quadratischen Resten insbesondere. In beiden wird nur der Fall betrachtet, wenn der Modul eine Primzahl ist. Im dritten wird das Theorem der Reciprocität nach Gaufs bewiesen.

Der vierte Abschnitt enthält eine Verallgemeinerung des Vorigen in Bezug auf zusammengesetzte Modulen.

Im fünften Abschnitt folgt die Auflösung der unbestimmten quadratischen Gleichungen in rationalen Zahlen.

Die folgenden Abschnitte enthalten die Theorie der quadratischen Formen.

Im sechsten Abschnitt wird der Begriff und die Eintheilung durch die Determinante, so wie die Eigenschaft der Aequivalenz und die Reduction dieser Formen erklärt.

Der siebente Abschnitt beschäftigt sich mit den Formen von negativer Determinante.

Der achte Abschnitt enthält eine weitere Ausführung der Theorie der Kettenbrüche, von welcher im neunten Abschnitt Anwendung auf die Lehre von den quadratischen Formen mit positiver nicht quadratischer Determinante gemacht wird.

Der zehnte Abschnitt enthält die Beziehungen zwischen den quadratischen und lineären Formen der Primzahlen, aus deren Vergleichung bekanntlich sehr interessante Lehrsätze hervorgehn. Ein Anhang handelt von dem Gebrauch dieser Sätze für die Auflösung verschiedener Probleme, so wie von einigen einzelnen Lehrsätzen, z. B. der Zer-

legung einer Zahl in 4 Quadrate, welche im Zusammenhange mit weiteren Theorien durchzuführen allzu weitläufig und dem Zwecke des Buches nicht angemessen schien.

Es bleibt mir nur zu wünschen, dafs die Auswahl der Gegenstände nicht für unglücklich erachtet werde, und derjenige Grad der Vollständigkeit erreicht sein möge, welchen der Zweck erheischt.

Das Werk, welches unter dem Titiel: Anfangsgründe der reinen Zahlenlehre, bald erscheinen wird, soll ohngefähr 10 bis 12 Druckbogen betragen.

Im Juli 1831.

Dr. Ferd. Minding,
Privatdocent an der Universität zu Berlin.

Nachricht.

2. *Grundrifs der analytischen Sphärik von* C. Gudermann. *Cöln,* 1830. *Bei* Dumont-Schauberg. 8. 164 *S. mit* 6 *Figurentafeln.*

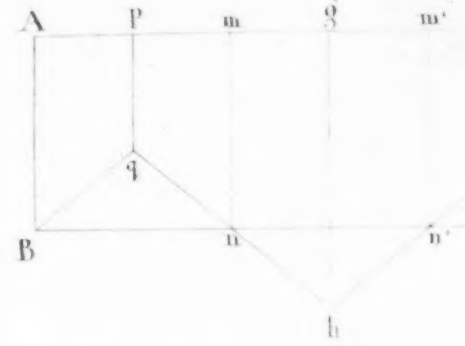
Diese Schrift des Herrn Verfassers der „Theorie der Potenzial- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen" und mehrerer andern Abhandlungen im gegenwärtigen Journale, ist der analytischen Untersuchung von Figuren auf der Kugelfläche gewidmet, und zwar werden die Untersuchungen vermittelst sphärischer oder Bogen-Coordinaten theils aus einem Puncte, theils in den Axen, angestellt, vorzüglich vermittelst der letzten, die die Bogen-Abstände der Durchschnitte der durch die Cardinal-Puncte und die zu bestimmenden Puncte gezogenen Bogen mit den Axen vom Anfangs-Puncte der Coordinaten sind. Diese Art von Coordinaten erleichtern meistens die Untersuchungen sehr und vereinfachen den Ausdruck ihrer Resultate, weil mehr die Tangenten als die Sinus und Cosinus der Bogen in Rechnung kommen. Es werden merkwürdige Analogieen zwischen den Resultaten für die Figuren auf der Kugelfläche und für die gleichnamigen in der Ebene gefunden.

Die Untersuchungen beginnen mit den, den einfachsten Fällen für Coordinaten in der Ebene analogen Gegenständen. Es kommen z. B. zuerst die sphärisch-geraden Linien vor, welche gröfste Kreise sind, die Perpendikel auf dieselben, die Sphärisch-Geraden, welche durch zwei gegebene Puncte gehen, diejenigen welche auf zwei andern senkrecht stehen, welche gegebene Winkel auf bestimmte Weise theilen, die Scheitellinien im Dreieck u.s. w. Hierauf folgt die Veränderung der Coordinaten auf eine einfache Weise. Sodann folgen allgemeine Untersuchungen der Curven auf der Kugelfläche, nach gegebenen Gleichungen zwischen den sphärischen Axen-Coordinaten. Ferner wird die Berührung in den verschiedenen Ordnungen, die Krümmung, die Evolution, die Rectification und Quadratur abgehandelt, wobei interessante allgemeine Sätze vorkommen. Hierauf wird die sphärische Cycloïde- und Kettenlinie insbesondere untersucht, wobei der Herr Verfasser auch einige Anwendungen von seiner Theorie der Potenzial-Functionen macht. Ein folgender Abschnitt beschäftigt sich mit den sphärischen Linien zweiter Ordnung, oder den sogenannten Kegelschnitten auf der Kugel insbesondere. Die Rectification und Quadratur führt hier auf die elliptischen Integrale, wie sich erwarten liefs, weil diese Integrale zu den sphärischen Dreiecken in einer ähnlichen Beziehung stehen, wie die Kreisfunctionen zu den ebenen Dreiecken. Hierauf folgen noch interessante Sätze von der centrischen Theilung der sphärisch-geraden Linien, nebst einigen Nachträgen. Einige Bemerkungen über die Anwendung des kürzlich vom Hrn. Prof. Plücker vorgeschlagenen Coordinaten-Systems auf die Sphärik machen den Beschlufs.

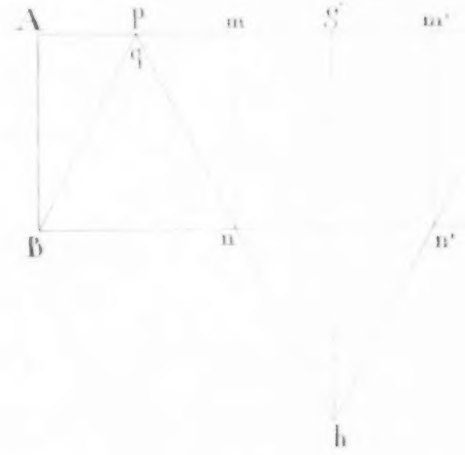
Die Schrift ist, ungeachtet ihres geringen Umfanges, sehr reichhaltig, und mit Einsicht und Gewandtheit im geometrischen Calcul verfafst. Ihr Gegenstand ist unstreitig von grofsem Interesse, nicht allein theoretisch für die analytische Geometrie, sondern auch für die mancherlei Anwendungen der Sphärik, z. B. in der Astronomie, Geographie etc. Der Gebrauch der Axen-Coordinaten zeigt sich sehr fruchtbar und wird wahrscheinlich noch ferner interessante Resultate gewähren.

Diese neue, schöne Arbeit des seiner Wissenschaft mit so vielem Eifer ergebenen Verfassers verdient daher in jedem Betracht, der Aufmerksamkeit der Geometer empfohlen zu werden.

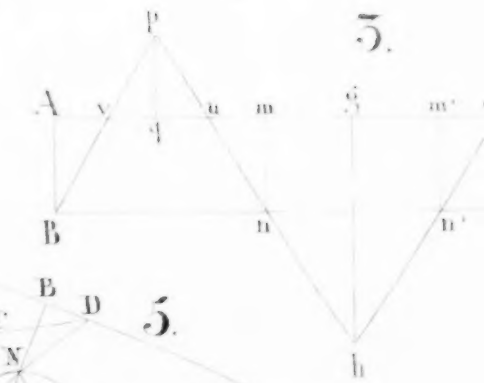
1.


A
P
m
S
m'
q
B
n
n'
h

2.

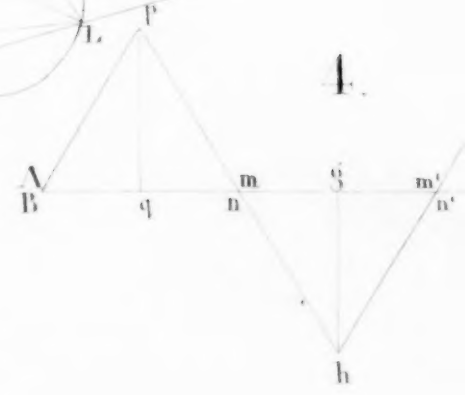

A
P
m
S
m'
q
B
n
n'
h

3.

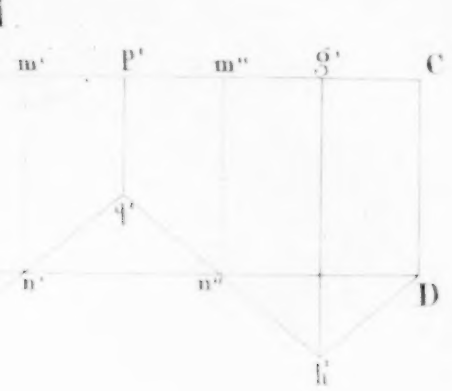

P
A
x
q
n
m
S
m'
B
n
n'
h

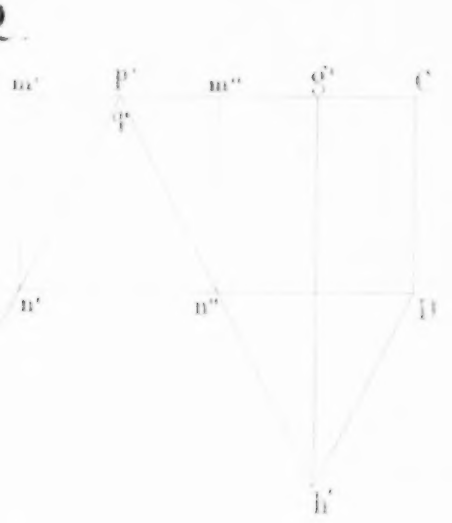
B
E
C
D
N
K
S
L
M
A

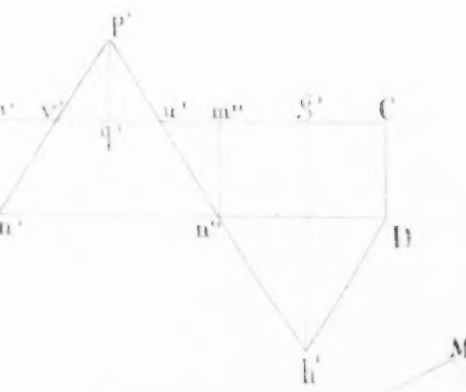
4.


P
A
B
q
n
m
S
m'
n'
h

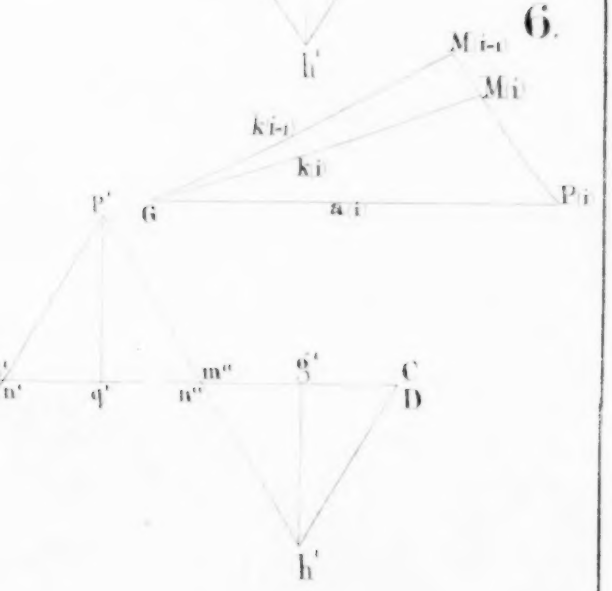
Taf. I.


m'
P'
m''
S'
C
q'
n'
n''
D
h'

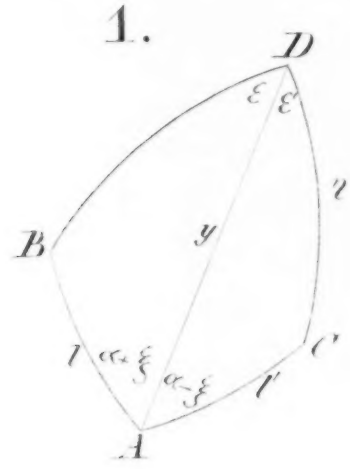

m'
P'
m''
S'
C
q'
n'
n''
D
h'


P'
x'
q'
u'
m''
S'
C
n'
n''
D
h'

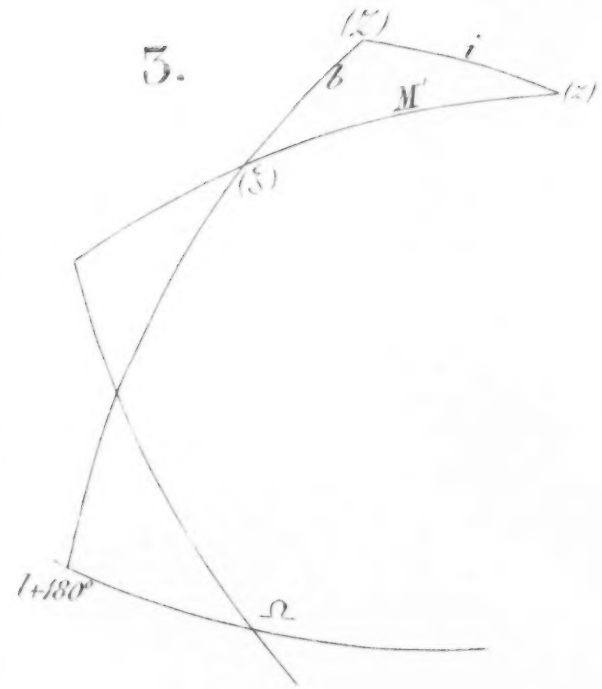
6.


M i-1
Mi
ki-1
ki
P'
G
a i
Pi
m''
S'
C
q'
n''
D
h'

1.

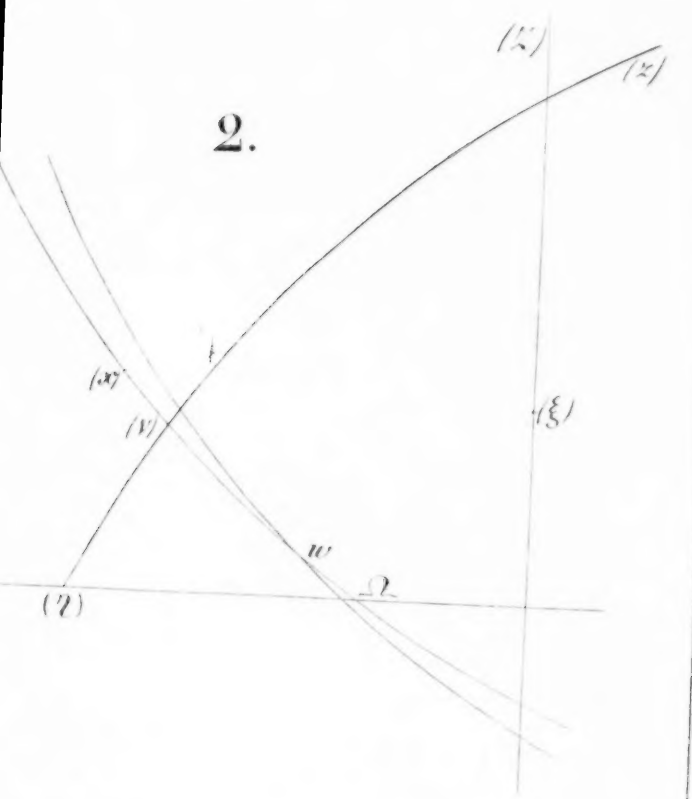


3.

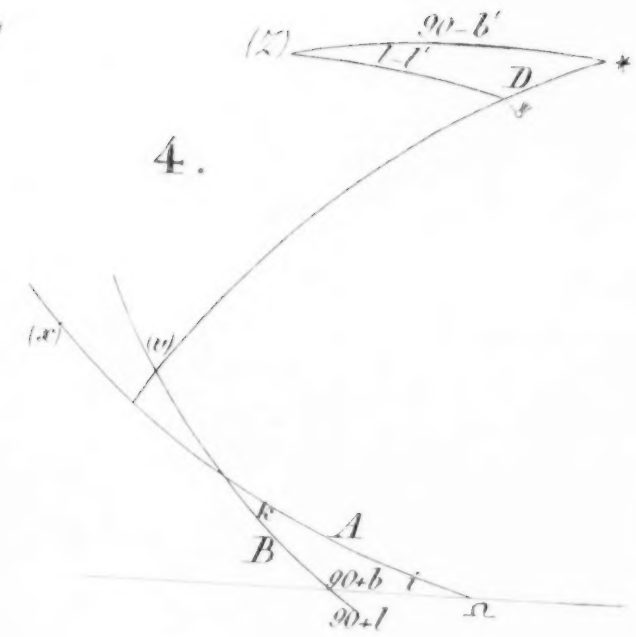


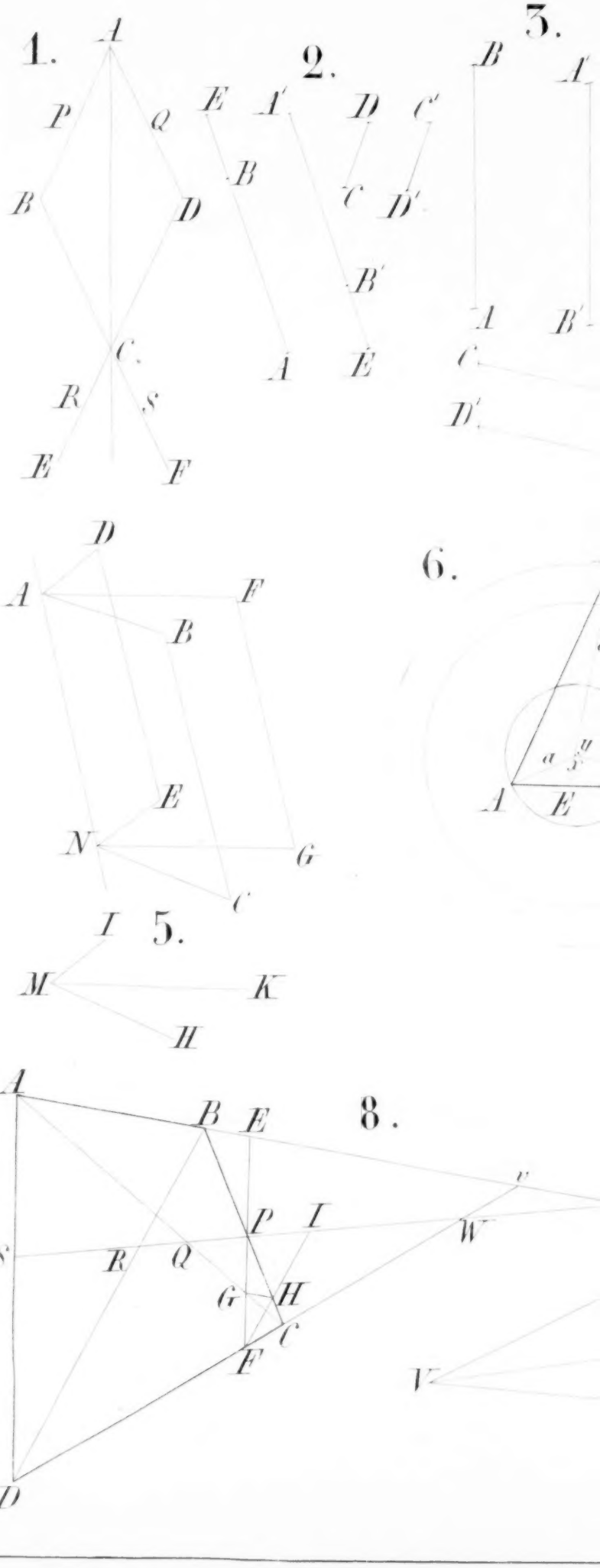
Taf. II.

2.

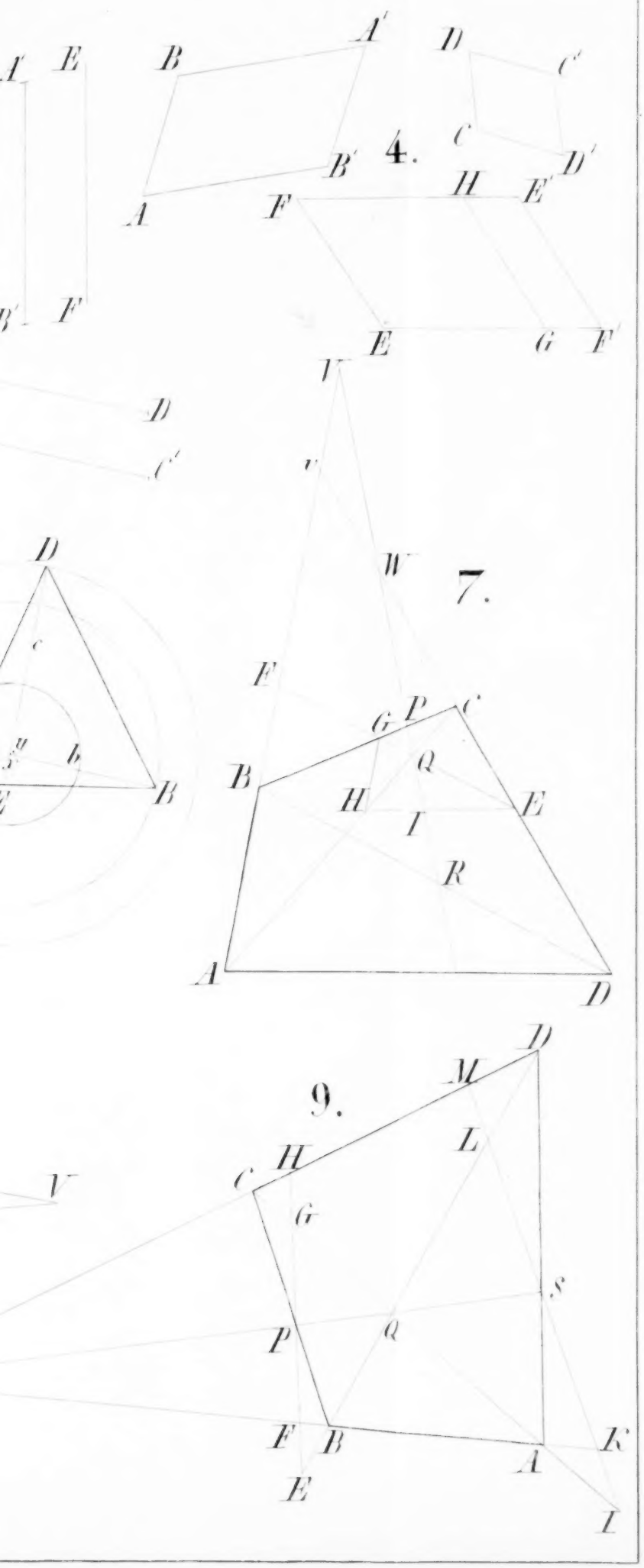


4.




1.
A
P
Q
B
D
C
R
S
E
F
2.
E
A'
D
C'
B
C
D'
B'
A
E
3.
B
A
A
B'
C
D'
D
A
B
N
G
C
I
5.
M
K
H
A
B
E
8.
P
I
S
R
Q
G
H
C
F
D
W
V
6.
a
A
E

Taf. III.



10
3600